Réduction stable tordue pour les revêtements galoisiens aux mauvaises caractéristiques

Matthieu Romagny

Exposé à Versailles (20.03.2007), Nantes (29.03.2007) et Rennes (07.06.2007)

1 Motivations

$\rightarrow$ Comprendre le π_1 des courbes lisses (affines ou projectives) en caractéristique $p > 0$.

Rappel 1 : Grothendieck a calculé la partie première à p du groupe fondamental par un argument de déformation. Le groupe fondamental complet, lui, ne dépend plus seulement de la topologie, ce que l'on voit déjà pour les courbes elliptiques.

Rappel 2 : Raynaud a démontré la conjecture d'Abhyankar qui dit quels groupes finis apparaissent comme groupes de Galois de revêtements de la droite projective ramifiés seulement à l'infini. Ici c'est un argument de dégénérescence ([1]).

Dans la suite on déplace légèrement le problème. On fixe G un groupe fini ; on est amené à comprendre les G-revêtements $Y \to X$, et en particulier leurs dégénérescences. (Derrière ces mots se trouvent, concrètement, des espaces de modules projectifs.)

2 Ce qui est connu et ce qui pose problème

Soit $n = |G|$.

En caractéristique $p \nmid n$ le stabilisateur G_y en un point $y \in Y$ est cyclique et l'action de G_y sur le tangent $T_{Y,y}$ est fidèle. On a une réduction « stable » vers des revêtements galoisiens de courbes stables $Y \to X$ tels que en tout point double y, les caractères du stabilisateur G_y sur les espaces tangents aux branches en y vérifient $\chi_1\chi_2 = 1$. (On a supposé que G_y préserve les branches pour simplifier.) Les anneaux de déformations universels de G-revêtements sont lisses (l'espace de modules projectif qui est derrière, ou plutôt le champ, est lisse.) Ceci est dû à Bertin et Ekedahl, indépendamment.

En caractéristique $p \mid n$ ou mixte, il y a plein de problèmes, liés essentiellement à la ramification (présence de ramification supérieure = chaîne de sous-groupes de G_y). Les caractères aux points d'inertie ne sont plus injectifs donc $\chi_1\chi_2 = 1$ tombe à l'eau. Des résultats récents de Bertin et Mézard étudient les déformations de G-revêtements et décrivent aussi précisément que possible les anneaux de déformation. On y voit que l'espace de modules est en général singulier.

De plus on a un principe local-global qui dit que les déformations sont contrôlées par les points fixes ($p \nmid n$) et les points de ramification sauvage dans le cas lisse ($p \mid n$). Dans le cas stable avec $p \mid n$ apparaît le phénomène suivant. Un exemple : $R = \mathbb{Z}_p[\zeta]$, $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur $R[x,y]/xy - \pi$ par $x \mapsto x/(x+\zeta)$ et $y \mapsto \zeta y + \pi$. (Poser $z = y + 1$ pour voir μ_p.) C'est pathologique du point de vue des déformations (principe local-global à l'eau), et on n'a plus de définition raisonnable en familles.

[1] Plus précisément, pour la preuve, il construit un revêtement en caractéristique 0 (là, le π_1 est connu) puis étudie une dégénérescence en courbe stable en caractéristique p. Parmi les composantes irréductibles de cette courbe stable, il exhibe un revêtement qui répond à sa question.

3 Réduction stable tordue

Rappelons qu'une *courbe (semi-stable) tordue (au sens d'Abramovich-Vistoli)* sur une base S est un champ $\mathcal{X}$ dont l'espace modulaire grossier X est une courbe semi-stable (ordinaire), tel que $\mathcal{X} \to X$ est un isomorphisme sauf en les points doubles $x \in X$. En x, étale localement sur S, la courbe X a une équation $uv = \pi^m$; on demande à avoir $\mathcal{X} = [\mathrm{Spec}(R[g,h]/(gh - \pi^a))/\mu_b]$ pour certains a, b tels que $ab = m$ (et R est le hensélisé de S).

Définissons un *G-revêtement à base tordue sur S* comme étant un triplet $(Y \to \mathcal{X}, \mathcal{G} \to \mathcal{X}, G \times_S \mathcal{X} \to \mathcal{G})$. Ici,

- Y est une courbe stable, $\mathcal{X}$ est une courbe tordue, et $Y \to \mathcal{X}$ est un morphisme fini, surjectif, plat de degré n.
- $\mathcal{G}$ est un sous-schéma en groupes de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$, fini plat de degré n.
- $G \times_S \mathcal{X} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de $\mathcal{X}$-schémas en groupes qui, pour tout $s \in S$, induit un isomorphisme sur les sections globales $G = G(\mathcal{X}_s) \simeq \mathcal{G}_s(\mathcal{X}_s)$.

Par ex. un G-revêtement $Y \to X$ entre courbes lisses est un G-revêtement à base tordue. Pout toute la suite de l'exposé nous notons R, K, k, π un AVD.

Théorème ($G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: Abramovich, G quelconque : Romagny)
Soit $Y_K \to X_K$ un G-revêtement de courbes projectives lisses sur K. Alors, après une extension finie $R \to R'$, il existe un G-revêtement à base tordue

$$(Y \to \mathcal{X}, \mathcal{G} \to \mathcal{X}, G \times_R \mathcal{X} \to \mathcal{G})$$

sur R, de fibre générique isomorphe à $Y_K \to X_K$. Ce modèle est unique.

