

Dimension cohomologique et images directes supérieures à support compact en cohomologie étale

Matthieu Romagny

Rencontre ANR ARIVAF, 30 mai – 1er juin 2011, Paris

Dans cet exposé, nous présentons trois résultats importants de cohomologie étale :

- 1) la borne $2 \dim(X)$ pour la dimension cohomologique des schémas de type fini sur un corps séparablement clos,
- 2) la borne $\dim(X)$ pour ceux qui sont affines,
- 3) la définition des images directes supérieures à support compact.

Les résultats 2) et 3) sont des conséquences du théorème de changement de base propre. Nous nous concentrerons sur les preuves de 1) et 3).

Tous les faisceaux considérés sont des faisceaux *étales, abéliens, de torsion*. On ne considère que des groupes de cohomologie *étale*. Si x est un point d'un schéma X , on note $\mathcal{O}_{X,x}$ son anneau local pour la topologie de Zariski et $\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \mathcal{O}_{X,x}^{\text{hs}}$ son anneau local pour la topologie étale.

1 Dimension cohomologique

Soient X un schéma et ℓ un premier. On appelle *ℓ -dimension cohomologique de X* notée $\text{cd}_\ell(X)$ le plus grand entier n (éventuellement infini) tel que $m > n$ implique $H^m(X, F) = 0$ pour tout faisceau de ℓ -torsion F sur X . Par exemple, si X est un schéma strictement local on a $\text{cd}_\ell(X) = 0$. Nous voulons mentionner deux résultats importants.

1.1 Majoration $\text{cd}_\ell(X) \leq 2 \dim(X)$

Pour obtenir la majoration qui nous intéresse, on va se ramener au fait suivant en cohomologie galoisienne, dû à Tate.

Lemme 1 (Tate). *Si K/k est une extension de corps de degré de transcendance n , alors $\text{cd}_\ell(K) \leq \text{cd}_\ell(k) + n$.*

Preuve. Voir Serre, *Cohomologie galoisienne*, II, 4.2. □

Nous utiliserons aussi le résultat suivant, de nature plus technique.

Lemme 2. *Si A est un anneau local intègre, K son corps de fractions, B son hensélisé ou son hensélisé strict, B_{tot} l'anneau total des fractions, alors le morphisme $B \otimes_A K \rightarrow B_{\text{tot}}$ est un isomorphisme.*

Noter que B est réduit mais pas nécessairement intègre, car la hensélisation (stricte) sépare les branches : si A est l'anneau local du point singulier dans la cubique nodale complexe $y^2 = x^2(x+1)$, son hensélisé strict a pour équation $(y-ux)(y+ux) = 0$ avec $u = \sqrt{1+x} \in B$. (N.B. On dit que A est *géométriquement unibranche* si A^{hs} est intègre.)

Preuve. L'anneau B est une limite d'algèbres locales-étales $C = (A[X]/(P))_q$ avec $P \in A[X]$ et q premier. Les morphismes d'anneaux locaux $C \rightarrow B$ sont plats donc fidèlement plats, et en particulier injectifs. Ceci montre que si $x \in C$ est diviseur de 0 alors son image $\tilde{x} \in B$ l'est aussi. Passons à la preuve proprement dite. On note S_R l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro d'un anneau R . Comme $A \rightarrow B$ est plat, l'anneau localisé $B \otimes_A K$ s'injecte dans B_{tot} et il suffit de voir que c'est surjectif. Pour cela il suffit de montrer que pour tout $\tilde{x} \in S_B$, il existe $\tilde{y} \in B$ tel que $\tilde{x}\tilde{y} \in S_A$. Soit $C = (A[X]/P)_q$ une A -algèbre locale-étale telle que \tilde{x} est représenté par un

