Algèbre tensorielle des complexes

Soit A un anneau commutatif unitaire, qui est anneau de base dans toute la suite de sorte que nous l'omettons fréquemment des notations. Avant de commencer, une seule observation qui sera très importante dans la suite. Dans la philosophie des catégories dérivées, on considère que, du point de vue (co)homologique, un module est mieux représenté par une quelconque de ses résolutions. Il se trouve que dans les catégories de complexes, il est également crucial d'associer aux ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}(M_\bullet, N_\bullet)$ (qui sont naturellement des modules) des complexes qui les résolvent. Par ailleurs, l'existence d'une structure naturelle de complexe sur les Hom est plus ou moins équivalente à l'existence de produits tensoriels, puisqu'une des façons de définir $\cdot \otimes M$ est comme adjoint de $\mathrm{Hom}(M, \cdot)$ ([1]).

1 Algèbre tensorielle classique

Notons A-Mod, ou plus simplement Mod, la catégorie des A-modules.

1.1 Sommes et produits dans Mod. Soit I un ensemble et (M_i) une famille de A-modules. Rappelons que dans la catégorie Mod un produit direct $\prod M_i$ est composé de vecteurs quelconques $x = (x_i)$ alors qu'une somme directe $\oplus M_i$ est composée de vecteurs avec un nombre fini de composantes non nulles. Ainsi les sommes directes finies sont isomorphes aux produits directs finis, alors qu'on n'a qu'une injection stricte $\oplus M_i \hookrightarrow \prod M_i$ si I est infini.

1.2 Produits tensoriels. On considère la même famille (M_i) de A-modules. Étant donné un autre A-module P, on dit qu'une fonction

$$f\colon \prod_{i\in I} M_i \to P$$

est multilinéaire ssi à chaque fois qu'on fixe toutes les variables sauf la i_0-ème, l'application restreinte

$$f_{(x_i)_{i\neq i_0}}\colon M_{i_0} \to P$$

est linéaire. Le produit tensoriel des M_i est source universelle des fonctions multilinéaires $\prod M_i \to P$. Pour le construire on part de la somme directe $S = \oplus A$ indexée par l'ensemble $\prod M_i$. Un élément de cette somme est une combinaison linéaire finie $\sum a_x \delta_x$ où δ_x est un générateur du facteur direct d'indice $x = (x_i)$ dans S, ou encore, une fonction à support fini si on voit δ_x comme l'indicatrice de x. On quotiente ensuite S par le sous-module L engendré par les relations de linéarité, i.e., pour tous x, y tels que $x_i = y_i$ sauf pour un indice i_0 :

(i) $\delta_{x+y} - \delta_x - \delta_y$, et

(ii) $\delta_y - a\delta_x$ si de plus $y_{i_0} = a x_{i_0}$ pour un $a \in A$.

On définit le produit tensoriel et l'application multilinéaire universelle par

$$\bigotimes_{i\in I} M_i = S/L \qquad \text{et} \qquad \otimes\colon \prod_{i\in I} M_i \to \bigotimes_{i\in I} M_i$$

[1] Si A est un corps on peut aussi invoquer l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(M, N) = M^* \otimes N$ pour justifier ce point, mais en général la fléche naturelle $M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}(M, N)$ n'est ni injective ni surjective.

Celle-ci envoie x sur l'image de δ_x dans S/L, notée $\underset{i\in I}{\otimes} x_i$ ou $\otimes x$.

Vérifions rapidement la propriété universelle (PU). Soit $f\colon \prod M_i \to P$ multilinéaire, on définit $\overline{f}\colon S \to P$ par $\overline{f}(\sum a_x\delta_x) = \sum a_x f(x)$. Par linéarité de f cette fonction $\overline{f}$ est nulle sur les relations de linéarité L donc se factorise en $\tilde{f} : \otimes M_i \to P$.

On observe que dans $\otimes M_i$ un tenseur irréductible $\otimes x$ est produit tensoriel d'éléments de M_i, en nombre éventuellement infini si I est infini. A contrario, on sait que le produit tensoriel d'une infinité de A-algèbres M_i, limite directe des produits tensoriels $\otimes_{J\subset I} M_j$ sur les sous-ensembles finis $J \subset I$, est constitué de (sommes finies de) tenseurs d'un nombre *fini* d'éléments des M_i. En particulier un produit tensoriel infini d'algèbres n'a pas pour module sous-jacent le produit tensoriel infini des modules sous-jacents.

