Réduction d'actions de groupes finis et modèles effectifs

Matthieu Romagny

Exposé à Lille le 12 janvier 2006

Je vais commencer par motiver un peu l'exposé en expliquant les applications en vue, puis je donnerai deux constructions différentes d'un même objet qui sera un *modèle effectif* pour l'action d'un groupe fini.

1 Motivation, exemples

Soit R, K, k un AVD avec $\mathrm{car}(k) = p > 0$.

Soit X_K une K-courbe projective lisse avec action fidèle d'un groupe fini G.

Supposons avoir un modèle $X \to \mathrm{Spec}(R)$ assez sympathique tel que l'action s'étend.

Alors il arrive que G agisse trivialement (ou au moins acquière un noyau) sur X_k !

Ex 1 : $g = 1$ alors E_K a un modèle de Néron $E \to \mathrm{Spec}(R)$, qui n'est pas projectif en général. Par la propriété universelle du modèle de Néron, l'action de G s'étend à E. Par exemple si E_K a bonne réduction alors un modèle régulier minimal donne un modèle de Néron.
Supposons que K est de caractéristique 0 avec $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ agissant par translations. Supposons qu'on est dans le cas de bonne réduction supersingulière, alors l'action sur E_k est triviale ! (Il n'y a pas de point de p-torsion dans E_k.) C'est $E[p]$ qu'il faut regarder : c'est un schéma en groupes fini plat sur R, on a un morphisme dominant $G \to E[p]$ qui est un iso sur K, et surtout $E[p] \hookrightarrow \mathrm{Aut}_R(E)$ universellement (ce qui équivaut à dire que cette flèche est une immersion fermée).

Il faudrait noter G le schéma en groupes sur R, et G_K est sa fibre générique.

Ma motivation est d'étudier la réduction des revêtements galoisiens de courbes $C \to D = C/G$ en genre $g(C) \geq 2$. Par exemple si $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathcal{H}$ est l'espace de modules correspondant sur $\mathbb{Q}_p$, je voudrais savoir, quelle est la réduction de $\mathcal{H}$? Donc, bien que mes résultats s'appliquent aussi à l'exemple 1, je serai plutôt intéressé par le suivant.

Ex 2 : $g \geq 2$ dans ce cas il y a un modèle stable X/R (obtenu après éventuelle extension finie de R). Par unicité du modèle stable l'action de G_K s'étend. Mais s'étend-elle bien ? On va prendre pour modèle de ce qu'on veut l'immersion fermée précédente.

Rappel : soit U un R-schéma de type fini et $V_K \subset U_K$ un sous-schéma fermé, alors il existe un unique sous-schéma $V \subset U$ qui soit plat sur R et de fibre générique V_K, appelé l'*adhérence schématique de V_K dans U*. (C'est tout bêtement l'adhérence de V_K dans U.)

Dans l'exemple 1 il y a un point délicat sur lequel je suis passé rapidement, c'est l'existence de $\mathrm{Aut}_R(E)$, qui nécessite que E soit projective. C'était bien le cas sous l'hypothèse de bonne réduction, mais sinon il y a un problème, et pourtant $E[p]$ existe bien et c'est le modèle qu'on voudrait.

Dans l'exemple 2 le modèle stable est projectif, donc il existe un schéma $\mathrm{Aut}_R(X)$ et G_K est un sous-schéma fermé de la fibre générique $\mathrm{Aut}_K(X_K)$. Considérons $\mathcal{G} :=$ l'adhérence schématique de G_K dans $\mathrm{Aut}_R(X)$. À cause de la platitude de $\mathcal{G}$ on peut montrer que c'est un groupe ! Mais Deligne-Mumford nous dit que $\mathrm{Aut}_R(X)$ est non ramifié et ceci implique que G_R agit non trivialement sur X_k, ou encore que $\mathcal{G} = G_R$. Lorsque p divise $|G|$, il y a un problème qui fait que ce n'est pas satisfaisant : il arrive souvent que certains $h \in G = G_R$ agissent trivialement sur certaines composantes de X_k, ou dit autrement, que l'action de G sur la fibre spéciale n'est pas génériquement libre. Ceci est ennuyeux pour construire un espace de modules, parce que cela fout en l'air la commutation quotient / changement de base, et aussi le principe local-global pour la théorie de déformation. Comme exemple du phénomène que je viens de mentionner citons le théorème dû à Maugeais : *si $\overline{k} = k$ et C est une courbe stable sur k munie d'une action fidèle de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telle que $p_a(C/G) = 0$, alors C se relève en une courbe lisse sur K.*

$\therefore$

Dans l'exemple 1 ci-dessus soit $G = E[p]$ et $E' = E/G$, alors on a un G-torseur $E \to E'$. Une première construction que je vais décrire, dûe à Abramovich, donne une image similaire dans le cas de genre ≥ 2.

Un autre point de vue que je décrirai ensuite, mène à un résultat que j'ai obtenu et qui construit un modèle $\mathcal{G}$ sans hypothèse de projectivité sur X, et d'ailleurs sans hypothèse de dimension non plus. Ceci permet de travailler ensuite localement sur les composantes irréductibles ouvertes du modèle stable. On retrouve alors le résultat d'Abramovich avec des renseignements beaucoup plus précis.
On verra en temps utile ce qu'on entend par *modèle effectif.*

2 Raynaud's group scheme, d'après Abramovich

Dans tout ce paragraphe $X \to \mathrm{Spec}(R)$ est stable à fibre générique X_K lisse, avec action fidèle de G. Cette action s'étend à R et on note $Y = X/G$.

