

# Schémas en groupes et familles de courbes

Soutenance d'Habilitation, 18 novembre 2011

Matthieu Romagny

Je remercie toutes les personnes présentes d'être venues.

## 0 Introduction

Je voudrais expliquer trois résultats issus des parties 2 et 3 du mémoire, dont le thème commun est la réduction des revêtements de courbes algébriques, de leurs espaces de modules, et de leurs groupes de Galois :

1. Un théorème de réduction stable,
2. Un théorème d'existence (de schémas en groupes),
3. Un théorème de construction (de schémas en groupes).

On peut faire remonter la motivation initiale à l'étude des *courbes modulaires*  $Y_0(N)$ , classifiant des isogénies cycliques  $E \rightarrow E'$  entre courbes elliptiques. Sur tout corps  $k$  de caractéristique  $p$  première avec  $N$ , ce sont des courbes *affines* qui possèdent des complétées projectives  $X_0(N)$ . Sur  $k = \mathbb{C}$ , l'ensemble des points fermés de ces courbes possède une description concrète comme quotient du demi-plan de Poincaré (complété) par un sous-groupe de congruence de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Deligne et Rapoport (1973) ont introduit les *courbes elliptiques généralisées* et les isogénies cycliques entre elles pour obtenir une interprétation modulaire  $X_0(N)$ , lorsque  $p \nmid N$ .

Ensuite, Katz et Mazur (1985) ont utilisé la notion de *sous-schéma en groupes cyclique* due à Drinfeld pour obtenir des modèles de réduction de  $X_0(N)$  en  $p$ .

Puis Conrad (2007) a étendu la notion de sous-schéma en groupes cyclique au cas des courbes elliptiques généralisées et obtenu une interprétation modulaire pour le modèle  $X_0(N)$  sur  $\mathbb{Z}$ .

Plus récemment, divers auteurs (Edixhoven 1990, Bouw-Wewers 2004, Coleman 2010) ont étudié le modèle stable de  $X_0(N)$ . Ces constructions possèdent un grand intérêt arithmétique, notamment pour produire des structures entières naturelles sur les espaces de formes modulaires.

Les courbes elliptiques sont au croisement de la famille des variétés abéliennes et de celle des courbes. Pour les variétés abéliennes de dimension  $> 1$ , les questions précédentes sont le sujet de recherches intenses. Pour les courbes de genre  $> 1$ , elles sont aussi étudiées ; le travail récent le plus notable est celui de Abramovich-Olsson-Vistoli. C'est de ce dernier sujet que je veux parler.

D'autres questions se posent d'ailleurs ; la géométrie des espaces de modules obtenus est très intéressante (ce ne sont pas des courbes en général), et les compactifications permettent d'étudier leur anneaux de cohomologie et d'intersection (suivant le programme de Mumford pour  $M_g$ ). En caractéristique 0 ou  $p \nmid N$ , ceci est fait dans Bertin et Romagny, *Champs de Hurwitz* mais nous n'en parlerons pas dans cet exposé.

# 1 Un théorème de réduction stable

Soient  $G$  un groupe fini d'ordre  $N$  et  $g, r, n$  des entiers. Considérons les revêtements  $Y \rightarrow X$  galoisiens de groupe  $G$  entre courbes projectives, lisses, géométriquement connexes, ramifiés le long d'un diviseur de degré  $r$ , avec  $Y$  de genre  $g$  munie de  $n$  orbites marquées. (Notons que la formule de Riemann-Hurwitz détermine le genre de  $Y$ .) Classifier ces revêtements en caractéristique 0 revient à étudier le  $\mathbb{Q}$ -champ  $\mathcal{H}_{g,G,r,n}$  dont les sections sont les familles de tels objets au-dessus de  $\mathbb{Q}$ -schémas variables. Lorsque  $g = n = r + 1 = 1$  et  $G$  est cyclique, on retrouve les courbes modulaires  $Y_0(N)$ .

