Le quotient adjoint sur une base quelconque

Matthieu Romagny

Grenoble (Institut Fourier) le 19 mai 2008, Amiens (LAMFA) le 22 octobre 2008

Le contenu de l'exposé est un travail en commun avec P.-E. Chaput (Nantes).

Soit G un groupe algébrique semisimple sur un corps k et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Nous nous intéressons au *quotient adjoint* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/G$, qui est la variété affine dont les fonctions sont les fonctions $\mathrm{Ad}(G)$-invariantes de $\mathfrak{g}$. Ce quotient a été beaucoup étudié car il renferme beaucoup d'information sur les éléments semisimples et les élément réguliers de $\mathfrak{g}$. Un fait remarquable, dû à Chevalley, est que sur le corps des complexes, le quotient adjoint est un espace affine.

Supposons G déployé, soit T un tore maximal, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie, W le groupe de Weyl. L'inclusion de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$ induit un morphisme $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$. On sait (voir Springer et Steinberg) que si G est adjoint ou si la caractéristique de k est première à $|W|$, alors $\mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ est un isomorphisme. (Corollaire : les classes semisimples sont en bijection avec $\mathfrak{t}/W$.)

Les groupes de Chevalley semisimples sont définis sur $\mathbb{Z}$ et donc existent sur tout schéma de base S. On peut se demander comment se comporte $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ sur S. Restreignons-nous aux groupes simples, par simplicité (!). Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 1 :

- si $G \neq Sp_{2n}$, $n \geq 1$, le morphisme π est un isomorphisme.

- si $G = Sp_{2n}$, le morphisme π est un isomorphisme ssi la base n'a pas de 2-torsion. Sinon, π est schématiquement dominant et au-dessus d'un affine $\mathrm{Spec}(A) \subset S$*, l'anneau de fonction de $\mathfrak{g}/G$ est $A[c_2, \ldots, c_{2n}]$ où les c_{2i} sont les coefficients du polynôme caractéristique.*

La question de décrire π reçoit donc une réponse complète. Ceci améliore les résultats connus y compris dans le cas d'un corps de base.

Il faut noter que la formation de ce quotient ne commute pas au changement de base (nous donnerons des exemples) ce qui rend le résultat plus difficile, bien sûr (sinon il suffirait essentiellement de le démontrer sur $\mathbb{Z}$).

La stratégie classique pour prouver ce résultat est basée sur la non-annulation des différentielles des racines pour les groupes adjoints et l'utilisation du morphisme birationnel $(G/T \times \mathfrak{t})/W \to \mathfrak{g}$.

Sur cette stratégie, nous faisons deux observations. La première est que la non-annulation des différentielles des racines est un phénomène que l'on voit sur le système de racines, et qui n'est pas limité aux groupes adjoints. La seconde est que pour améliorer les résultats connus il faut être plus soigneux avec les raisonnements birationnels, notamment, contrôler le lieu exceptionnel (éléments non réguliers) et raisonner avec des fonctions méromorphes relatives sur S.

1 Groupes de Chevalley

Soit G un groupe de Chevalley déployé simple, T un tore maximal, Z son centre, $X(T)$ le groupe des caractères de T, R son système de racines. On note $Q(R)$ le réseau des racines, $P(R)$ le réseau des poids, i.e. le dual du réseau des coracines. On rappelle que

$$P = X(\widetilde{T}) \quad \text{et} \quad P/Q = X(\widetilde{Z})$$

où $\widetilde{G}$ est l'unique groupe simple simplement connexe associé à R. Le groupe des caractères $M = X(T)$ est un réseau tel que $Q \subset M \subset P$.

Réciproquement partant d'un réseau $Q \subset M \subset P$ on peut considérer le sous-groupe $M/Q \subset P/Q$, puis l'intersection N des noyaux connexes des caractères $\widetilde{Z} \to \mathbb{G}_m$ qui sont dans M/Q, et poser $G(M) = \widetilde{G}/N$. On récupère ainsi le groupe G, et son centre a pour groupe de caractères $X(Z) = M/Q$. En particulier $G(P)$ est la forme simplement connexe, et $G(Q) = \widetilde{G}/\widetilde{Z}$ est la forme *adjointe*, qui a un centre trivial.

Lemme 2 Supposons qu'une racine $\alpha \in R$ est multiple strict d'un poids $\lambda \in P(R)$, i.e. $\alpha = \ell\lambda$ avec $\ell \geq 2$ entier. Alors R est le système de racines C_n, $\ell = 2$ et α est une racine longue.

La démonstration se fait au cas par cas en regardant les diagrammes de Dynkin des systèmes de racines.

Corollaire 3 Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Si $G \neq Sp_{2n}$ ou $car(k) \neq 2$, alors il existe une extension finie K/k et un point $t \in \mathfrak{t}_K$ tel que $d\alpha(t) \neq 0$, pour tout $\alpha \in R$.

En effet, avec les notations ci-dessus, l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{t}$ s'identifie à $M \otimes k$. Donc la forme $d\alpha$ est nulle ssi $\alpha \in pM$, où $p = car(k)$. Par le lemme, si $G \neq Sp_{2n}$ ou $p \neq 2$, ceci ne se produit pas. Quitte à prendre une extension finie K/k, l'espace vectoriel $\mathfrak{t}$ n'est pas réunion des hyperplans $\{d\alpha = 0\}$ d'où la conclusion.

