

Réduction en p de revêtements de courbes de genre supérieur

Bordeaux 6.1.2012, Montpellier 19.1.2012, Rennes 9.2.2012, Leiden 5.3.2012, Paris 13
23.3.2012

Matthieu Romagny

Il s'agit d'un travail en commun avec Dan Abramovich (à paraître à Algebra and Number Theory). Je vais présenter un résultat de réduction stable comme l'indique le titre de l'exposé, mais je voudrais donner un peu de motivation avant de l'énoncer.

1 Genre 1 : la courbe modulaire $X_0(N)$

La courbe modulaire $X_0(N)$ classe les isogénies cycliques $E \rightarrow E'$ d'ordre N entre courbes elliptiques (resp. généralisées). L'espace de modules grossiers correspondant sur $\mathbb{Z}[1/N]$ est un schéma lisse, mais aux premiers $p \mid N$ n'est pas même plat (en tout cas si p^2 divise N). Pour obtenir un bon modèle sur \mathbb{Z} , il faut modifier la définition et ceci a été fait par Katz et Mazur (et resp. Conrad pour l'adaptation aux courbes elliptiques généralisées) en utilisant une idée de Drinfeld pour dire ce qu'est une isogénie N -cyclique en caractéristique $p \mid N$. L'idée est de dire qu'étant donné un sous-schéma en groupes fini plat $G \subset E$ (resp. $G \subset E_{\text{lisse}}$ dans le cas généralisé), une section P de G est un *générateur* si la somme des diviseurs de Cartier $P, 2P, \dots, NP$ est égale à G . Une définition équivalente et mieux adaptée pour la suite est de dire que le morphisme « norme » de l'algèbre localement libre \mathcal{O}_G est donné par $\mathcal{N}(f) = f(P)f(2P) \dots f(NP)$. Notez que par exemple, en caractéristique p la section neutre de μ_p ou α_p est un générateur.

2 Genre ≥ 2 : quel analogue ?

Pour les courbes de genre $g = g(Y) \geq 2$, on a de bonnes raisons (sur lesquelles je ne m'étends pas cette fois) de vouloir construire un espace de modules pour les revêtements étales cycliques $Y \rightarrow Y'$. Le même problème que précédemment se pose pour la définition en p . Une piste est de penser aux objets en car. p comme des dégénérescences d'objets en car. nulle. Si l'on part d'un corps valué K de car. nulle, d'anneau d'entiers $R = \mathcal{O}_K$, et d'une K -isogénie $E_K \rightarrow E'_K$ de courbes elliptiques de noyau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq G_K \subset E_K$, alors après extension finie K'/K il existe un modèle stable E/R et l'adhérence schématique de G_K dans E est un R -schéma en groupes G qui est Drinfeld-cyclique ; c'est cela qui a mené à la notion de cyclicité.

Si on a un revêtement $Y_K \rightarrow Y'_K$ avec $g = g(Y_K) \geq 2$, alors on peut encore considérer le modèle stable Y/R . Mais bien sûr Y_K n'est pas un groupe et le noyau G_K ne se plonge pas dedans. Par contre il peut se voir dans $\text{Aut}_K(Y_K)$, mais ici la différence majeure entre les cas $g = 1$ et $g \geq 2$ se manifeste car $\text{Aut}_R(Y)$ est *non ramifié*. Ceci implique qu'il n'y a pas beaucoup de place dedans pour prendre une adhérence schématique, et en fait l'adhérence du groupe constant G_K dans $\text{Aut}_R(Y)$ est le groupe constant G_R . Mais ceci ne nous satisfait pas du tout, car $Y \rightarrow Y' = Y/G$ n'est pas un torseur, et en général il n'existe pas (même en changeant les modèles Y, Y') d'extension en un torseur.

Ce qu'il se passe, disons pour G d'ordre p , c'est que localement en un point double $xy = a$, $a \in R$ on a une action qui devient *triviale* sur une branche mais pas sur l'autre, par exemple $(x, y) \mapsto (\zeta_p x + a, y(\zeta_p + y)^{-1})$. Les groupes cycliques infinitésimaux de Drinfeld apparaissent, mais localement. Pour les voir, une idée est de tirer en arrière G via $Y'_K \rightarrow \text{Spec}(K)$ et de prendre l'adhérence de $G_{Y'_K}$ dans le groupe $\text{Aut}_{Y'}(Y)$ qui lui est ramifié ! Avec encore un peu de travail, on arrive à une définition satisfaisante (je note maintenant X au lieu de Y' pour me conformer aux notations de l'article).

