Le groupe fondamental du point

Matthieu Romagny, séminaire de Géométrie, le 2 avril 2014

1. Le point. Il s'agit dans cet exposé d'étudier les revêtements d'un objet de première importance :

$$\bullet$$

Les géomètres le connaissent bien : en géométrie différentielle il est muni d'une structure de variété différentiable, en géométrie complexe d'une structure de variété holomorphe, etc. Ceci dit, les points de ces exemples ne sont pas les mêmes : dans le premier cas l'anneau des fonctions (constantes !) sur le point est $\mathbb{R}$ et dans le deuxième cas c'est $\mathbb{C}$. Je préciserai donc ma notation en gonflant le symbole $\bullet$ en une petite bulle dans laquelle je pourrai indiquer l'anneau des fonctions sur le point que je regarde :

$$\textcircled{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad \textcircled{\mathbb{C}}$$

sont maintenant distincts. Comme je suis un géomètre arithméticien, j'aime bien le point

$$\textcircled{k}$$

où k est un corps quelconque, par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p$ ou $\bar{\mathbb{F}}_p(T)$. Notez qu'une extension de corps l/k détermine une application entre points :

$$\pi : \textcircled{l} \longrightarrow \textcircled{k}$$

dont le morphisme d'anneaux de fonctions associé $\pi^* : f \mapsto f \circ \pi$ est l'inclusion $k \subset l$.

2. Le groupe fondamental algébrique. Comme le groupe fondamental du point est un objet plus compliqué qu'on pourrait penser, je vais faire quelques rappels. On sait qu'un revêtement topologique $Y \to X$ est localement trivial, et que ;

1) on peut le tirer en arrière par un $X' \to X$ et on obtient un nouveau revêtement (fig. ci-dessous) ;

2) les espaces topologiques non monstrueux possèdent un revêtement universel $\widetilde{X}$;

3) on peut toujours trivialiser $Y \to X$ en le tirant en arrière à $\widetilde{X}$;

4) si $Y \to X$ est à fibres finies, il suffit d'un revêtement $X' \to X$ fini pour trivialiser.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Les applications $\textcircled{l} \to \textcircled{k}$ pour une extension finie séparable l/k se comportent comme en topologie :

1) on peut les tirer en arrière par des $\textcircled{k'} \to \textcircled{k}$, et on obtient un objet dont l'anneau de fonctions est le produit tensoriel $l \otimes_k k'$,

2) il y a un revêtement universel qui est $\textcircled{\bar{k}}$ d'anneau de fonctions une clôture algébrique $\bar{k}$ de k,

3) si on tire en arrière à $\textcircled{\bar{k}}$ on trivialise au sens où $\textcircled{l} \to \textcircled{k}$ devient une somme disjointe de $\bar{k}$-points,

4) pour les extensions finies, une k'/k finie suffit à trivialiser.

On peut ainsi voir à l'œil nu que le revêtement $\textcircled{\mathbb{C}} \to \textcircled{\mathbb{R}}$ peut être trivialisé en le tirant en arrière par lui-même, pour obtenir une somme disjointe de $\mathbb{C}$-points : en effet, puisque $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ on a :

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \frac{\mathbb{C}[X]}{(X^2+1)} = \frac{\mathbb{C}[X]}{(X+i)(X-i)} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

c'est bien l'anneau de fonctions de *deux points*. En images :

$$\begin{tikzcd}
\textcircled{\mathbb{C}} \cup \textcircled{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \textcircled{\mathbb{C}} \arrow[d] \\
\textcircled{\mathbb{C}} \arrow[r] & \textcircled{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

Grothendieck a dégagé des conditions axiomatiques que doit vérifier une catégorie pour être la catégorie des revêtements d'un objet géométrique, et défini ainsi une notion de groupe fondamental qui englobe :

- la théorie des corps : si l'on considère l'espace $X = \textcircled{k}$ muni du point-base $x = \textcircled{\bar{k}}$, on obtient :

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \text{groupe de Galois de } \bar{k}/k,$$