Faire un petit récapitulatif - cf Eisenbud - des conditions sous lesquelles une limite directe d'algèbres est représentable : ça ne marche pas pour la somme directe infinie.

2 Algèbre tensorielle des modules gradués

2.1 Modules gradués. Soit Gr la catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués ([2]). Un module gradué est noté $M_\bullet = \oplus M_i$ ou parfois simplement M, comme son module non gradué sous-jacent. Par translation de la graduation, on définit un module $M(n)_\bullet = \oplus M_{i+n}$. Un élément $x \in M_i$ est dit *homogène de degré* i et on note $|x| := i$.

Soient $M_\bullet$ et $N_\bullet$ deux modules gradués. On dit qu'un morphisme de A-modules $f\colon M \to N$ est *de degré* i si $f(M_j) \subset N_{i+j}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On définit le *module Hom gradué* par

$$\mathrm{Hom}(M,N)_\bullet = \bigoplus_d \left\{ \text{ morphismes } f\colon M \to N \text{ homogènes de degré } d \right\}$$

Par définition un *morphisme de* A*-modules gradués* est un élément de $\mathrm{Hom}(M,N)_0$:

$$\underset{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Hom}}(M,N) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(M,N)_0$$

On remarque qu'un morphisme de A-modules homogène de degré i définit donc un morphisme de A-modules gradués $M \to N(i)$. On peut donc retourner la notation et écrire $\mathrm{Hom}(M,N)_i = \underset{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Hom}}(M, N(i))$.

2.2 Sommes et produits dans Gr. La somme directe $M \oplus N$ est le module $\oplus(M_i \oplus N_i)$ gradué comme indiqué. Le produit direct ordinaire $M \times N$ est isomorphe à $M \oplus N$, il fait donc aussi office de produit direct gradué avec la graduation juste décrite.

Pour une somme directe infinie on a $\oplus_{s\in S}(M_s)_\bullet = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \oplus_{s\in S} (M_s)_i$ comme pour les sommes finies. En revanche, pour un nombre quelconque de modules gradués M_s, $s \in S$, on n'a en général qu'une injection

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \prod_{s\in S} M_{s,i} \hookrightarrow \prod_{s\in S} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_{s,i}$$

[2]On peut s'interroger sur les raisons du choix de $\mathbb{Z}$ comme groupe naturel de la graduation. Il se trouve que les graduations par $\mathbb{N}$ (complexes positifs ou négatifs), par $\mathbb{Z}^2$ (complexes doubles auxquels correspond l'hypercohomologie) voire $\mathbb{Z}^3$ (...) apparaissent aussi.

et c'est le module de gauche (naturellement gradué) qui incarne le produit direct gradué. Une autre façon de le décrire, comme sous-ensemble du module de droite, est :

$$\left(\prod_{s\in S} M_s\right)_\bullet := \left\{ x=(x_s)\in\prod_{s\in S} M_s \mid \exists\, I\subset\mathbb{Z} \text{ fini}, \forall s\in S, x_s\in M_{s,I} \right\}$$

(on a noté $M_{s,I}\subset M_s$ la somme des $M_{s,i}$ pour $i\in I$). On peut décrire de la même façon les limites projectives arbitraires.

2.3 Modules bigradués. Il est souvent utile de faire intervenir des modules *multigradués*, par exemple, dès qu'interviennent des produits tensoriels ou morphismes de modules gradués. Parlons pour simplifier de la catégorie des modules *bigradués* notée Bigr. Un tel module est noté $M_{\bullet\bullet}=\oplus M_{i,j}$ et un élément de $M_{i,j}$ est dit *homogène de bidegré* (i,j). Comme ci-dessus on définit ce que sont le module $M(i,j)$, un morphisme de A-modules $f\colon M\to N$ de bidegré (i,j), et un morphisme de A-modules gradués $(i,j)=(0,0)$.