Nous nous intéressons à la réduction en  $p$  lorsque  $G = \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$ . Le premier cas est celui de  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Nous aurons besoin de deux notions que nous rappelons :

- selon Katz-Mazur, un *générateur* d'un  $S$ -schéma en groupes fini localement libre  $u : \mathcal{G} \rightarrow S$  est un morphisme de  $S$ -groupes  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $i \mapsto P_i$ , tel que la norme  $\mathbb{N} : u_*\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{O}_S$  est donnée par  $\mathbb{N}(f) = f(P_0) \dots f(P_{N-1})$ . Lorsque  $\mathcal{G}$  est sous-groupe d'une courbe elliptique  $E$ , c'est équivalent à la définition plus familière qui dit que  $\mathcal{G}$  est somme des diviseurs de Cartier  $P_i \subset E$ .
- selon Abramovich-Olsson-Vistoli, une *courbe tordue* est un champ algébrique d'Artin qui possède un espace de modules grossier  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow X$  où  $X$  est une courbe nodale et  $\pi$  est un isomorphisme sauf au voisinage étale de certains points doubles où  $\mathcal{X}$  ressemble au quotient champêtre  $[(xy = t)/\mu_d]$ , avec  $t$  une fonction sur la base et  $\mu_d$  agissant par  $z.(x, y) = (zx, z^{-1}y)$ .

Voici maintenant la notion importante, que nous introduisons avec D. Abramovich.

**Définition.** Un  *$p$ -torseur stable* est un objet

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
 \curvearrowright & \searrow & \\
 \mathcal{G} & & 
 \end{array}$$

- où
- $\mathcal{X}$  est une courbe tordue,
  - $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{X}$ -schéma en groupes de degré  $p$  muni d'un générateur,
  - $Y$  est une courbe DM-stable de genre  $g \geq 2$  qui est un  $\mathcal{G}$ -torseur au-dessus de  $\mathcal{X}$ .

**Remarques.** (i) Typiquement, le groupe  $\mathcal{G}$  ressemble (étale-localement sur la base et sur  $\mathcal{X}$ ) au groupe de Tate-Oort (la base a pour équation  $ac = p$ , le groupe est étale sur la branche  $a \neq 0$ , de type multiplicatif sur la branche  $c \neq 0$ , et additif au point double).

(ii) Les  $p$ -torseurs stables forment un champ algébrique  $ST_{p,g}$  dont la fibre en caractéristique 0 est isomorphe au champ de Hurwitz compactifié classique  $\mathcal{H}_{g,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},0}$ , voir par ex. Bertin-Romagny, *Champs de Hurwitz*.

(iii) Le générateur rigidifie ; en particulier il interdit les formes tordues de groupes étales.

(iv) On peut accepter dans  $Y$  des orbites marquées, ou des points de ramification à stabilisateur linéairement réductif, qui apparaissent dans  $\mathcal{X}$  comme des points champêtres. Mais les revêtements galoisiens ramifiés de courbes lisses en car.  $p$  ne donnent pas des  $p$ -torseurs stables.

L'énoncé de réduction stable suivant montre que  $ST_{p,g}$  est un champ algébrique *propre* :

**Théorème (Abramovich, R., 2010).** *Soit  $K$  un corps à valuation discrète et  $Y_K/\mathcal{X}_K$  un  $p$ -torseur stable. Alors, quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, celui-ci s'étend de manière unique en un  $p$ -torseur stable  $Y/\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{O}_K$ .*

Pour montrer cela, on remplace  $K$  par une extension de réduction stable de  $Y_K$ . Puis :

(1) On montre qu'il existe une unique extension  $Y \rightarrow \mathcal{X}$  qui est un morphisme plat ; c'est là qu'il est crucial de travailler avec des courbes *tordues*.

(2) On note  $\mathcal{G}$  l'adhérence schématique de  $\mathcal{G}_K$  dans  $\text{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$ , et on montre que le morphisme  $\mathcal{G} \times_{\mathcal{X}} Y \rightarrow Y \times_{\mathcal{X}} Y$  est un isomorphisme. On le montre d'abord en codimension 1, où le point crucial est qu'au voisinage de chaque point générique  $\eta$  de la fibre spéciale,  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  est un schéma en groupes plat, à stabilisateur de degré  $< p$  donc trivial. Ceci suffit par un argument de « normalisation » (en fait une S2-isation qui n'est pas R1). On déduit que :  $\mathcal{G}$  est plat ; la multiplication de  $\mathcal{G}_K$  s'étend ; on a la propriété de toseur.  $\square$

Pour  $G = \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$  avec  $a \geq 2$ , on peut définir  $\mathcal{G}$  de la même manière et c'est toujours un groupe fini plat en-dehors des points doubles de la fibre spéciale. (Le groupe  $\mathcal{G}_k$  n'agit plus librement aux points génériques ; je pense néanmoins que  $\mathcal{G}$  est bien plat partout.)

## 2 Un théorème d'existence de schémas en groupes

**2.1.** Pour étudier le groupe  $\mathcal{G}$ , on établit un théorème d'existence.

**Définition.** ( $S$  strictement local pour simplifier.) Un morphisme de type fini  $V \rightarrow S$  est *pur* si l'adhérence de tout point de  $V$  associé dans sa fibre  $V_s$  rencontre la fibre fermée.