élément $x = u/v$ avec $u, v \in A[X]/P$ et $v \notin q$. On a alors $vx = u$ qui est annulé par un polynôme unitaire $R \in A[X]$. De plus, comme on l'a vu plus haut, $\tilde{u} = \tilde{v}\tilde{x} \in S_B$ entraîne $u \in S_C$. On peut donc choisir $R(X) = XS(X) + a$ avec un coefficient constant a non nul, donc élément de S_A . Alors l'image \tilde{y} de $vS(vx)$ dans B répond à notre question, puisque $\tilde{x}\tilde{y} = vxS(vx) = -a$. \square

Théorème. *Si X est un schéma de type fini sur un corps séparablement clos k , on a :*

$$\text{cd}_\ell(X) \leq 2 \dim(X).$$

La fin de cette sous-section est consacrée à la preuve. On note $\text{cd} = \text{cd}_\ell$. On montre par récurrence sur $n = \dim(X)$ que pour tout faisceau de ℓ -torsion F et pour tout $m > 2n$ on a $H^m(X, F) = 0$. Pour $n = 0$, étant donné que $\text{cd}(X \amalg Y) = \max(\text{cd}(X), \text{cd}(Y))$ et que $\text{cd}(X) = \text{cd}(X_{\text{red}})$, on peut supposer que X est spectre d'un corps K , extension finie de k . D'après le lemme 1 on a donc $\text{cd}(X) = \text{cd}(k) = 0$ et l'inégalité désirée est vraie.

Supposons maintenant $n \geq 1$.

1) *On se ramène au cas où X est intègre.* Pour cela, on a envie de considérer le morphisme $\pi : X' \rightarrow X$ où $X' = X_1 \amalg \dots \amalg X_r$ est la somme des composantes irréductibles de X . Donnons deux arguments différents : dans le premier on utilise une suite spectrale qui calcule la cohomologie sur X' , et dans le second une suite spectrale qui calcule la cohomologie sur X .

a) l'argument le plus simple : on pose $F' = \pi^*F$ et on considère la suite spectrale de Leray $E_2^{pq} = H^p(X, R^q\pi_*F') \Rightarrow H^{p+q}(X', F')$. Pour tout $x \in X$, notons \tilde{X} son schéma strictement local et \tilde{X}' la préimage dans X' . Alors \tilde{X}' est somme disjointe des schémas strictement locaux \tilde{X}_i pour lesquels $x \in X_i$. D'après le calcul des germes d'une image directe supérieure (Milne III.1.15) on a $(R^q\pi_*F')_{\tilde{x}} = \oplus H^q(\tilde{X}_i, F') = 0$ pour tout $q \geq 1$, car $\text{cd}(\tilde{X}_i) = 0$. Alors la suite spectrale dégénère en des isomorphismes $H^p(X, \pi_*F') = H^p(X', F')$. Par ailleurs on a une suite exacte $0 \rightarrow F \rightarrow \pi_*F' \rightarrow G \rightarrow 0$ avec G supporté en dimension $\leq n-1$, donc utilisant l'hypothèse de récurrence, la suite exacte longue donne un isomorphisme $H^m(X, F) = H^m(X, \pi_*F')$ qui est isomorphe à $H^m(X', F')$ comme on l'a vu.

b) l'argument le plus naturel : comme $X' \rightarrow X$ est propre et surjectif, c'est un morphisme de descente cohomologique universelle (SGA4 tome 2, Exp. Vbis, prop. 4.3.2) donc il existe une suite spectrale de descente $E_1^{pq} = H^q(X'_p, F'_p) \Rightarrow H^{p+q}(X, F)$ où l'on a noté X'_p le produit fibré $(p+1)$ -uplé de X' au-dessus de X et F'_p la préimage de F sur X'_p . (Cette suite spectrale relève de la théorie de la descente cohomologique de Deligne ; c'est une manière de calculer la cohomologie sur X à la Čech, mais à l'aide d'un recouvrement propre *non plat* ; le fait que ceci soit possible est une conséquence du théorème de changement de base propre.) Supposant que pour tous $p \geq 1$ et $q > 2(n-p)$ on a $H^q(X'_p, F'_p) = 0$, on voit facilement que la suite spectrale dégénère en un isomorphisme $H^m(X', F') = H^m(X, F)$. Or X'_p est la somme des intersections $(p+1)$ -uplés de composantes de X . Lorsque les composantes sont toutes distinctes l'intersection est de dimension $\leq n-p$, ce qui donne la bonne annulation de cohomologie, mais le problème est que dans X'_p figurent aussi des intersections de composantes non distinctes, par exemple toutes égales ! C'est la cohomologie de Čech « non ordonnée » et on peut contourner le problème en prenant de la cohomologie de Čech « ordonnée », ce qui revient à utiliser un espace simplicial X'' tel que X''_p est la réunion des intersections $(p+1)$ -uplés de composantes disjointes. À ce sujet, on pourra consulter l'exemple 7.8 des notes de Conrad [Co1].

