La démonstration du Théorème de Fermat : huit ans de solitude

Matthieu Romagny

Université Pierre et Marie Curie, Paris 6

http ://www.institut.math.jussieu.fr/FS2008/

http ://www.math.jussieu.fr/∼romagny/

Pierre de Fermat (1601-1665)

Aujourd'hui, il y a :

- 4000 mathématiciens en France,

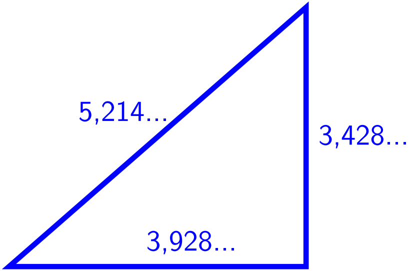
- 1500 revues au monde, publiant 250000 articles par an.

Autant de travaux publiés après 1950 que pendant toute l'histoire de l'Humanité jusqu'à cette date !

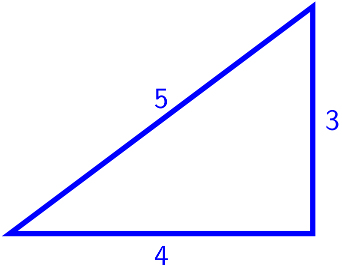
Pourquoi tant de maths ?

Car toute réponse apportée pose dix questions nouvelles.

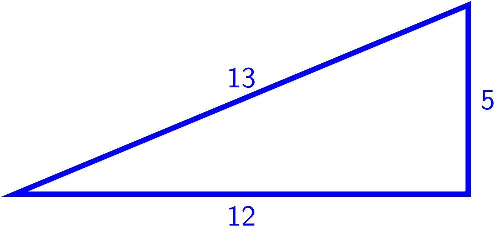
Théorème de Pythagore



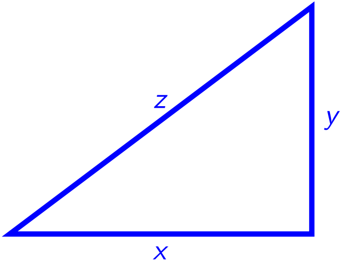
$$(3,428...)^2 + (3,928...)^2 = (5,214...)^2$$



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$5^2 + 12^2 = 13^2$$



Trouver x, y, z entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$?

$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$$

Admettons qu'on peut se ramener au cas où x est pair, y et z impairs.

On pose $z + y = 2a$, $z - y = 2b$, $x = 2c$.

On trifouille l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \text{équivaut à} \qquad c^2 = ab \quad .$$

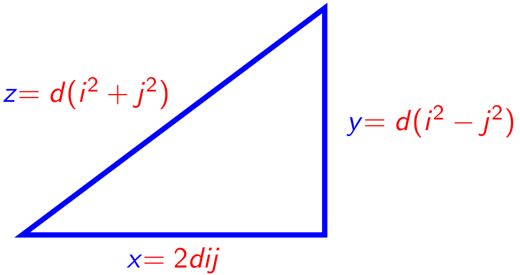
$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2} \qquad \text{équivaut à} \qquad \boxed{c^2 = ab}$$

Admettons qu'alors on doit avoir $a = i^2$ et $b = j^2$. Donc $c = ij$.

En revenant à x, y, z on trouve

$$x = 2\,d\,ij \qquad y = d(\,i^2 - j^2\,) \qquad z = d(\,i^2 + j^2\,)\,.$$

Pour tous les entiers d, i, j on obtient une solution :



Trouver x, y, z entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$?

On les a tous trouvés.

Des exemples :

• si $d = 1$, $i = 2$, $j = 1$ on trouve $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.
• si $d = 1$, $i = 3$, $j = 2$ on trouve $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$.

• si $d = 1$, $i = 29$, $j = 12$ on trouve $x = 696$, $y = 697$, $z = 985$.

Existe-t-il des solutions telles que $x = y$?