- la situation topologique : si X est une variété algébrique complexe, on a un isomorphisme :

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X, x) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(X, x)^{\wedge} = \text{complété profini du } \pi_1 \text{ topologique.}$$

3. Revêtements ramifiés. On sait que le groupe de Galois ne voit pas les extensions inséparables, en ce sens que $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)$ où k^{s} désigne la clôture séparable de k dans $\bar{k}$. Pour introduire un groupe fondamental qui voit ces extensions, il nous sera utile d'avoir quelques autres exemples en tête. Regardons l'application « puissance » de la droite complexe vers elle-même :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C} \arrow[r, "\pi_n"] & \mathbb{C} & \\
& z \arrow[r, mapsto] & z^n & \\
\begin{array}{c}\text{anneau de} \\ \text{fonctions} = \mathbb{C}[Z]\end{array} \arrow[uur, squiggly] & & & \begin{array}{c}\text{anneau de} \\ \text{fonctions} = \mathbb{C}[Y]\end{array} \arrow[uul, squiggly]
\end{tikzcd}$$

L'application $\pi = \pi_n$ correspond au morphisme d'anneaux $\pi^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[Z]$ qui envoie Y sur Z^n. Pour calculer la fibre de cette application en un point a, on interprète l'inclusion

$$\begin{tikzcd}
& \{a\} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{C} & \\
\begin{array}{c}\text{anneau de} \\ \text{fonctions} = \mathbb{C}\end{array} \arrow[ur, squiggly] & & & \begin{array}{c}\text{anneau de} \\ \text{fonctions} = \mathbb{C}[Y]\end{array} \arrow[ul, squiggly]
\end{tikzcd}$$

comme le morphisme d'anneaux $\mathrm{ev}_a : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}$ d'évaluation en a. Ce morphisme identifie le but $\mathbb{C}$ au quotient $\mathbb{C}[Y]/(Y-a)$. L'anneau de fonctions de la fibre qui nous intéresse :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(a) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \{a\} \arrow[r, "i"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

est le produit tensoriel d'anneaux :

$$\mathbb{C}[Z] \underset{\pi^*,\mathbb{C}[Z],\mathrm{ev}_a}{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{C}[Z] \underset{\pi^*,\mathbb{C}[Z],\mathrm{ev}_a}{\otimes} \mathbb{C}[Y]/(Y-a) = \mathbb{C}[Z]/(Z^n - a).$$

Si $a \neq 0$, cet anneau est le produit $\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ et la fibre a n points ; au-dessus de l'ouvert $a \neq 0$ on a un revêtement. Si $a = 0$ en revanche, l'anneau de fonctions de la fibre est $\mathbb{C}[Z]/(Z^n)$ qui n'est pas un produit. En fait, dans la fibre la fonction coordonnée Z a une puissance n-ème nulle sans pour autant être nulle : on dit que l'anneau est *non réduit.* Ne jetons pas cette fonction nilpotente à la poubelle : c'est grâce à elle que l'anneau de fonctions sur la fibre $\mathbb{C}[Z]/(Z^n)$ est de dimension n, comme pour les points $a \neq 0$, ce qui fait qu'il y a une notion intelligente et fructueuse de *revêtement ramifié.*

Sur un corps k quelconque, on peut faire les mêmes choses avec la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ dont l'anneau de fonctions est $k[Z]$, sans restriction sur la caractéristique $p \geqslant 0$. Pour tout $a \in k$, la fibre

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(a) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "\pi"] \\ \{a\} \arrow[r] & \mathbb{A}^1_k \end{tikzcd}$$

a pour anneau de fonctions $k[Z]/(Z^n - a)$. Si le polynôme $Z^n - a$ est séparable, il possède n racines distinctes lorsqu'on passe à $\bar{k}$ et on voit ainsi que l'application $\pi^{-1}(a) \to \{a\} = k$ est un revêtement. En revanche, si $p > 0$ et si $n = p^e m$, passer à $\bar{k}$ fait apparaître une somme d'au plus m points :

$$k[Z]/(Z^{p^e m} - a) \otimes_k \bar{k} = \bar{k}[Z]/(Z^{pm} - \alpha^{p^e}) = \bar{k}[Z]/(Z^m - \alpha)^{p^e}$$

où $\alpha \in \bar{k}$ est une racine p^e-ème de a. On voit qu'est apparue la fonction nilpotente $Z^m - \alpha$ et on a un revêtement ramifié. Qu'à cela ne tienne, ces revêtements nous apprennent beaucoup de choses également sur l'arithmétique du corps k et il est naturel de vouloir les garder.