2) *On se ramène au cas où F est de la forme g_*F , où $g : \eta \rightarrow X$ est l'inclusion du point générique η .* Le morphisme d'adjonction $F \rightarrow g_*g^*F$ est un isomorphisme en η , donc il s'insère dans une suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow g_*g^*F \rightarrow C \rightarrow 0$ avec K et C supportés en dimension $\leq n-1$. En introduisant le faisceau $I = \text{im}(F \rightarrow g_*g^*F)$ on forme deux suites exactes courtes dont les suites exactes longues de cohomologie associées fournissent $H^m(X, F) \simeq H^m(X, I) \simeq H^m(X, g_*g^*F)$.

3) On montre que $R^j g_* F$ est supporté en dimension $\leq n - j$, pour tout j . Pour cela, on fixe un point $x \in X$ dont l'adhérence $Y \subset X$ est de dimension $d > n - j$ et on montre que $(R^j g_* F)_{\bar{x}} = 0$. Pour ce calcul de germes, on peut remplacer X par un ouvert affine et donc supposer X, Y affines. Soit $\tilde{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \bar{x}})$. D'après le lemme 2, sa préimage \tilde{X}_η par g est le schéma affine d'anneau $\mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x}} k(X) = Q(\mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}}) = K_1 \times \cdots \times K_r$ où les K_i sont les corps de fractions des anneaux locaux stricts des points génériques des branches passant par x . Ainsi $(R^j g_* F)_{\bar{x}} = \bigoplus_i H^j(K_i, F|_{K_i})$ et nous devons montrer que ceci est nul si $d > n - j$, ou de manière équivalente, si $j > n - d$.

D'après le théorème de Tate (lemme 1), il nous suffira d'exhiber une sous-extension séparablement close $k' \subset K_i$ telle que $\text{degr}(K_i/k') \leq n - d$ pour tout i . Par normalisation de Noether, il existe un morphisme fini $Y' \rightarrow \mathbb{A}_k^d$ qui envoie x sur le point générique η de \mathbb{A}_k^d . Par la propriété universelle de l'anneau des polynômes, ce morphisme s'étend d'ailleurs en $X \rightarrow \mathbb{A}_k^d$. Soient $k' = k(\eta)^{\text{sep}}$ et $X' = X \times_{\mathbb{A}_k^d} \text{Spec}(k')$. En passant aux hensélisés stricts dans l'extension $k(\eta) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^d, \eta} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$, on voit que $\mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}}$ est une k' -algèbre. Il y a donc un morphisme induit $u : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}}) \rightarrow Y'$ comme dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}}) & & & & \\
 \swarrow & & & & \searrow \\
 & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \text{Spec}(k') \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^d
 \end{array}$$

Comme l'extension $k(x)/k(\eta)$ est finie, l'extension $k(x)^{\text{sep}}/k'$ aussi et le point x' , image du point fermé par u , est fermé dans X' . Par ailleurs X' est de dimension $n - d$ sur k' , donc les corps de fonctions de $\mathcal{O}_{X', x'}^{\text{hs}} = \mathcal{O}_{X, x}^{\text{hs}}$ i.e. les K_i ont un k' -degré de transcendance $\leq n - d$, cqfd.