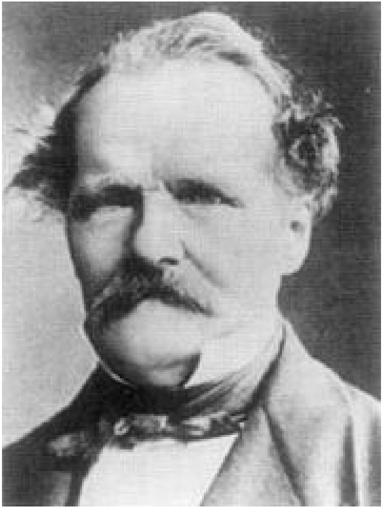
Pythagore a démontré que non !

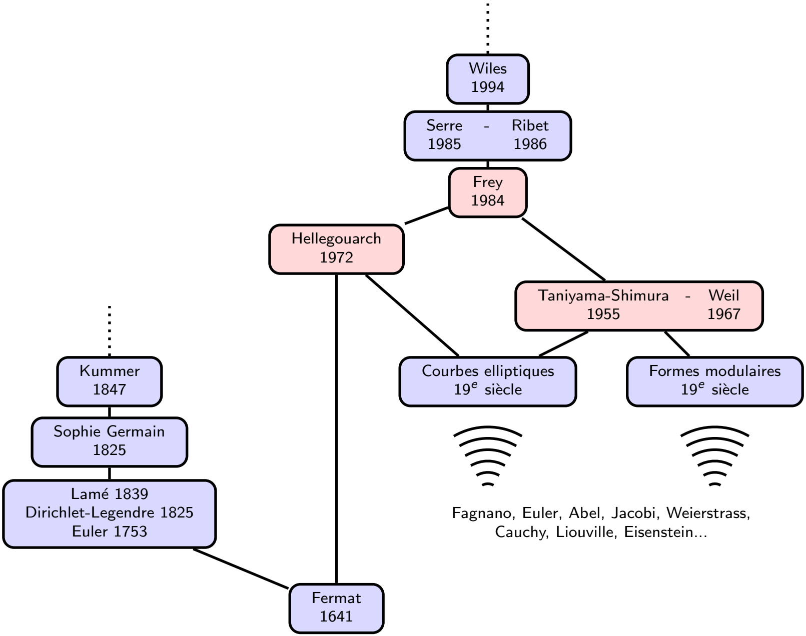
Existe-t-il beaucoup de solutions telles que $x + 1 = y$?
ou $x + 2 = y$?

Fermat affirme que pour $n = 3, 4, \dots$, l'équation

n'a pas de solution.

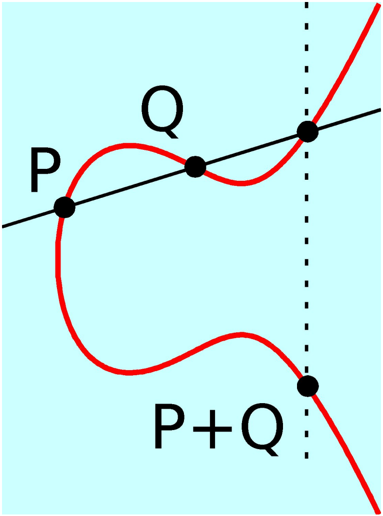
Kummer (1810-1893)