Un exemple est le *produit bigradué* $(M\times N)_{\bullet\bullet}$ de deux modules gradués $M_\bullet$ et $N_\bullet$ défini par $(M\times N)_{i,j}=M_i\times N_j$. De manière analogue on définit le *produit tensoriel bigradué* $(M\otimes N)_{\bullet\bullet}$ par $(M\otimes N)_{i,j}=M_i\otimes N_j$. Cela donne lieu à deux foncteurs naturels $\mathrm{Gr}\times\mathrm{Gr}\to\mathrm{Bigr}$.

2.4 Produits tensoriels. On peut introduire le produit tensoriel à partir des applications bilinéaires. La notion d'application *multilinéaire graduée* n'a de sens que pour un nombre fini n de variables, et on ne perd donc pas de généralité à considérer $n=2$. Soient M,N,P des A-modules gradués. On dit qu'une application bilinéaire

$$f\colon M\times N\to P$$

est *graduée* ssi à chaque fois qu'on fixe un élément homogène $x\in M$ de degré i, l'application f définit une application linéaire de degré i

$$f(x,\cdot)\colon N\to P$$

et symétriquement en l'autre variable. Noter qu'une application bilinéaire envoie un couple (x,y) d'éléments homogènes de même degré i dans P_{2i}, alors qu'une application linéaire l'enverrait dans P_i.

Faisons apparaître le produit tensoriel. Soit $f\colon M\times N\to P$ application bilinéaire graduée. Elle induit un morphisme de modules bigradués $(M\times N)_{\bullet\bullet}\to P^\sharp$ où $P^\sharp$ est le module bigradué *antidiagonal* ayant pour composant de bidegré (i,j)

$$P^\sharp_{i,j}=P_{i+j}$$

Ce morphisme induit à son tour un morphisme $(M\otimes N)_{\bullet\bullet}\to P^\sharp$. Le foncteur $(\cdot)^\sharp\colon\mathrm{Gr}\to\mathrm{Bigr}$ a un adjoint à gauche qui est le *complexe total associé*

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Tot}\colon \mathrm{Bigr} & \to & \mathrm{Gr}\\ N & \mapsto & \mathrm{Tot}(N)\end{array}$$

avec $\mathrm{Tot}(N)_i=\oplus_{j+k=i}N_{j,k}$. Revenant à f, par la propriété d'adjonction on obtient une flèche $\mathrm{Tot}((M\otimes N)_{\bullet\bullet})\to P$ et donc le complexe total est le produit tensoriel gradué recherché. Explicitement,

$$(M\otimes N)_\bullet=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{j+k=i}M_j\otimes N_k$$

2.5 Produit tensoriel et Hom gradué. On peut aussi introduire le produit tensoriel comme adjoint de Hom gradué, par la propriété

$$\underset{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Hom}}\big((M \otimes N)_\bullet, P_\bullet\big) = \underset{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Hom}}\big(M_\bullet, \mathrm{Hom}(N, P)_\bullet\big)$$

C'est ce point de vue que nous allons utiliser pour les complexes.

3 Algèbre tensorielle des complexes

Un *complexe* (cohomologique) est un module gradué $M_\bullet$ muni d'une *différentielle*, c'est-à-dire un morphisme de modules d de degré 1 tel que $d^2 = 0$ ([3])([4]). Un *bord* est un élément de $\ker(d)$, un *cycle* est un élément de $\mathrm{im}(d)$. On prolonge l'opérateur de translation aux complexes en définissant la différentielle de $M(i)_\bullet$ par $d_{M(i)} := (-1)^i d_M$. Enfin, on note que tout module ordinaire M peut être vu comme un complexe concentré en degré 0, avec différentielle nulle (un complexe avec $d = 0$ est parfois qualifié de *cyclique*).