Définition. Un p -torseur stable est un objet

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \curvearrowright & \nearrow & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

- où - \mathcal{X} est une courbe tordue,
- \mathcal{G} est un \mathcal{X} -schéma en groupes de degré p muni d'un générateur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{G}$,
- Y est une courbe DM-stable de genre $g \geq 2$ qui est un \mathcal{G} -torseur au-dessus de \mathcal{X} .

Remarques. (i) On va voir tout de suite ce que c'est qu'une courbe tordue.

(ii) On s'est restreint au cas de degré p car sinon la propriété de torseur n'a aucune chance d'avoir lieu.

(iii) Les p -torseurs stables forment un champ algébrique de Deligne-Mumford $ST_{p,g}$ sur \mathbb{Z} .

(iv) Le générateur interdit les formes tordues de groupes étales : c'est un isomorphisme si $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ est étale. Partant de là, on n'a pas de mal à montrer que $ST_{p,g} \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe au champ « de Hurwitz » compactifié classique classifiant les revêtements admissibles de courbes stables.

(v) On peut ajouter à la définition des points marqués et de la ramification, mais pour simplifier on ne le fait pas ici.

Dans la suite de l'exposé, nous voulons expliquer la preuve de l'énoncé de réduction stable suivant qui montre que $ST_{p,g}$ est un champ algébrique *propre* :

Théorème. Soit K un corps à valuation discrète. Alors tout p -torseur stable Y_K/\mathcal{X}_K s'étend, après extension finie de K , en un unique p -torseur stable Y/\mathcal{X} sur R .

3 Courbes tordues

La notion de courbe tordue est due à Abramovich, Olsson et Vistoli. Une courbe tordue est un champ algébrique, mais nous n'aurons pas besoin de connaître beaucoup de choses sur les champs algébriques pour en parler. Il nous suffira de savoir qu'un champ algébrique est quelque chose comme un schéma, avec une topologie de Zariski, une topologie étale, pour lequel presque toutes les propriétés géométriques et algébriques habituelles des schémas ont du sens. De la même façon qu'un schéma, un champ algébrique \mathcal{X} peut être décrit par ses points $\mathcal{X}(S)$, avec une petite pointe de piquant qui est que les $\mathcal{X}(S)$ sont des catégories au lieu d'être des ensembles. Par exemple, si X est un schéma muni de l'action d'un groupe plat et de présentation finie G , on peut définir un champ algébrique $\mathcal{X} = [X/G]$ tel que $\mathcal{X}(S)$ est la catégorie des paires $(E \rightarrow S, E \rightarrow X)$ composées d'un G -torseur et d'un morphisme G -équivariant. Les morphismes sont les morphismes évidents; ce sont tous des isomorphismes. On peut voir une telle paire comme une orbite de G , mais *détachée* de son image dans X , ce qui justifie un peu la notation $[X/G]$ dans la mesure où cela correspond à l'espace des orbites. S'il existe un schéma quotient X/G , on dispose d'un morphisme $[X/G] \rightarrow X/G$ appelé *l'espace modulaire grossier* du champ. Si de plus l'action de G sur X est libre, on a $[X/G] \simeq X/G$.

Une *courbe tordue* est un champ algébrique (d'Artin) qui possède un espace de modules grossier $\pi : \mathcal{X} \rightarrow X$ où X est une courbe nodale et π est un isomorphisme sauf au voisinage étale de certains points doubles où \mathcal{X} ressemble (c'est-à-dire : est isomorphe étale-localement sur la base et sur X) au quotient champêtre $[Z/\mu_j]$ où Z est le point double $uv = t$ avec t une fonction sur la base et μ_j agissant par $z.(x, y) = (zx, z^{-1}y)$.

4 Esquisse de preuve du th.

Pour simplifier, nous supposerons Y_K lisse. On peut aussi supposer R complet à corps résiduel algébriquement clos. On considère (après extension finie de K) son modèle stable Y et $X = Y/G$.