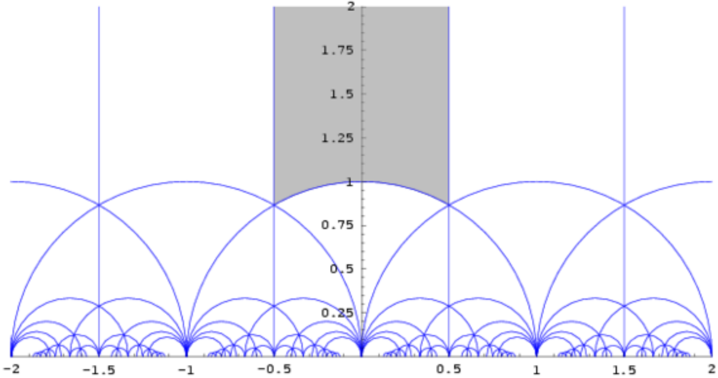


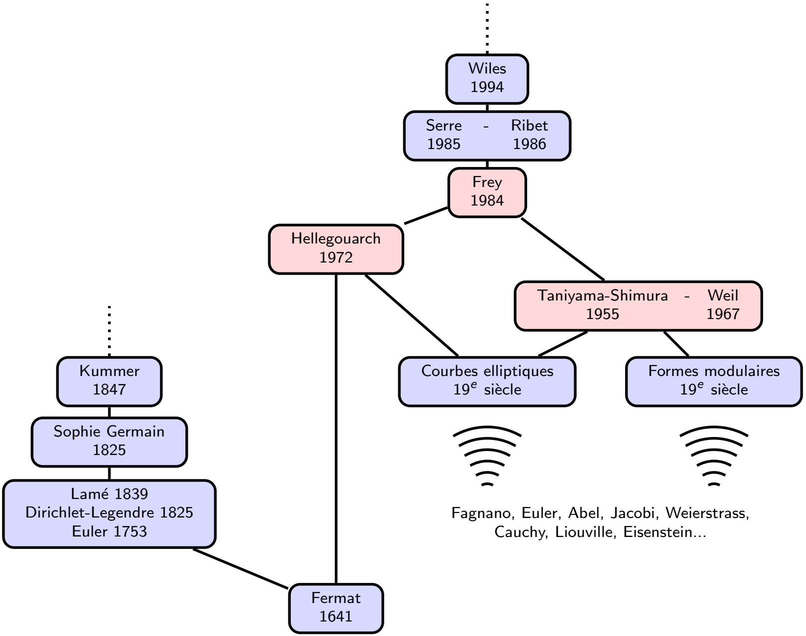
Wiles
1994
Serre - Ribet
1985 1986
Frey
1984
Hellegouarch
1972
Taniyama-Shimura - Weil
1955 1967
Courbes elliptiques
19^e siècle
Formes modulaires
19^e siècle
Fagnano, Euler, Abel, Jacobi, Weierstrass,
Cauchy, Liouville, Eisenstein...
Kummer
1847
Sophie Germain
1825
Lamé 1839
Dirichlet-Legendre 1825
Euler 1753
Fermat
1641

Courbe elliptique



Symétries d'une forme modulaire





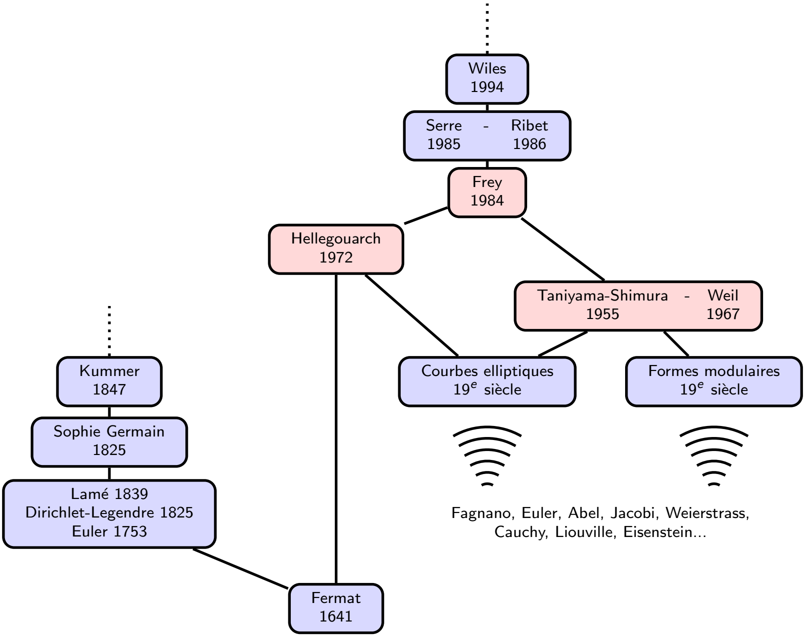
Wiles
1994
Serre - Ribet
1985 1986
Frey
1984
Hellegouarch
1972
Taniyama-Shimura - Weil
1955 1967
Courbes elliptiques
19^e siècle
Formes modulaires
19^e siècle
Kummer
1847
Sophie Germain
1825
Lamé 1839
Dirichlet-Legendre 1825
Euler 1753
Fermat
1641
Fagnano, Euler, Abel, Jacobi, Weierstrass,
Cauchy, Liouville, Eisenstein...

La conjecture de Taniyama-Shimura-Weil

relie courbes elliptiques et formes modulaires.