C'est une forme de « critère valuatif de propreté aux points génériques ».

Par ex. les morphismes propres, ou fidèlement plats à fibres géométriquement intègres, sont purs. On a :

**Théorème (R., 2008).** *Soit  $R$  un anneau de valuation discrète et  $V$  un  $R$ -schéma de type fini, séparé, plat et pur. Soit  $G$  un  $R$ -schéma en groupes fini plat agissant sur  $V$ , fidèlement sur  $V_K$ . Alors il existe un unique schéma en groupes fini plat  $G' = G'_V$  qui agit fidèlement sur  $V$  et tel que l'action de  $G$  se factorise par un morphisme  $G \rightarrow G'$  qui est un isomorphisme en fibre générique. Comme faisceau fppf,  $G'$  est l'adhérence schématique de  $G$  dans  $\text{Aut}_R(V)$ .*

Après réduction au cas  $R$  hensélien, la preuve de ceci repose sur deux ingrédients :

(1) comme  $V$  est plat et pur, la famille  $\{Z_\lambda\}$  de ses sous-schémas finis plats  $G$ -stables est universellement schématiquement dense,

(2) grâce à l'existence du schéma  $\text{Aut}_R(Z_\lambda)$ , le résultat est facile si  $V = Z_\lambda$  est fini, et en général on montre que  $G'_V = \varprojlim G'_{Z_\lambda}$ .  $\square$

**2.2.** Revenons à notre revêtement  $Y \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{X}$  de degré  $p^a$ ,  $a \geq 2$ . Supposons pour simplifier que  $Y_K$  est lisse, donc  $\mathcal{G}_K = (h^*G)_K$  où  $h : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(R)$  est le morphisme de structure. On peut se demander comment varie  $\mathcal{G}$  ; par exemple :

**Question.** Le groupe  $\mathcal{G}$  est-il constant sur des ouverts de chaque composante ?

En fait, cette question a un intérêt très général et se pose pour la réduction d'une action sur n'importe quelle variété  $Y$ .

En degré  $p$ , la réponse est positive. Concentrons-nous sur un point générique  $\eta$  de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_k$ . On choisit un voisinage ouvert  $\mathcal{U} \ni \eta$  qui est pur (par exemple un voisinage à fibres irréductibles) et on note  $V$  la préimage dans  $Y$ . Le théorème d'existence fournit un groupe  $G'$ . On montre que le morphisme  $G$ -invariant  $V \rightarrow \mathcal{U}$  est même  $G'$ -invariant, donc on a une factorisation :

$$h^*G \twoheadrightarrow h^*G' \twoheadrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{U}}(V).$$

La question devient :

**Question (reformulée).** *Le morphisme  $h^*G' \rightarrow \mathcal{G}$  est-il un isomorphisme au voisinage de  $\eta$  ?*

Pour répondre, on peut se restreindre à l'anneau de valuation discrète  $R^* = \mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta}$ . Il se trouve que la réponse à cette question est négative, mais pour fabriquer un contre-exemple, on est face à la difficulté de *produire des exemples non triviaux de schémas en groupes et d'actions*.

### 3 Un théorème de construction

La classification des schémas en groupes finis plats commutatifs a connu des avancées récentes. La théorie de Breuil-Kisin fournit une description des modèles sur des anneaux de valuation discrète d'inégales caractéristiques complets à corps résiduel parfait ; mais bien sûr, dans notre cas  $k^*$  est imparfait. Par contre, la théorie de Sekiguchi-Suwa peut être exploitée pour produire des modèles de  $\mu_{p^n}$  sur n'importe quel anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques. Utilisant cela dans sa thèse, D. Tossici a décrit tous les modèles de  $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  et leurs dégénérescences. En corollaire, il a fourni une action locale de  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  dont le modèle de réduction varie beaucoup, contre-exemple à la question (reformulée) ci-dessus.