4. Le groupe fondamental de Nori-Zhang. Si $n = p^e$ en caractéristique p, il se passe un truc nouveau, c'est que $\pi = \pi_{p^e}$ est additif : c'est une puissance de l'endomorphisme de Frobenius du groupe $(\mathbb{A}^1_k, +)$. La fibre en $a = 0$ est le noyau $\alpha_{p^e} := \ker(\pi)$ qui est donc un groupe algébrique *fini* et *ramifié* car son anneau de fonctions est de *dimension finie* et *non réduit.* L'espace topologique sous-jacent ne possède qu'un point. Il est facile de se convaincre que chaque fibre $\pi^{-1}(a)$ est un espace principal homogène sous ce groupe, donc un revêtement galoisien en un certain sens. Sans condition ni sur la caractéristique ni sur n, on peut donner aussi l'exemple du morphisme $\pi = \pi_n$ vu comme endomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}, \times)$. Le noyau $\mu_n := \ker(\pi)$ est aussi un groupe algébrique fini, qui est ramifié lorsque n est multiple de p. Pour tout $a \neq 0$, l'application $\pi^{-1}(a) \to \{a\} = k$ est un revêtement galoisien de groupe μ_n.

Madhav Nori (1982), le premier, a introduit un groupe fondamental qui prend en compte les revêtements ramifiés [1]. Sa définition ne s'appliquait qu'aux revêtements de variétés sur un corps algébriquement clos. Récemment, Lei Zhang (2014) a introduit un groupe fondamental analogue qui est

1. Il faudrait en fait dire *les revêtements sous un groupe ramifié* pour distinguer le groupe fondamental dont on parle, qui est à proprement parler un *schéma en groupes fondamental*, de groupes fondamentaux comme celui de Grothendieck-Murre qui tient compte de ramification le long d'un diviseur.

intéressant aussi pour le point sur un corps non algébriquement clos. La meilleure façon de définir le groupe fondamental de Nori-Zhang est comme un groupe de Tannaka, mais on peut aussi le voir de manière plus terre-à-terre comme la limite projective

$$\pi_1^{\mathrm{NZ}}(X,x) = \varprojlim G$$

de tous les groupes algébriques finis G qui sont groupes de Galois de revêtements $(Y,y) \to (X,x)$ ramifiés ou non. Typiquement, ces groupes sont produits semi-directs d'un groupe fini habituel par un groupe totalement ramifié (on dit aussi *infinitésimal*) comme α_{p^e} ou μ_{p^e}, i.e. un groupe avec un seul point mais beaucoup de fonctions nilpotentes dessus. Il est à peu près clair que ce groupe fondamental est ramifié. Ceci n'exclut cependant pas la possibilité que le revêtement universel ne soit pas ramifié, comme on peut le penser en regardant les revêtements non triviaux sous α_p ou μ_p d'une variété intègre. Pour terminer cet exposé, énonçons la réponse à cette dernière question, obtenue avec Gabriel Zalamansky et Lei Zhang lorsque ce dernier est venu en octobre :

Théorème. *Soit k un corps de caractéristique p. Alors le revêtement ramifié universel au sens de Nori-Zhang est réduit si et seulement si k est parfait.*

La preuve consiste à fabriquer certains revêtements galoisiens de k sous un groupe infinitésimal G égal au noyau de l'endomorphisme de Frobenius du groupe des vecteurs de Witt de longueur 2, dont la partie réduite n'est pas un revêtement galoisien.