Déterminant des algèbres de dimension finie

Matthieu Romagny

Chevaleret le 10 mars 2008, Amiens le 22 octobre 2008

1 L'espace Alg_n

Considérons un k-module libre A muni d'une base $e_1, \ldots, e_n$. Une structure d'algèbre associative unitaire avec $e_1 = 1$ sur A est déterminée par les constantes $c_{i,j}^k$ telles que

$$e_i e_j = \sum c_{i,j}^k e_k \ .$$

Exprimer l'associativité mène à des équations quadratiques en les $c_{i,j}^k$ qui définissent l'espace des modules Alg_n des algèbres munies d'une base comme un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^{n(n-1)^2}$. Le changement de base se traduit par l'action d'un groupe linéaire lisse évident G et le classifiant des algèbres (sans base) est $[\mathrm{Alg}_n/G]$. Voici ce qu'on sait sur Alg_n :

• c'est un cône de centre l'algèbre commutative locale d'idéal maximal de carré nul A_0 ; donc Alg_n est connexe et toutes ses composantes irréductibles se rencontrent en A_0.

• le nombre alg_n de composantes irréductibles est asymptotiquement exponentiel en n et précisément $e^n \ll alg_n \ll e^{n^4}$ où $f(n) \ll g(n)$ veut dire que $\overline{\lim} f(n)/g(n) < \infty$ (Mazzola, 1979).

• les dimensions des composantes irréductibles sont $\geq \frac{4}{27}n^3 + O(n^{8/3})$ (Neretin, 1988).

• $\forall n \geq 6$ il existe des composantes irréductibles non réduites (Dana-Picard et Schaps, 1998).

• pour $n = 3$ tout est explicite. L'espace Alg_3 a deux composantes irréductibles. La première $\mathrm{Alg}_3^{comm} = \overline{\mathrm{Alg}_{3,3}}$ est $\simeq \mathbb{A}^6$ et la seconde $\mathrm{Alg}_{3,2}$ est $\simeq \mathbb{A}^4$ (notations introduites plus loin). Elles se rencontrent selon un $\mathbb{A}^2$ qui, dans $[\mathrm{Alg}_3/G]$, est juste le point $\{A_0\}$.

• pour $n = 4$ ou plus je ne connais pas de description explicite de Alg_n.

2 Le déterminant I

L'algèbre des matrices $\mathrm{M}_n(k)$ possède une fonction multiplicative fondamentale, le déterminant $\det : \mathrm{M}_n(k) \to k$. Pour bien d'autres algèbres de dimension finie classiques on connaît une telle fonction fondamentale : les extensions galoisiennes de corps ont une norme, l'algèbre des quaternions réels $\mathbb{H}$ a aussi une norme, etc. Si on veut construire un déterminant pour n'importe quelle algèbre A on est tenté d'utiliser la représentation régulière gauche $A \hookrightarrow \mathrm{End}_k(A) \simeq \mathrm{M}_{n^2}(k)$ et de composer avec le déterminant de $\mathrm{End}_k(A)$. Mais si on fait cela avec $\mathbb{H}$ on trouve un truc homogène de degré 4 qui est en fait le carré de la norme des quaternions. Donc ça ne va pas.

La clé pour trouver la bonne définition est l'observation suivante : dans $\mathrm{M}_n(k)$ toute matrice A est annulée par $\det(T\,\mathrm{id} - A)$; dans $\mathbb{H}$ tout quaternion q est annulé par $N(T - q)$. Il semble y avoir, de manière générale, à la fois un déterminant et un théorème de Cayley-Hamilton, les deux étant très liés.

3 Degré d'algébricité

Le déterminant que l'on va construire est homogène ; il faut commencer par trouver son degré d'homogénéité.

Étant donnée une k-algèbre A de dimension n et un entier $d \leq n$, on considère l'application $\varphi_d : A \to \wedge^{d+1} A$ donnée par $a \mapsto 1 \wedge a \wedge a^2 \wedge \cdots \wedge a^d$. On dit que le degré d'algébricité de A est $\leq d$ ssi $\varphi_d = 0$. On écrit $\deg(A) \leq d$.

Pour l'instant je n'ai pas parlé de la base k. Si c'est un corps il n'y a pas de problème, et dans ce cas on dit que $\deg(A) = d$ ssi $\varphi_d = 0$ et $\varphi_{d-1} \neq 0$. Sinon, on demande que A soit localement libre de rang n, et on dit que $\deg(A) = d$ ssi c'est vrai pour toutes ses fibres. Par exemple A_0 est de degré 2 quelque soit la base, mais pour une déformation de A_0 dans Alg_3^{comm} on ne peut pas définir $\deg(A)$.

La condition $\deg(A) \leq d$ définit un fermé $\mathrm{Alg}_{n,\leq d} \subset \mathrm{Alg}_n$ et dedans on a un ouvert $\mathrm{Alg}_{n,d}$.

