Quelques propriétés de la cohomologie ℓ-adique

Matthieu Romagny

Rencontre ANR ARIVAF, 26-27 mars 2012, Bordeaux

Dans cet exposé, nous présentons quelques propriétés de la cohomologie ℓ-adique utiles pour l'exposé de J. Tong sur les caractères du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Soient p un premier, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, et $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}$ le sous-corps à q éléments.

Soit X une variété quasi-projective et lisse sur $\mathbb{F}$, de dimension pure d. La variété X est définie sur un certain $\mathbb{F}_q$; elle est alors munie d'un Frobenius F qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et est $x \mapsto x^q$ sur les fonctions. On supposera fait le choix d'une telle structure ; bien sûr X est aussi défini sur $\mathbb{F}_{q^n}$, et un tel autre choix donnerait un autre Frobenius.

Soit $\Gamma \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(X)$ un monoïde agissant sur X. Un exemple important est celui où X est la courbe de Drinfeld, i.e. la courbe affine plane d'équation $xy^q - yx^q = 1$, avec action du monoïde $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \times (\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle)$ où $\langle F \rangle$ est le monoïde engendré par Frobenius.

Soit ℓ un premier distinct de p et $K/\mathbb{Q}_\ell$ une extension finie. On pose

$$H^i_c(X, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim H^i_{\text{ét},c}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

et $H^i_c(X) = H^i_c(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes K$.

On rappelle que pour $d \geq 1$, le d-ième twist de Tate d'un faisceau étale de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F} \otimes \mu_n^{\otimes d}$. Pour les faisceaux ℓ-adiques, cette définition s'étend immédiatement par passage à la limite.

1 Quelques propriétés de $H^i_c(X)$

Théorème. (1) *Soit I l'ensemble des composantes irréductibles de X. On suppose que Γ est un groupe ou $\Gamma = \langle F \rangle$. Alors, l'application trace de la dualité de Poincaré est un isomorphisme de $K\Gamma$-modules*

$$H^{2d}_c(X, K(d)) = K[I]$$

où dans le membre de droite, Γ agit trivialement sur K si c'est un groupe, F agit par multiplication par q^d, et $K[I]$ est la représentation de permutation sur I.

(2) *Si $U \subset X$ est un ouvert Γ-stable et $Z = X \setminus U$, il existe une suite exacte longue*

$$\dots \longrightarrow H^i_c(U) \longrightarrow H^i_c(X) \longrightarrow H^i_c(Z) \longrightarrow H^{i+1}_c(U) \longrightarrow \dots$$

(3) *On a $H^i_c(\mathbb{A}^d) = K$ si $i = 2d$ et $= 0$ sinon.*

Preuve. (1) Il est clair qu'il suffit de regarder le cas X irréductible, on suppose donc que I est un singleton. Regardons maintenant l'action de Γ sur K. Soit $\gamma \in \Gamma$, qui définit un endomorphisme de X de degré fini égal à 1 lorsque Γ est un groupe et de degré q^d si $\gamma = F$. Alors le morphisme induit par γ sur $H^{2d}_c(X, K(d))$ est la multiplication par le degré, ce qui correspond à ce qu'affirme le théorème.

(2) On part de la suite ouvert-fermé en cohomologie étale (Milne III.1.30, page 94) et on passe à la limite.

(3) On part de l'isomorphisme d'algèbres graduées $K[T]/(T^{m+1}) \simeq H^*_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m)$ qui envoie T sur la classe d'un hyperplan dans $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m)$, par l'application classe de cycle (voir Milne VI.9.7, page 270). On utilise la suite ouvert-fermé avec $\mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^m \hookleftarrow \mathbb{P}^{m-1}$ et une récurrence.

2 Cohomologie et quotients

Soit $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe distingué du monoïde Γ (ce qui signifie que $\gamma\Delta = \Delta\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$). Alors le monoïde quotient Γ/Δ agit sur $Y := X/\Delta$.

Théorème. On a un isomorphisme de $K(\Gamma/\Delta)$-modules $H^i_c(X/\Delta) = H^i_c(X)^\Delta$.

Rappelons le formalisme général pour montrer un tel résultat. Soit X un schéma, G un groupe fini d'automorphismes, $\pi : X \to Y = X/G$ le quotient. Notons Ab (resp. Ab_G) la catégorie des groupes (resp. des $\mathbb{Z}G$-modules) abéliens et Ab_X (resp. $\mathrm{Ab}_{X,G}$) la catégorie des faisceaux (resp. des G-faisceaux) abéliens sur X. On dispose des foncteurs de sections globales $\Gamma_X : \mathrm{Ab}_X \to \mathrm{Ab}$, $\Gamma_Y : \mathrm{Ab}_Y \to \mathrm{Ab}$, du foncteur de points fixes $\Gamma^G : \mathrm{Ab}_G \to \mathrm{Ab}$, et des foncteurs :

$$\Gamma^G_X : \mathrm{Ab}_{X,G} \to \mathrm{Ab}, \quad \mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})^G,$$

$$\pi^G_* : \mathrm{Ab}_{X,G} \to \mathrm{Ab}_Y, \quad \mathcal{F} \mapsto (\pi_*\mathcal{F})^G.$$