Expliquons brièvement nos résultats sur les modèles de  $\mu_{p^n}$ . Fixons un anneau de valuation discrète  $(R, K, k)$  de caractéristiques  $(0, p)$ . Pour construire des modèles, on procède par extensions successives, et l'image générale du processus d'extensions apparaît dès la dimension 2 :

**Dimension 1.** Pour tout  $\lambda \in R$ , on a une suite exacte sur le petit site plat de  $\text{Spec}(R)$  :

$$(\star) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{G}^\lambda \longrightarrow \mathbb{G}_{m,R} \longrightarrow i_*\mathbb{G}_{m,R/\lambda} \longrightarrow 0$$

où  $i : \text{Spec}(R/\lambda) \rightarrow \text{Spec}(R)$  désigne l'immersion fermée. Le faisceau  $\mathcal{G}^\lambda$  est représentable par un schéma en groupes affine lisse ; l'isogénie  $p : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \mathbb{G}_{m,K}$  s'étend en une isogénie  $\varphi : \mathcal{G}^\lambda \rightarrow \mathcal{G}^{\lambda^p}$  si et seulement si  $\lambda^{p-1}$  divise  $p$ . Tous les modèles affines lisses à fibres connexes de  $\mathbb{G}_{m,K}$  sont des  $\mathcal{G}^\lambda$ , et tous les modèles de  $\mu_{p,K}$  sont de la forme  $G_\varphi = \ker(\varphi)$  (ces faits sont classiques).

**Dimension 2.** On veut fabriquer des extensions de  $\mathcal{G}^{\lambda_1}$  par  $\mathcal{G}^{\lambda_2}$ . Or on a un diagramme :

$$(\star\star) \quad \text{Ext}^1(\mathcal{G}^{\lambda_2}, \mathcal{G}^{\lambda_1}) \longleftarrow \text{Hom}(\mathcal{G}_{R/\lambda_1}^{\lambda_2}, \mathbb{G}_{m,R/\lambda_1}) \xleftarrow{\sim} \ker\left(\widehat{W}(R/\lambda_2) \xrightarrow{U} \widehat{W}(R/\lambda_2)\right).$$

$\uparrow$   
suite exacte longue de  $(\star)$

$\uparrow$   
théorie de Sekiguchi-Suwa

Pour expliquer ce diagramme, trois remarques :

(1) Le premier groupe (qui est le centre de notre intérêt) classe les extensions de faisceaux abéliens  $0 \rightarrow \mathcal{G}^{\lambda_2} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}^{\lambda_1} \rightarrow 0$ , automatiquement représentables par un schéma en groupes affine lisse. Il est paramétré par le deuxième groupe à cause de la suite exacte longue de cohomologie de la suite  $(\star)$ .

(2) Le troisième groupe est un groupe de paramètres dans  $R/\lambda_1$  satisfaisant certaines congruences (le symbole  $\widehat{W}$  désigne le complété du schéma en groupes des vecteurs de Witt et l'opérateur  $U$  est une matrice de taille  $(1, 1)$ ). Il est en bijection avec le deuxième groupe via une application qui envoie un jeu de paramètres  $(a_{ij})$  sur une certaine exponentielle de Artin-Hasse généralisée  $E_p(a_{ij}) : \mathcal{G}_{R/\lambda_1}^{\lambda_2} \rightarrow \mathbb{G}_{m, R/\lambda_1}$ .

(3) On peut exhiber un ensemble de congruences sur les paramètres qui caractérise le fait que l'isogénie

$$\begin{pmatrix} p & -1 \\ 0 & p \end{pmatrix} : \mathbb{G}_{m, K}^2 \longrightarrow \mathbb{G}_{m, K}^2, \quad (x_1, x_2) \longmapsto (x_1^p, x_2^p x_1^{-1})$$

s'étend en une isogénie  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{(p)}$  (le schéma en groupes  $\mathcal{E}^{(p)}$  est uniquement déterminé). Le noyau  $G_\varphi$  est fini plat de degré  $p^2$ , extension de  $G_{\lambda_1}$  par  $G_{\lambda_2}$ . Je crois (mais ce n'est pas important pour nous) que tous les modèles affines lisses à fibres connexes de  $\mathbb{G}_{m, K}^2$  sont des  $\mathcal{E}$ . De plus (ce fait est dû à Tossici) tous les modèles de  $\mu_{p^2, K}$  sont des  $G_\varphi$ .

**Dimension  $n \geq 3$ .** Le diagramme  $(\star\star)$  a un analogue. Le troisième groupe est remplacé par un groupe

$$\ker \left( \widehat{W}(R/\lambda_n)^{n-1} \xrightarrow{U^{n-1}} \widehat{W}(R/\lambda_n)^{n-1} \right)$$

où  $U^{n-1}$  est une matrice de taille  $(n-1, n-1)$ .

Pour un modèle arbitraire de  $\mu_{p^n, K}$ , on sait définir les valuations  $l_i = v(\lambda_i)$  qui mesurent la « ramification » du schéma en groupes. Elles forment une suite décroissante  $l_1 \geq \dots \geq l_n$ .