Partant d'une courbe elliptique, pour chaque nombre entier $n \geqslant 1$ on peut considérer le nombre a_n de points de la courbe qui sont « à coordonnées entières » en un certain sens, et fabriquer une fonction $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz}$.

TSW conjecturent que cette fonction f est une forme modulaire.

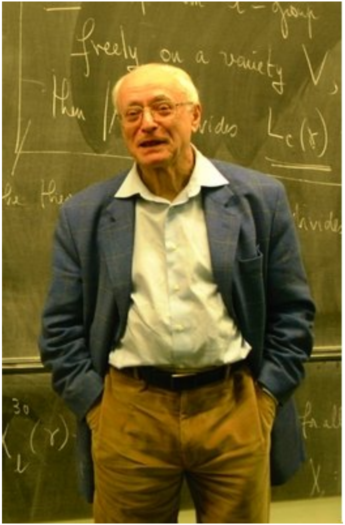

Wiles
1994
Serre - Ribet
1985 1986
Frey
1984
Hellegouarch
1972
Taniyama-Shimura - Weil
1955 1967
Courbes elliptiques
19^{e} siècle
Formes modulaires
19^{e} siècle
Fagnano, Euler, Abel, Jacobi, Weierstrass,
Cauchy, Liouville, Eisenstein...
Kummer
1847
Sophie Germain
1825
Lamé 1839
Dirichlet-Legendre 1825
Euler 1753
Fermat
1641

La courbe de Hellegouarch
nous met la puce à l'oreille.

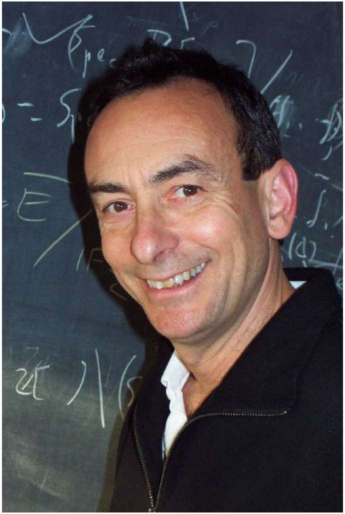
Partant d'une solution de l'équation de Fermat, Yves Hellegouarch construit en 1972 une courbe elliptique qui semble avoir des propriétés bizarres.

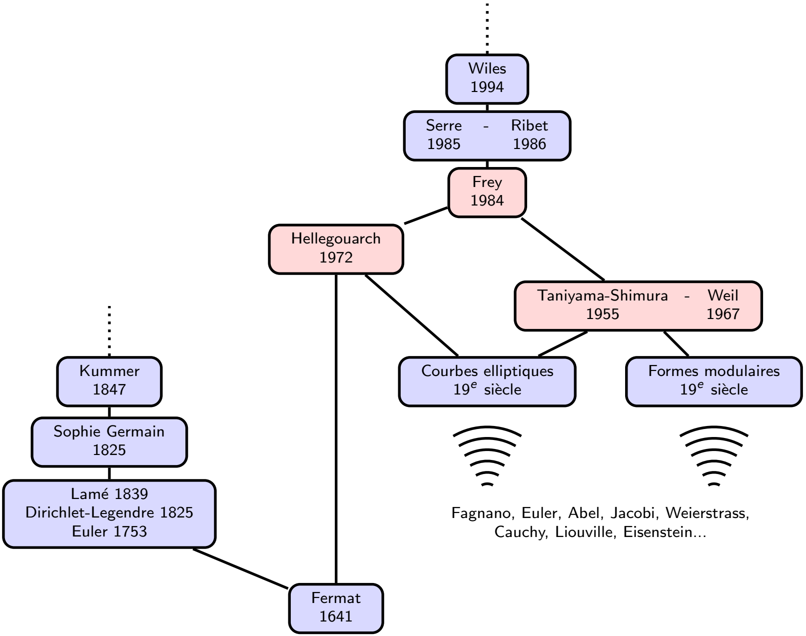
Gerhard Frey (1944-)

Jean-Pierre Serre (1926-)



Ken Ribet (1948-)