Voyons comment on construit ce modèle stable à base tordue.

La courbe Y. Après une extension finie $R \to R'$, il existe un modèle stable Y pour Y_K. Par unicité de ce modèle, l'action de G s'étend à Y. Soit $X = Y/G$ qui est une courbe semi-stable. Le morphisme de quotient

$$\pi : Y \to X$$

est plat au-dessus du lieu lisse, mais en général pas au-dessus des points doubles.

La courbe $\mathcal{X}$. C'est en ces points doubles qu'on tord X en une courbe $\mathcal{X} \to X$, pour rendre le morphisme plat. Soit donc un point double $x \in X_k$. Soit y un point de Y au-dessus de x, localement $\mathcal{O}_{Y,y} = R[s,t]/(st - \pi^n)$. La structure locale de $Y \to X$ est $u = s^d\mu$ et $v = t^d\nu$ où $d = [k(y) : k(x)]$, μ, ν sont des unités dans $\mathcal{O}_Y$. (On vérifie que $m = dn$ et $\mu\nu = 1$.) On définit $Z = \mathrm{Spec}(R[g,h]/(gh - \pi^n))$ et $\mathcal{X} = [Z/\mu_d]$. Ce twisting est minimal pour que $Y \to X$ se relève en un morphisme plat $Y \to \mathcal{X}$: pour qu'il existe $Y \to \mathcal{X}$ il faut que $b|d$, et pour avoir la platitude il faut que $b = d$. On vérifie que ce relevé est G-équivariant.

Le groupe $\mathcal{G}$. Le point difficile du théorème est le suivant : l'image schématique $\mathcal{G}$ de $G_{\mathcal{X}} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$ est un schéma en groupes fini plat sur $\mathcal{X}$.

Notons qu'il n'est même pas clair que $\mathcal{G}$ soit un schéma en groupes.

Rappeler l'exemple précédent et faire apparaître $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et μ_p. Ici le groupe ne s'étend pas au point double sans twisting. Après twisting il s'étend en α_p.

Insister sur cette différence majeure : maintenant $\mathcal{G}$ bouge sur $\mathcal{X}$.

4 Preuve sur un ouvert R-dense

Nous allons nous contenter de survoler la preuve de la première étape : le résultat est vrai sur un ouvert R-dense de $\mathcal{X}$.

Le problème est local donc on peut se placer dans un ouvert d'une composante irréductible de $\mathcal{X}_k$ (precisement $V = \mathcal{X}$ privé de toutes les comp. irréd. de $\mathcal{X}_k$ sauf une). On montre alors plus précisément que sur un ouvert dense, $\mathcal{G}$ est constant i.e. provient d'un schéma en groupes fini plat sur R.

On pourrait peut-être s'en sortir avec le th. de platitude générique, mais pour la partie de la preuve que je n'expose pas, il est crucial de montrer que $\mathcal{G}$ est constant sur un ouvert R-dense.

Le candidat à être ce schéma en groupes est l'image schématique de $G \to \mathrm{Aut}_R(V)$. Mais on est sur un ouvert $V \subset Y$, non projectif, donc ce Aut n'existe pas comme schéma... Problème. Le deuxième résultat que je veux mentionner est le suivant.

> **Théorème :** Soit Y un R-schema de type fini, séparé, plat, pur, à fibre spéciale soit réduite, soit de Cohen-Macaulay. Soit G un R-schéma en groupes propre et plat, et $G \to \mathrm{Aut}_R(Y)$ une action. On suppose que le noyau de G_k sur Y_k est fini. Alors l'adhérence schématique de G dans le faisceau fppf $\mathrm{Aut}_R(Y)$ est représentable par un R-schéma en groupes plat et de type fini.

Plutôt que la définir, disons que l'adh. sch. de $G_K \subset F \otimes K$ dans un foncteur F est caractérisée par le fait que c'est un sous-foncteur $G \subset F$, plat sur R, avec $G \otimes K \simeq G_K$.

Voici ce que c'est que la pureté (Gruson-Raynaud) : sur un AVDH de base, ca veut dire essentiellement qu'il y a un recouvrement ouvert affine de Y avec des anneaux de fonctions qui sont des R-modules libres.

Idée de la preuve : supposons G fini pour simplifier (c'est le cas qui nous intéresse) et supposons R hensélien. Si Y est pur, la famille de ses SSF $Z_\lambda \subset Y$ qui sont finis plats sur R est universellement schématiquement dominante. On montre alors une propriété de somme amalgamée :

$$\begin{tikzcd}
\amalg Z_{\lambda,K} \arrow[r] \arrow[d] & Y_K \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\amalg Z_\lambda \arrow[r] \arrow[drr] & Y \arrow[dr, dotted] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Pour chaque λ, le faisceau $\mathrm{Hom}(Z_\lambda, Y)$ est représentable. Soit G_λ l'image schématique de G dedans. Si $Z_\lambda \subset Z_\mu$, on a $G_\mu \to G_\lambda$. On pose $G' = \varprojlim G_\lambda$ qui est entier plat sur R. Comme on a un morphisme dominant $G \to G'$, en fait G' est fini. Appliquant l'argument de somme amalgamée avec

$$Y \leftarrow G' \times Y \qquad , \qquad Z_\lambda \leftarrow G' \times Z_\lambda$$

on montre que G' agit universellement fidèlement sur Y. Donc c'est l'adhérence schématique.