Dans le cas $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, Raynaud prend η point générique d'une composante de X_k, et $\delta = f(\eta)$ (*Spécialisation des revêtements en caractéristique $p > 0$, Ann. ENS 1999*). Alors $U = \mathcal{O}_{Y,\delta}$ est un AVD de même que $V = \mathcal{O}_{X,\eta}$, et G agit sur V par U-automorphismes. De plus $U \to V$ est fini plat donc il existe un schéma $\mathrm{Aut}_U(V)$. Soit $\mathcal{G}$ l'adhérence schématique de G dedans. C'est un schéma en groupes sur U et $\mathrm{Spec}(V) \to \mathrm{Spec}(U)$ est un $\mathcal{G}$-torseur.

(dessin des courbes X et Y, leurs fibres génériques et spéciales, un point générique η d'une composante de X_k et son image δ dans Y_k)

ZZZ : on otient un torseur car le stabilisateur du point η est un sous-groupe de $\mathcal{G}_k$, qui est de rang p, donc trivial ou égal à $\mathcal{G}_k$, mais ce dernier cas est exclu car sinon l'action serait triviale. Mais si $|G|$ est plus grand il peut se produire des horreurs du genre suivant. On regarde $\alpha_p \rtimes \mu_p$ agissant sur $k[z]$ par $z \mapsto az + b$. Il y a génériquement un stabilisateur non tivial, le quotient $X_k \to Y_k$ est alors de degré p...

Abramovich propose d'étendre $\mathcal{G}$ en un schéma en groupes sur Y_{sm} de la façon suivante. Il prend pour $\mathcal{G}$ l'adhérence schématique de $G_{Y_{\mathrm{sm}}}$ dans

$$\mathrm{Aut}_{Y_{\mathrm{sm}}}(X_{\mathrm{sm}})$$

Problème : on obtient un schéma $\mathcal{G} \to Y_{\mathrm{sm}}$ mais Y_{sm} est de dimension 2 et on n'a plus la platitude de $\mathcal{G}$. Avec la platitude, on perd la structure de groupe... Cependant Y_{sm} est régulier, or CM sur régulier est plat. Soit $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ la $S2$-clôture de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}'$ est $S2$ donc CM donc plat sur Y_{sm}. On montre alors que c'est un groupe, et que hors des sections de branchement le revêtement $X_{\mathrm{sm}} \to Y_{\mathrm{sm}}$ est un $\mathcal{G}'$-torseur.

∴

On a obtenu un *modèle effectif* pour l'action au sens suivant : un Y-schéma en groupes $\mathcal{G}$, avec un morphisme dominant $G_Y \to \mathcal{G}$ qui est un iso sur la fibre générique, tel que $\mathcal{G}$ agit sur X compatiblement à G_Y, et que $X \to Y$ est génériquement un torseur.

Et aux points doubles ? Et si p^2 divise $|G|$?...

3 Un autre point de vue

Oublions maintenant les courbes. Soit X plat de type fini sur R, avec action de G, fidèle sur X_K. On affinera un peu (un tout petit peu) les hypothèses bientôt.

Disons qu'un *modèle effectif* pour l'action est un schéma en groupes $\mathcal{G}$ fini plat sur R avec un morphisme dominant $G_R \to \mathcal{G}$ qui est un iso sur K, tel que $\mathcal{G}$ agit sur X compatiblement à G et universellement fidèlement. Cette dernière condition peut s'exprimer par exemple en disant que $\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_R(X)$ est un monomorphisme de foncteurs (mieux, de faisceaux fppf).

ZZZ : Ici $\mathcal{G}$ est sur R (donc de dimension 1) et X n'est pas projectif !!

Bien que $\mathrm{Aut}_R(X)$ ne soit pas un schéma, on peut définir l'adhérence de G_K dans ce foncteur et les conditions demandées imposent l'unicité de $\mathcal{G}$. Je ne m'étends pas là-dessus, dans la suite nous allons nous concentrer sur l'existence.

Theorème : Soit G un R-schéma en groupes fini plat, soit X un schéma plat de type fini sur R avec une action de G. Supposons que X est recouvert par des ouverts affines G-stables U_i tels que G_K agit fidèlement sur $U_{i,K}$. Alors si X_k est réduit, il existe un modèle effectif.

La preuve s'appuie sur le fait que dans le cas où X est projectif, le modèle effectif existe car alors $\mathrm{Aut}_R(X)$ est représentable par un schéma, voir la 1ère partie de l'exposé. Le cas général va s'en déduire en recouvrant X par ses sous-schémas finis (donc projectifs !) plats sur R. On fait cela en trois étapes :

(1) On considère la famille des fibres spéciales Z_k des sous-schémas fermés $Z \subset X$ qui sont finis plats sur R, G-stables et tels que G_K agit fidèlement sur Z_K. On montre que cette famille est schématiquement dense dans X_k : compte tenu de l'hypothèse que X_k est réduit cela revient à montre que la famille en question est dense au sens ordinaire. C'est le seul endroit où cette hypothèse intervient.

(2) Pour chaque $Z \subset X$ il existe un modèle effectif $\mathcal{G}_Z$, comme on vient de le dire. On montre alors que parmi ces Z il en existe un, disons $\mathfrak{Z}$, tel que $\mathcal{G}_{\mathfrak{Z}}$ agit sur tous les Z.

(3) On montre enfin (c'est le point délicat) que $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{\mathfrak{Z}}$ agit sur X, utilisant le point (1). C'est le modèle effectif cherché.