4) On conclut. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $H^i(X, R^j g_* F) = 0$ lorsque $j \geq 1$ et $i > 2(n - j)$. Alors la suite spectrale de Leray $H^p(X, R^q g_* F) \Rightarrow H^{p+q}(k(X), F)$ donne un isomorphisme $H^m(X, g_* F) = H^m(k(X), F)$ pour tout $m > 2n$, et ce dernier groupe est nul par Tate (lemme 1).

1.2 Majoration $\text{cd}_\ell(X) \leq \dim(X)$ dans le cas affine

Théorème. Si X est un schéma affine de type fini sur un corps séparablement clos k , on a :

$$\text{cd}_\ell(X) \leq \dim(X).$$

Il est commode de démontrer un énoncé plus général qui est la version relative, i.e. pour les images directes supérieures pour un morphisme affine $X \rightarrow Y$. (« Si tu ne sais pas démontrer, commence par généraliser ».) On voit sans trop de mal que cette version relative est conséquence d'un second énoncé qui en est une version (étales-)locale au but, dans laquelle Y est le hensélisé strict d'un k -schéma de type fini. On formule aussi un troisième énoncé (Zariski-)local à la source, cas particulier du précédent dans lequel X est un ouvert affine principal de Y . On prouve alors simultanément l'énoncé étale-local sur Y et l'énoncé Zariski-local sur X . Le schéma de preuve est assez compliqué, et utilise le théorème de changement de base propre. On renvoie à Milne [Mil], VI, § 7 pour les détails.

2 Images directes supérieures à support propre

Soient X un schéma de type fini sur un corps k , Z un sous-schéma fermé de X propre sur k , et F un faisceau abélien étale sur X . Le groupe

$$H_Z^0(X, F) = \ker (H^0(X, F) \rightarrow H^0(X \setminus Z, F))$$

est appelé *groupe des sections à supports dans Z* , et le groupe

$$\Gamma_c(X, F) = \bigcup_Z H_Z^0(X, F)$$

est appelé *groupe des sections à support compact* (ou *propre*). Le foncteur $\Gamma_c(X, -)$ est exact à gauche. C'est un bon analogue de la notion topologique correspondante, mais un exemple va nous montrer que ses foncteurs dérivés n'ont pas les propriétés qu'on pourrait en attendre. En effet, si X est affine sur k , ses sous-schémas fermés propres sur k sont finis et on en déduit que $\Gamma_c(X, F) = \bigoplus_{x \in X^0} H_x^0(X, F)$, la somme portant sur l'ensemble X^0 des points fermés. Il s'ensuit que ses foncteurs dérivés sont $R^p \Gamma_c(X, F) = \bigoplus_{x \in X^0} H_x^p(X, F)$. Si X est une courbe affine lisse, le lemme ci-dessous montre que $R^1 \Gamma_c$ est nul et $R^2 \Gamma_c$ énorme.

Lemme. *Soit k un corps algébriquement clos, X une k -courbe lisse, $z \in X$ un point fermé, n un entier premier à la caractéristique de k . Alors, on a :*

- $H_x^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$,
- $H_x^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$,
- $H_x^2(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Preuve. Notons $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit \tilde{X} le hensélisé de X en x , c'est aussi le hensélisé strict, puisque k est algébriquement clos. Par excision (Milne III.1.28) on a $H_x^p(X, M) = H^p(\tilde{X}, M)$ pour tout p . Quitte à remplacer X par \tilde{X} , on peut donc supposer que c'est le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de corps de fractions K . Soit $U = X \setminus x = \text{Spec}(K)$. La suite exacte longue associée à $x \hookrightarrow X \hookrightarrow U$ (Milne III.1.25) fournit :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_x^0(X, M) \longrightarrow H^0(X, M) \longrightarrow H^0(U, M) \longrightarrow H_x^1(X, M) \longrightarrow H^1(X, M) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(U, M) \longrightarrow H_x^2(X, M) \longrightarrow H^2(X, M) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Comme X est strict local on a $\text{cd}(X) = 0$ donc $H^1(X, M) = H^2(X, M) = 0$. Par ailleurs comme M est constant, on a $H^0(X, M) = H^0(U, M) = M$ et la flèche entre les deux est un isomorphisme. Il s'ensuit que $H_x^0(X, M) = H_x^1(X, M) = 0$ et enfin par la théorie de Kummer on obtient $H_x^2(X, M) = H^1(U, M) = K^*/K^{*n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. \square

Remarque. Dans Freitag-Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, pages 80-81, on trouve l'affirmation erronée que $H_x^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

L'idée de Grothendieck pour obtenir des groupes non triviaux et finis est de prendre la cohomologie dans une compactification : le théorème de changement de base assurera que cette opération est raisonnable.