2 Eléments réguliers de l'algèbre de Lie

Soit G un groupe algébrique lisse de dimension d et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour $x \in \mathfrak{g}$ on regarde $ad\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ et son polynôme caractéristique $\chi(x) = t^d + c_1(x)t^{d-1} + \cdots + \delta(x)t^r$ où δ est le premier coefficient non identiquement nul sur $\mathfrak{g}$. Un élément $x \in \mathfrak{g}$ est *régulier* ssi son “centralisateur” $\ker\,(ad\,x)^d$ est de dimension minimale, ssi $\delta(x) \neq 0$; il est *singulier* sinon.

Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont les centralisateur d'éléments réguliers, elles sont toutes conjuguées sous G.

Soit G un groupe de Chevalley simple sur S, non isomorphe à Sp_{2n}, et T un tore maximal. Il est facile de voir que pour $t \in \mathfrak{t}$, on a $\delta(t) = \prod_{\alpha \in R} d\alpha(t)$.

Lemme 4 Le lieu singulier $Sing(\mathfrak{g}) := \{\delta = 0\}$ est un diviseur de Cartier relatif de $\mathfrak{g}$ sur S.

Il suffit de le prouver sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Alors ceci provient du fait que fibre à fibre, δ n'est pas identiquement nul, comme le montre le corollaire 3 et l'expression $\delta(t) = \prod_{\alpha \in R} d\alpha(t)$.

L'action adjointe induit un morphisme $(G/T \times \mathfrak{t})/W \to \mathfrak{g}$.

Lemme 5 Ce morphisme est schématiquement dominant et sa restriction

$$b : (G/T \times Reg(\mathfrak{t}))/W \to Reg(\mathfrak{g})$$

est un isomorphisme.

La première assertion est conséquence facile de la deuxième. Pour la deuxième, b est surjective puisque les centralisateur d'éléments réguliers sont des sous-algèbres de Cartan qui sont toutes conjuguées. Ensuite la clé est de montrer que b est étale, ce qui découle du fait que $G \times Reg(\mathfrak{t}) \to Reg(\mathfrak{g})$ est lisse, et ceci provient de la non-annulation des différentielles des racines dans toutes les fibres sur S.

3 Preuve du théorème 1, cas $G \neq Sp_{2n}$

C'est local sur S donc on peut supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$. On doit montrer que $A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{t}]^W$ est un isomorphisme.

La restriction de l'action adjointe $\varphi : G \times \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ est un morphisme G-équivariant, si G agit par translation sur G, trivialement sur $\mathfrak{t}$, et via Ad sur $\mathfrak{g}$. Soit $f \in A[\mathfrak{g}]$ invariante avec $f|_{\mathfrak{t}} = 0$. Alors $\varphi^*(f)$ est invariante, en d'autres termes $\varphi^*(f) = 1 \otimes (f|_{\mathfrak{t}}) = 0$. Or par le lemme 5, φ est schématiquement dominant donc $f = 0$.

Maintenant soit $f \in A[\mathfrak{t}]^W$. Elle induit une fonction sur $\mathfrak{t}$ et donc une fonction $f_1(g, x) = f(x)$ sur $G/T \times \mathfrak{t}$. On note encore f_1 la fonction induite sur $(G/T \times \mathfrak{t})/W$. Par le lemme 5 on a une fonction méromorphe relative $h = f_1 \circ b^{-1}$ sur $\mathfrak{g}$. On écrit $h = k/\delta^m$ avec k non divisible par δ. Supposons $m \geq 1$. Par définition, pour tout $s \in S$ la fonction h_s est définie sur $\mathfrak{t}_s$ et égale à f_s, donc $\delta_s|_{\mathfrak{t}}$ divise $k_s|\mathfrak{t}$. Un lemme démontre qu'alors δ_s divise k_s. Un autre lemme affirme que le lieu des $s \in S$ où une fonction (ici k) possède un pôle le long d'un diviseur de Cartier relatif (ici $\{\delta = 0\}$) est un ouvert et fermé dans S. On en déduit que δ divise k, contradiction. Donc $m \leq 0$ et la fonction $h = k/\delta^m$ est définie sur tout $\mathfrak{g}$.

4 Exemples

Le premier exemple est le cas exceptionnel du théorème 1 :

Théorème 6 *Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine et $G = Sp_{2n,S}$. Le morphisme $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ est un isomorphisme ssi la base S est sans 2-torsion. L'anneau d'invariants $A[\mathfrak{g}]^G$ est $A[c_2, \ldots, c_{2n}]$ où les c_{2i} sont les coefficients du polynôme caractéristique. La formation du quotient $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/G$ commute à tout changement de base.*

Sur le tore, les fonctions c_{2i} sont les fonctions symétriques des carrés des coordonnées. Dans l'anneau d'invariants $A[\mathfrak{t}]^W$, les fonctions symétriques des coordonnées elles-mêmes, une fois multipliées par un élément de 2-torsion $x \in A$, sont des invariants supplémentaires.

Le second exemple montre que la formation du quotient $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/G$ ne commute pas toujours au changement de base :

Théorème 7 *Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine et $G = SO_{2n,S}$. L'anneau d'invariants $A[\mathfrak{g}]^G$ est $A[c_2, \ldots, c_{2n}, pf, x(\pi_1)^{\epsilon_1} \ldots (\pi_{n-1})^{\epsilon_{n-1}}]$ où les c_{2i} sont les coefficients du polynôme caractéristique, les π_i sont les coefficients du pfaffien caractéristique, $x \in A$ est de 2-torsion, et $\epsilon_i = 0$ ou 1. La formation du quotient $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/G$ commute au changement de base $f : S' \to S$ ssi $f^*S[2] = S'[2]$, où $S[2]$ est le sous-schéma fermé défini par l'idéal de 2-torsion.*

On peut montrer un résultat analogue pour le groupe $G = SO_{2n+1,S}$.