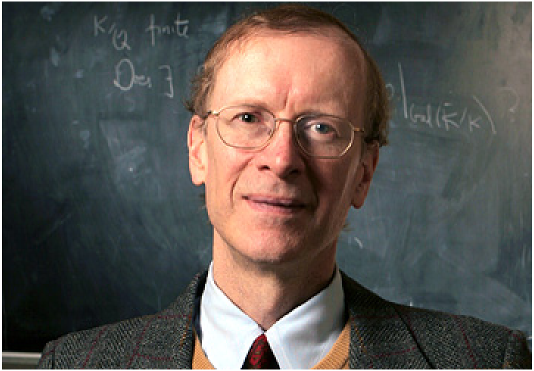

Wiles
1994
Serre - Ribet
1985 1986
Frey
1984
Hellegouarch
1972
Taniyama-Shimura - Weil
1955 1967
Courbes elliptiques
19^e siècle
Formes modulaires
19^e siècle
Fagnano, Euler, Abel, Jacobi, Weierstrass,
Cauchy, Liouville, Eisenstein...
Kummer
1847
Sophie Germain
1825
Lamé 1839
Dirichlet-Legendre 1825
Euler 1753
Fermat
1641

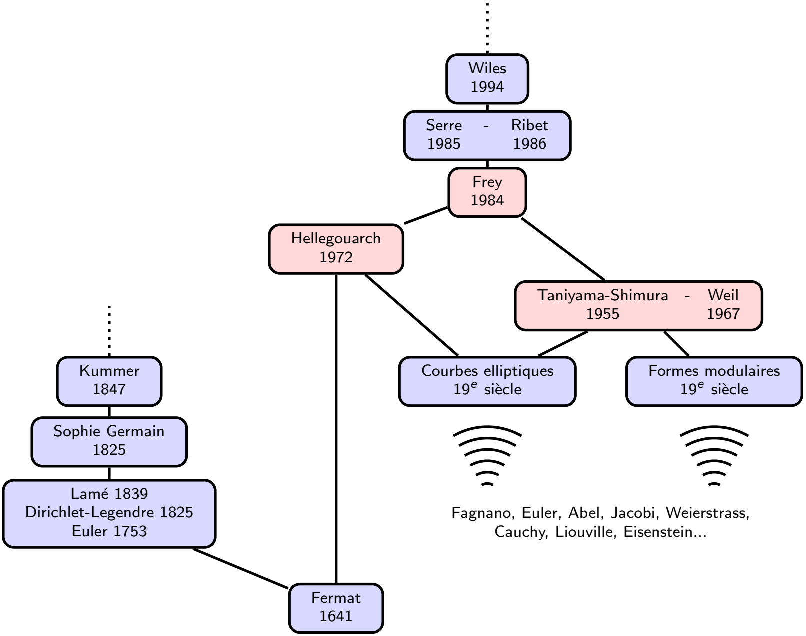
Andrew Wiles (1953-)

Andrew Wiles à la fin de sa conférence de Cambridge en 1993

```
Subject : Fermat Status
Date : 4 Dec 93  01 :36 :50  GMT

              In view of the speculation on the status of my work
on the Taniyama-Shimura conjecture and Fermat's Last Theorem I
will give a brief account of the situation. During the review
process a number of problems emerged, most of which have been
resolved, but one in particular I have not yet settled. The key
reduction of (most cases of) the Taniyama-Shimura conjecture to
the calculation of the Selmer group is correct. However the final
calculation of a precise uppper bound for the Selmer group in the
semistable case (of the symmetric square representation associated
to a modular form) is not yet complete as it stands. I believe
that I will be able to finish this in the near future using the
ideas explained in my Cambridge lectures.

              The fact that a lot of work remains to be done
on the manuscript makes it still unsuitable for release as a
preprint. In my course in Princeton beginning in February I will
give a full account of this work.

Andrew Wiles.
```

Andrew Wiles (1953-)




Wiles
1994
Serre - Ribet
1985 1986
Frey
1984
Hellegouarch
1972
Taniyama-Shimura - Weil
1955 1967
Courbes elliptiques
19^e siècle
Formes modulaires
19^e siècle
Fagnano, Euler, Abel, Jacobi, Weierstrass,
Cauchy, Liouville, Eisenstein...
Kummer
1847
Sophie Germain
1825
Lamé 1839
Dirichlet-Legendre 1825
Euler 1753
Fermat
1641