1. Construction de $Y \rightarrow \mathcal{X}$. Considérons un point double $y \in Y$ de la fibre spéciale. Il possède un voisinage étale d'équation $st = \pi^n$ pour certains paramètres s, t . Son image $x \in X$ possède un voisinage étale d'équation $ab = \pi^m$. Notons d le degré de $Y \rightarrow X$ sur un voisinage de y , de sorte que dans \mathcal{O}_Y on a $a = s^d \mu$ et $b = t^d \mu^{-1}$ pour un certain $\mu \in \mathcal{O}_Y^\times$, et $m = nd$. On cherche une courbe tordue $\mathcal{X} \rightarrow X$; au-dessus de x , une telle courbe est de la forme $[Z/\mu_j]$ avec Z d'équation $uv = \pi^i$. La condition que X est l'espace modulaire grossier, c'est-à-dire que $X = Z/\mu_j$, dit que $a = u^j$, $b = v^j$ et $m = ij$.

S'il existe un morphisme $Y \rightarrow \mathcal{X}$ qui relève $Y \rightarrow X$, alors par définition du champ

quotient on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

où $E \rightarrow Y$ est un μ_j -torseur et $E \rightarrow Z$ est équivariant. Sur les anneaux de fonctions, le morphisme $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_E$ doit envoyer u sur un élément dont la puissance j -ième est égale à $s^d \mu$ (car $u^j = a = s^d \mu$). Ceci implique que $d = je$ et μ est la puissance j -ième d'un $w \in \mathcal{O}_E^\times$. Réciproquement si ces conditions sont vérifiées alors le toseur $E \rightarrow Y$ défini par l'équation $w^j = \mu$ et la flèche $E \rightarrow Z$ telle que $u \mapsto s^e w$, $v \mapsto t^e w^{-1}$ fournissent un diagramme commutatif comme souhaité.

Le morphisme $Y \rightarrow \mathcal{X}$ est plat si et seulement si $E \rightarrow Z$ est plat (par descente). Par le critère de platitude par fibres, ceci a lieu lorsque la fibre de $E \rightarrow Z$ en le point double est de degré d . Or ce degré vaut $\dim k[s, t, w]/(s^e, t^e, w^j - \bar{\mu})$ i.e. je^2 . C'est égal à d ssi $e = 1$, i.e. $j = d$ et $i = n$.

2. Platitude de $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$. On note \mathcal{G} l'adhérence schématique de \mathcal{G}_K dans $\text{Aut}_x(Y)$. En restriction à l'anneau local d'un point générique de la fibre spéciale, qui est un anneau de valuation discrète, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ est un schéma en groupes plat, à stabilisateur de degré $< p$ donc trivial. Ainsi le morphisme habituel $\mathcal{G} \times_x Y \rightarrow Y \times_x Y$, $(g, y) \mapsto (y, gy)$ est un isomorphisme en codimension 1. Notons $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ le S_2 -ifié, qui est un morphisme propre et dominant (pour la S_2 -ification voir par exemple EGA IV, seconde partie, § 5.10 et notamment prop. 5.10.16). Alors $\mathcal{G}' \times_x Y \rightarrow Y \times_x Y$ est un isomorphisme en codimension 1 entre deux schémas S_2 , donc c'est un isomorphisme. Il en découle par descente que $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{X}$ est plat, et alors il est facile de voir que la multiplication de \mathcal{G}_K s'étend et fait de \mathcal{G}' un schéma en groupes. Celui-ci agit librement sur $Y \rightarrow \mathcal{X}$ d'où une immersion fermée $\mathcal{G}' \rightarrow \text{Aut}_x(Y)$. Finalement $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ est une immersion fermée dominante, donc un isomorphisme, cqfd.

Remarques. (i) Au voisinage d'un point double, typiquement \mathcal{G} ressemble au groupe de Tate-Oort d'équation $ac = p$ qui est étale si $a \neq 0$ et de type multiplicatif si $c \neq 0$. Fibre à fibre, il est constant sur des ouverts irréductibles (les schémas en groupe d'ordre p n'ont pas de modules!).

(ii) Pour des groupes d'ordre p^n avec $n \geq 2$, on peut définir \mathcal{G} de la même manière et c'est toujours un groupe fini plat en-dehors des points doubles de la fibre spéciale. Le groupe \mathcal{G}_k varie beaucoup avec le point x . Il n'agit plus librement aux points génériques de la fibre spéciale (cf exemples de Tossici) donc le raisonnement ci-dessus ne marche plus. Je pense néanmoins que \mathcal{G} est bien plat partout.