On a $\Gamma^G_X = \Gamma_Y \pi^G_* = \Gamma^G \Gamma_X$ d'où deux suites spectrales

$$H^p(Y, R^q\pi^G_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}_G(X, \mathcal{F}) \qquad \text{et} \qquad H^p(G, H^q(X, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}_G(X, \mathcal{F}).$$

On sait que le foncteur π_* est exact, par le théorème de changement de base propre dans le cas d'un morphisme fini. Supposons que $\mathcal{F}$ est un faisceau constant de groupes abéliens sur lequel l'ordre g de G est inversible ; alors le foncteur de points fixes sous G est exact (l'opération de moyenne sur G montre que c'est exact à droite). Il s'ensuit que $R^q\pi^G_*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ si $q = 0$ et est nul sinon, et que $H^p(G, H^q(X, \mathcal{F})) = H^q(X, \mathcal{F})^G$ si $p = 0$ et est nul sinon. La première suite spectrale dégénère en des isomorphismes

$$H^p(Y, \mathcal{F}) = H^p_G(X, \mathcal{F}),$$

la seconde dégénère en des isomorphismes

$$H^q(X, \mathcal{F})^G = H^q_G(X, \mathcal{F}),$$

d'où des isomorphismes $H^p(Y, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F})^G$.

Dans ce qui précède, il est clair que si G est distingué dans un monoïde Γ qui agit sur X, alors l'isomorphisme est Γ/G-équivariant. Revenons à la preuve du théorème. Pour simplifier, supposons que l'ordre δ de Δ est premier à ℓ. Alors, on peut appliquer la méthode précédente pour les faisceaux étales $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ puis passer à la limite.

3 Traces

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on note $\mathrm{Tr}(\gamma, H^i_c(X))$ la trace de l'endomorphisme induit sur $H^i_c(X)$ et on pose

$$\mathrm{Tr}^*(\gamma) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \, \mathrm{Tr}(\gamma, H^i_c(X)).$$

Une version simple de la formule de Lefschetz est :

Théorème. *On a* $\mathrm{Tr}^*(F) = |X^F| = |X(\mathbb{F}_q)|$.

Corollaire. *Si γ est d'ordre fini, on a* $\mathrm{Tr}^*(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

Voici la preuve, suivant Deligne et Lusztig. Comme γ commute avec n'importe quelle puissance F^n de Frobenius, on voit que $F^n \circ \gamma$ s'identifie au morphisme de Frobenius relatif au choix du corps de définition $\mathbb{F}_{q^n}$. On peut donc appliquer la formule de Lefschetz qui montre que $\mathrm{Tr}^*(F^n\gamma) \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, regardons les endomorphismes induits par F^n et γ sur les espaces

$H^i_c(X)$. Les valeurs propres de F dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sont des éléments $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, et celles de γ peuvent être numérotées α_λ. Alors $\mathrm{Tr}^*(F^n\gamma) = \sum \alpha_\lambda \lambda^n \in \mathbb{Z}$, pour tout n donc pour tout automorphisme τ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on a

$$\sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda^n = \sum_\lambda \tau(\alpha_\lambda)\tau(\lambda)^n = \sum_\lambda \tau(\alpha_{\tau^{-1}(\lambda)})\lambda^n.$$

Comme les fonctions $n \mapsto \lambda^n$ sont linéairement indépendantes (non-nullité du déterminant de Vandermonde), on trouve $\tau(\alpha_\lambda) = \alpha_{\tau(\lambda)}$ pour tout λ. En particulier, pour $n = 1$ on voit que $\mathrm{Tr}^*(\gamma) = \sum \alpha_\lambda \lambda$ est invariant par tout $\tau \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, donc $\mathrm{Tr}^*(\gamma) \in \mathbb{Q}$. Comme de plus $\mathrm{Tr}^*(\gamma)$ est un entier algébrique puisque c'est une somme de racines de l'unité, finalement $\mathrm{Tr}^*(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

Voici quelques propriétés supplémentaires de la trace.

Théorème. (1) *Si $U \subset X$ est un ouvert Γ-stable et $Z = X \setminus U$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\mathrm{Tr}^*_X(\gamma) = \mathrm{Tr}^*_Z(\gamma) + \mathrm{Tr}^*_Z(\gamma)$.*
(2) *Si $s, u \in \Gamma$ avec s d'ordre fini premier à p, u d'ordre fini puissance de p et $su = us$, alors $\mathrm{Tr}^*_X(su) = \mathrm{Tr}^*_{X^s}(u)$.*
(3) *Soit $\mathcal{K}_0(K\Gamma)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $K\Gamma$-modules, et*

$$H^*_c(X) = \sum (-1)^i [H^i_c(X)] \in \mathcal{K}_0(K\gamma)$$

la caractéristique d'Euler de X. Si Γ est un groupe fini et T est un tore qui agissent sur X en commutant, alors on a $H^*_c(X) = H^*_c(X^T)$.

Théorème. *Les valeurs propres de F sur $H^i_c(X)$ sont des entiers algébriques de la forme $\omega q^{j/2}$ où j est un entier naturel tel que $0 \leq j \leq i$ et ω est un nombre algébrique dont tous les conjugués complexes sont de module 1. En particulier, F est un automorphisme de $H^i_c(X)$.*