3.1 Complexe Hom. Soient $M_\bullet$ et $N_\bullet$ deux complexes. Pour munir le module Hom gradué d'une différentielle naturelle, on s'inspire du cas de $M = \mathrm{Hom}(A, M)_\bullet$ pour lequel une bonne candidate de différentielle serait $d(f) = d \circ f$, et de celui de $M^* = \mathrm{Hom}(M, A)_\bullet$ avec candidate $d(f) = f \circ d$. Revenant à $\mathrm{Hom}(M, N)_\bullet$, il semble judicieux de définir $d(f) = d \circ f + f \circ d$ mais il se trouve que si on fait cela la relation $d^2 = 0$ n'est pas vérifiée. Le coup de génie est de faire intervenir un signe et de définir d sur les morphismes *homogènes* par

$$d(f) = d \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d$$

Ceci posé corrigeons l'expression ci-dessus pour le dual M^* : on a $d_{M^*}(f) = -(-1)^{|f|} f \circ d_M$. On réserve un nom spécial, venu de la topologie, aux bords d'un complexe Hom : ce sont les *homotopies*. (Le plus souvent, le terme n'est utilisé que pour les homotopies de degré 0 i.e. les f tels qu'il existe $h \in \mathrm{Hom}(M, N)_{-1}$ tel que $f = d \circ h + h \circ d$.)

3.2 Catégories de complexes. On va définir la *catégorie des complexes* $C = C(A)$ et la *catégorie des complexes à homotopie près* $K = K(A)$, qui diffèrent seulement par les ensembles de morphismes.

Dans la catégorie C les morphismes entre $M_\bullet$ et $N_\bullet$ sont les cycles de degré 0 de $\mathrm{Hom}(M, N)_\bullet$ c'est-à-dire les $f\colon M \to N$ de degré 0 tels que $d \circ f = f \circ d$. Dit autrement ce sont les éléments du H^0 du complexe positif $\mathrm{Hom}(M, N)_{\geq 0}$. La catégorie C est abélienne.

Dans la catégorie K les morphismes sont les éléments de $H^0(\mathrm{Hom}(M, N)_\bullet)$, le complexe tout entier cette fois, c'est-à-dire les f de degré 0 tels que $d \circ f = f \circ d$ modulo les homotopies. La catégorie K est seulement une catégorie additive.

Il y a un point à préciser pour justifier que la composition des morphismes passe au quotient dans K. Soit $I(M, N)_\bullet \subset \mathrm{Hom}(M, N)_\bullet$ le sous-complexe formé des homothéties de tous degrés. Il n'est autre que $\mathrm{im}(d)$, et possède la propriété importante d'être un *idéal* dans $\ker(d)$. Ceci veut dire que si

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(M, N)_\bullet \cap \ker(d) \qquad \text{et} \qquad \psi \in \mathrm{Hom}(N, P)_\bullet \cap \ker(d)$$

[3] Le terme équivalent de *module différentiel gradué* est aussi utilisé, même si on pourrait lui préférer celui de *module gradué différentiel* car il faut avoir un module gradué pour pouvoir parler de différentielle.

[4] Un usage pratique est de noter toutes les différentielles par la même lettre d ; on écrit d_M lorsqu'il faut clarifier.

sont composables, alors dès que l'un est une homotopie, il en va de même du composé $\psi \circ \varphi$. On vérifie qu'alors, la composition des morphismes passe au quotient, ce qui au passage fournit des complexes Hom dans K, à différentielle nulle :

$$\operatorname*{Hom}_K(M, N)_\bullet = H\big(\operatorname*{Hom}_C(M, N)\big)_\bullet$$

3.3 Produits tensoriels. Le produit tensoriel des complexes $M_\bullet$ et $N_\bullet$ dans C ou dans K est solution du problème universel

$$\operatorname*{Hom}_{C \text{ ou } K}\big((M \otimes N)_\bullet, P_\bullet\big) = \operatorname*{Hom}_{C \text{ ou } K}\big(M_\bullet, \mathrm{Hom}(N, P)_\bullet\big)$$

Il est immédiat de calculer qu'on fait du module gradué $(M \otimes N)_\bullet$ un produit tensoriel dans C en définissant

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy$$

En fait c'est également un produit tensoriel dans K, ce que l'on voit en relevant aux complexes Hom la correspondance $\mathrm{Hom}((M \otimes N)_\bullet, P_\bullet)_\bullet = \mathrm{Hom}(M_\bullet, \mathrm{Hom}(N, P)_\bullet)_\bullet$. Comme cette correspondance est un isomorphisme de complexes, elle échange les homotopies.