**Théorème (Mézard, R., Tossici, 2011).**

\* Il existe un ensemble explicite de congruences sur les paramètres qui caractérise le fait que l'isogénie de Kummer  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, x_2^p x_1^{-1}, \dots, x_n^p x_{n-1}^{-1})$  s'étend en une isogénie  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{(p)}$ .

\* Si  $R$  est complet à corps résiduel parfait, tout modèle de  $\mu_{p^3, K}$  pour lequel  $l_1 \geq pl_3$  est isomorphe à un « groupe de Kummer »  $G_\varphi = \ker(\varphi)$ .

**Remarques.** (i) Nous conjecturons que tous les modèles de  $\mu_{p^n, K}$  sont des groupes de Kummer  $G_\varphi$ , sans hypothèse ni sur  $R$  ni sur les  $l_i$ . Nous pensons maintenant pouvoir attaquer cette conjecture plutôt par des méthodes directes qu'avec l'aide de la classification de Breuil-Kisin.

(ii) À l'heure actuelle, notre preuve du théorème consiste à décrire les modules de Breuil-Kisin des modèles de  $\mu_{p^3, K}$  et à établir une bijection entre ensembles de paramètres. Un point très délicat est que du côté Sekiguchi-Suwa les paramètres vivent dans l'anneau d'inégales caractéristiques  $R$ , alors que du côté Breuil-Kisin ils vivent dans l'anneau d'égalité caractéristiques  $k[[u]]$ . Sur la page suivante, un tableau donne une idée de la comparaison. L'hypothèse  $l_1 \geq pl_3$  dans le théorème est simplement une hypothèse qui nous permet de mener à bout les (lourds) calculs.

**Breuil-Kisin**

**Sekiguchi-Suwa**

$$k[[u]]$$

→

$$R$$

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i$$

↦

$$a^* = \sum_{i=0}^{\infty} [a_i] \pi^i$$

$$A = \begin{pmatrix} u^{l_1} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u^{l_2} & a_{23} \\ 0 & 0 & u^{l_3} \end{pmatrix} \mapsto A^* = \begin{pmatrix} [\pi^{l_1}] & [a_{12}^*] & [a_{13}^*] \\ 0 & [\pi^{l_2}] & [a_{23}^*] \\ 0 & 0 & [\pi^{l_3}] \end{pmatrix}$$

**A**

$$a_{12}^p \equiv 0 \pmod{u^{l_2}}, a_{23}^p \equiv 0 \pmod{u^{l_3}}$$

$$a_{12}^{*p} \equiv 0 \pmod{\pi^{l_2}}, a_{23}^{*p} \equiv 0 \pmod{\pi^{l_3}}$$

**B**

$$u^e a_{12} + u^{l_1} E_1 - u^{e-(p-1)l_1} a_{12}^p \equiv 0 \pmod{u^{pl_2}}$$

$$u^e a_{23} + u^{l_2} E_1 - u^{e-(p-1)l_2} a_{23}^p \equiv 0 \pmod{u^{pl_3}}$$

$$p a_{12}^* - \pi^{l_1} - \frac{p}{\pi^{(p-1)l_1}} a_{12}^{*p} \equiv 0 \pmod{\pi^{pl_2}}$$

$$p a_{23}^* - \pi^{l_2} - \frac{p}{\pi^{(p-1)l_2}} a_{23}^{*p} \equiv 0 \pmod{\pi^{pl_3}}$$

**C**

$$a_{12} - u^{l_1-l_2} a_{23} \equiv 0 \pmod{u^{l_3}}$$

???

**D**

$$u^{l_2} a_{13}^p - a_{12}^p a_{23} \equiv 0 \pmod{u^{l_2+l_3}}$$

$$\pi^{l_2} a_{13}^{*p} \equiv a_{23}^* a_{12}^{*p} \pmod{\pi^{l_2+l_3}}$$

**E**

$$u^e a_{13} + a_{12} E_1 + \mathbb{S}_1(u^e a_{12}, u^{l_1} E_1) + u^{l_1} E_2$$

$$-u^{e-(p-1)l_1} a_{13}^p - \frac{u^e a_{12} + u^{l_1} E_1 - u^{e-(p-1)l_1} a_{12}^p}{u^{pl_2}} a_{23}^p \equiv 0 \pmod{u^{pl_3}}$$

$$\frac{p}{\pi^{(p-1)l_1}} a_{13}^{*p} \equiv p a_{13}^* - a_{12}^* - a_{23}^* p \frac{p a_{12}^* - \pi^{l_1} - \frac{p}{\pi^{(p-1)l_1}} a_{12}^{*p}}{\pi^{pl_2}} \pmod{\pi^{pl_3}}$$