Définition. Un morphisme séparé de type fini $\pi : U \rightarrow S$ est *compactifiable* s'il existe une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ et un morphisme propre $\pi : X \rightarrow S$ tels que $\pi = \bar{\pi} \circ j$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X \\ & \searrow \pi & \downarrow \bar{\pi} \\ & & S \end{array}$$

Lorsque S est quasi-compact et quasi-séparé, l'existence d'une compactification est automatique d'après le théorème suivant (voir [Na1], [Na2], [De], [Lü], [Co2], [Vo]) :

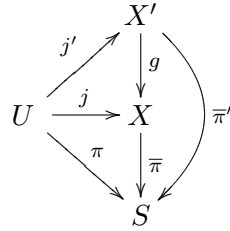
Théorème (Nagata). *Si S est quasi-compact et quasi-séparé, tout morphisme séparé de type fini $U \rightarrow S$ est compactifiable.*

Soit $\pi : U \rightarrow S$ compactifiable et $\pi = \bar{\pi} \circ j$ une factorisation comme ci-dessus.

Définition. On appelle *p -ème image directe supérieure à support compact* le faisceau $R_c^p \pi_* F := R^p \bar{\pi}_*(j_! F)$.

Proposition. *Pour tout faisceau de torsion F sur X , le faisceau $R^p \bar{\pi}_*(j_! F)$ ne dépend pas du choix de la compactification, à un unique isomorphisme près.*

Preuve. Soit $U \xrightarrow{j'} X' \xrightarrow{\bar{\pi}'} S$ une seconde compactification. Quitte à remplacer X' par l'adhérence de U dans $X \times_S X'$, on peut supposer que X' domine X i.e. il existe un morphisme $g : X' \rightarrow X$.



Écrivons la suite spectrale pour le foncteur composé $\bar{\pi}'_* = \bar{\pi}_* \circ g_*$:

$$E_2^{pq} = R^p \bar{\pi}_* R^q g_*(j'_! F) \Rightarrow R^{p+q} \bar{\pi}'_*(j'_! F).$$

D'après le théorème de changement de base propre, les fibres du faisceau $R^q g_*(j'_! F)$ peuvent se calculer dans les fibres de g . Au-dessus de U il n'y a qu'un point dans la fibre, et au-dessus du complémentaire de U on a $j'_! F = 0$. On en déduit que $R^0 g_*(j'_! F) = j_! F$ et $R^q g_*(j'_! F) = 0$ si $q > 0$, donc la suite spectrale donne des isomorphismes $R^p \bar{\pi}'_*(j'_! F) = R^p \bar{\pi}_*(j_! F)$. \square

Remarque. On sait maintenant définir des images directes à support propre sans hypothèse de séparation, cf [LO].

Théorème. 1) *Les $R_c^p \pi_*$ forment un δ -foncteur.*

2) *La formation de $R_c^p \pi_* F$ commute au changement de base.*

3) *Si F est constructible, alors $R_c^p \pi_* F$ aussi.*

4) *Soit $U' \xrightarrow{\pi'} U \xrightarrow{\pi} S$ avec π compactifiable et π' , ou de manière équivalente $\pi \circ \pi'$, compactifiable. Alors il existe une suite spectrale :*

$$E_2^{pq} = R_c^p \pi_*(R_c^q \pi'_* F) \Rightarrow R_c^{p+q} (\pi \pi')_* F.$$

On prendra garde au fait que, comme on l'a vu dans le cas où la base est un corps, les $R_c^p \pi_*$ ne sont pas les foncteurs dérivés de $R_c^0 \pi_*$!