3.4 Applications bilinéaires de complexes. On peut a posteriori définir la notion d'*application bilinéaire de complexes* : c'est une application bilinéaire graduée $f \colon M \times N \to P$ telle que

$$d(f(x, y)) = f(dx, y) + (-1)^{|x|} f(x, dy)$$

3.5 Sym et $\wedge$. Il y a un isomorphisme de symétrie $\sigma \colon M \otimes N \to N \otimes M$ qui est défini sur les tenseurs d'éléments homogènes x, y par

$$\sigma(x \otimes y) = (-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$$

Considérons le cas $N = M$. On dit qu'une application bilinéaire de complexes $f \colon M \times M \to P$ est *symétrique* resp. *antisymétrique*, si l'application induite $\tilde{f} \colon M \otimes M \to P$ vérifie

$$\tilde{f} \circ \sigma = \tilde{f} \qquad \text{resp.} \qquad \tilde{f} \circ \sigma = -\tilde{f}\,.$$

Elle se factorise dans ce cas automatiquement par le *produit symétrique* $S^2(M)$ resp. le *produit extérieur* $\wedge^2(M)$, quotient de $M \otimes M$ par le sous-complexe engendré par les expressions

$$x \otimes y - (-1)^{ij} y \otimes x \qquad \text{resp.} \qquad x \otimes y + (-1)^{ij} y \otimes x$$

avec x, y homogènes et $i := |x|$, $j := |y|$. Pour les puissances symétriques et extérieures d'ordre supérieur, on dit qu'une application bilinéaire est symétrique ssi pour tout i on a $\tilde{f} \circ \sigma_i = \tilde{f}$ où σ_i est l'automorphisme du produit $M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ correspondant à σ sur les facteurs i et $i+1$, et laissant les autres facteurs inchangés.

Explicitons $S^n(M_\bullet)$ et $\wedge^n(M_\bullet)$. On part du produit tensoriel $M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$, et plus précisément de son composant de degré i, somme de facteurs

$$M_{j_1} \otimes M_{j_2} \otimes \cdots \otimes M_{j_n} \qquad (j_1 + \cdots + j_n = i)\,.$$

Utilisant les relations de symétrie imposées, on peut "permuter les facteurs d'indices distincts" et ne conserver que les facteurs du type

$$M_{i_1}^{\otimes n_1} \otimes M_{i_2}^{\otimes n_2} \otimes \cdots \otimes M_{i_k}^{\otimes n_k} \qquad (n_1 i_1 + \cdots + n_k i_k = i)\,,$$

où $k \leq n$, et $i_1, \ldots, i_k$ sont tous distincts et ordonnés de la façon qui nous plaît le plus. Dans $M_{i_1}^{\otimes n_1}$ la relation de commutation fait intervenir le signe $(-1)^{(i_1)^2}$ donc c'est une relation symétrique si i_1 est pair et antisymétrique sinon. La façon d'ordonner qui nous plaît le plus va consister à regrouper les indices pairs au début, les impairs à la fin, et ordonner chaque paquet. On obtient :

$$\left[S^n(M_\bullet)\right]_i = \bigoplus_{\substack{i_1<\cdots<i_s \\ i_{s+1}<\cdots<i_k}} S^{n_1}(M_{i_1}) \otimes \cdots \otimes S^{n_s}(M_{i_s}) \otimes \wedge^{n_{s+1}}(M_{i_{s+1}}) \otimes \cdots \otimes \wedge^{n_k}(M_{i_k})$$

où la somme porte sur les multi-indices de taille k variable, séparés en s pairs et $k-s$ impairs, tels que $n_1 i_1 + \cdots + n_k i_k = i$ et $n_1 + \cdots + n_k = n$. De même,

$$\left[\wedge^n(M_\bullet)\right]_i = \bigoplus_{\substack{i_1<\cdots<i_s \\ i_{s+1}<\cdots<i_k}} \wedge^{n_1}(M_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \wedge^{n_s}(M_{i_s}) \otimes S^{n_{s+1}}(M_{i_{s+1}}) \otimes \cdots \otimes S^{n_k}(M_{i_k})$$

Enfin il est facile de calculer la différentielle sur S^n ou $\wedge^n$. Notons $x_{<i} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1}$, $|x_{>i}| = |x_1| + \cdots + |x_{i-1}|$ et $x_{<i} = x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n$. Alors

$$d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|x_{<i}|} x_{<i} \otimes d(x_i) \otimes x_{>i}$$