Preuve. Soit $\pi = \bar{\pi} \circ j$ une compactification.

1) Rappelons qu'un δ -foncteur est une suite de foncteurs $R_c^p \pi_*$ telle que toute suite exacte courte donne naissance fonctoriellement à une suite exacte longue de cohomologie. Le foncteur $j_!$ est exact : c'est un adjoint à gauche donc il est exact à droite, et son exactitude à droite est quasiment immédiate. Alors $j_!$ envoie une suite exacte courte sur une suite exacte courte, puis $R^p \bar{\pi}_*$ l'envoie sur une suite exacte longue de cohomologie.

2) Considérons un changement de base $g : S' \rightarrow S$ et un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xrightarrow{\bar{\pi}'} & S' \\ \downarrow k & & \downarrow h & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{\bar{\pi}} & S \end{array}$$

Pour tout faisceau de torsion F sur U , on vérifie facilement que $h^*j_!F = j'_!k^*F$. Dès lors, le théorème de changement de base pour $R^p\bar{\pi}_*$ donne le résultat.

3) Soit F un faisceau constructible et soit $Z = X \setminus U$. Comme $(j_!F)|_Z = 0$ et $(j_!F)|_U = F$, on voit que $j_!F$ est constructible. Donc le résultat découle du théorème de finitude pour les images directes supérieures $R^p\bar{\pi}_*$.

4) L'équivalence entre « π' compactifiable » et « $\pi \circ \pi'$ compactifiable » est un fait élémentaire, démontré dans le lemme qui suit. En choisissant des compactifications ad hoc, la suite spectrale proposée est la suite spectrale d'un foncteur composé pour ces compactifications. Le détail (Milne VI.3.2) n'est ni très difficile ni très éclairant et nous l'omettons. \square

Lemme. *Soient deux morphismes de schémas $U' \xrightarrow{\pi'} U \xrightarrow{\pi} S$ avec π compactifiable. Alors π' est compactifiable si et seulement si $\pi \circ \pi'$ l'est.*

Preuve. Le « si » est facile, montrons le « seulement si ». Soit $j' : U' \hookrightarrow X'$ une immersion ouverte dans un schéma X' propre sur S . Soit le morphisme $h = (\pi', j') : U' \rightarrow U \times_S X'$.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{fini}} & U \times_S X' & \longrightarrow & X' \\ \uparrow & \nearrow h & \downarrow \text{propre} & & \downarrow \text{propre} \\ U' & \longrightarrow & U & \longrightarrow & S \end{array}$$

Comme $\text{pr}_2 \circ h = j'$ est quasi-fini, alors h l'est. D'après le théorème principal de Zariski, h se réalise comme un ouvert d'un V fini sur $U \times_S X'$, et $U' \hookrightarrow V \rightarrow U$ est une compactification de $U' \rightarrow U$. \square

Références

- [Co1] B. CONRAD, *Cohomological descent*, cf <http://math.stanford.edu/~conrad/>.
- [Co2] B. CONRAD, *B. Conrad, Deligne's notes on Nagata compactifications*, J. Ramanujan Math. Soc. 22 (2007), no. 3, 205–257.
- [De] P. DELIGNE, *Le théorème de plongement de Nagata*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 661–670.
- [LO] Y. LASZLO, M. OLSSON, *The six operations for sheaves on Artin stacks. I. Finite coefficients*, Publ. Math. IHES No. 107 (2008), 109–168.
- [Lü] W. LÜTKEBOHMERT, *On compactification of schemes*, Manuscripta Math. 80 (1993), no. 1, 95–111.
- [Mi] J. MILNE, *Étale cohomology*, PUP.
- [Na1] M. NAGATA, *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1962) 1–10.
- [Na2] M. NAGATA, *A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1963) 89–102.
- [Se] J.-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5 (5ème éd.), Springer, 1994.
- [Vo] P. VOJTA, *Nagata's embedding theorem*, arXiv:0706.1907.