4 Le déterminant II

J'énonce le théorème dans le cadre des schémas car j'aime bien voir l'algèbre commutative comme de la géométrie :

Théorème : *Soit S un schéma normal intègre et A/S une algèbre de dimension $n \geq 2$. Soit $d \geq 2$ le plus petit entier tel que $\varphi_d = 0$. Alors il existe une unique section de* $\mathrm{Sym}^d(A^\vee)$ *appelée* déterminant *et notée* det, *t.q.*

(1) det : $A \to \mathbb{G}_a$ *est un morphisme de monoïdes multiplicatifs unitaires,*
(2) *le S-morphisme $A \to A$ défini en évaluant en $a \in A$ le polynôme* $\det(T - a)$ *est nul.*

Le déterminant satisfait les propriétés supplémentaires :

(3) *le schéma en groupes des unités de A est la préimage de $\mathbb{G}_m$ par* det,
(4) *si S' est normal intègre et $S' \to S$ est plat alors* $\det_{A'/S'} = \det_{A/S} \times_S S'$.

(expliquer ce qu'est une algèbre sur S, et le point (2))

Remarque : en fait si $\deg(A/S)$ l'hypothèse de platitude dans (4) est inutile.

Preuve.

On définit det**.** Par unicité il suffit de le faire pour $S = \mathrm{Spec}(R)$ avec A libre sur R. On considère $R_A = \mathrm{Sym}(A^\vee)$, l'anneau des fonctions de A, et α l'élément universel. Si on fixe une base $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_n$ de A/R et qu'on pose $t_i = e_i^*$ alors $R_A = R[t_1, \ldots, t_n]$ et $\alpha = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$. On appelle P le polynôme minimal de α sur $K_A = \mathrm{Frac}(R_A)$. J'affirme que $P \in R_A[T]$. La raison est que via le plongement

$$A \hookrightarrow \mathrm{End}_R(A) \ ,$$

α est annulé par son polynôme de Cayley-Hamilton CH. Donc P divise CH, lequel est à coefs dans R_A. Les racines de P sont donc racines de CH, donc entières sur R_A, donc dans R_A, donc les coefs de P aussi, cqfd. On pose :

$$\det := (-1)^d P(0) \ .$$

On montre qu'il est multiplicatif et on n'en fera pas plus. On peut remplacer R par K, une clôture algébrique de son corps des fractions. On prend une suite de composition $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_d = A$, c'est-à-dire que $W_i = V_i/V_{i-1}$ est A-module simple. On sait qu'alors son commutant $\mathrm{End}_A(W_i)$ est une algèbre à division, donc $= K$ car K est alg. clos. Un théorème de Burnside (qu'on peut voir comme un corollaire du théorème de densité de Jacobson ; cf Bourbaki sur les modules et anneaux semi-simples) dit que le morphisme de A vers le bicommutant $\mathrm{End}_K(W_i)$ est surjectif. Donc l'image α_i de α dans $\mathrm{End}_K(W_i)$ est l'élément universel de

$\mathrm{End}_K(W_i)$ et donc son polynôme minimal est $CH_i = \det(T\,\mathrm{id} - \alpha_i)$, qui est irréductible. Si on choisit une K-base de A adaptée à la suite de composition V_i la représentation $A \hookrightarrow \mathrm{End}_K(A)$ est triangulaire par blocs et on voit qu'alors α est annulé par $CH_1 \dots CH_d$. Donc P est un produit de certains des CH_i et le (1) du théorème s'ensuit immédiatement. $\square$

Corollaire : *La construction de* det *s'étend à la normalisation de* $(\mathrm{Alg}_{n,d})_{\mathrm{red}}$. *En particulier si* $\mathrm{Alg}_{n,d}$ *est réduit normal, on sait définir le déterminant de toute algèbre* A/S *de degré* d*, sans condition sur* S*. Exemple :* $n = 3$.

Question : savez-vous étendre la construction à $(\mathrm{Alg}_{n,d})_{\mathrm{red}}$? (il s'agit essentiellement de traiter le cas S intègre). Encore plus optimiste, l'étendre à $\mathrm{Alg}_{n,d}$...

5 Propriétés, calculs, applications

Proposition : *Soit* $f : A \to A$ *un automorphisme ou antiautomorphisme d'anneaux qui préserve les scalaires. Alors* $\det \circ f = f \circ \det$.

Exemples : la transposition de $\mathrm{M}_n(k)$. La conjugaison de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition : *Le déterminant de l'algèbre opposée de* A *est égal à celui de* A*. Le déterminant d'une algèbre produit est le produit des déterminants.*

Savez-vous calculer le déterminant de $A \otimes_k B$?

Proposition : *Si* det *est irréductible (comme élément de* R_A*) alors son degré divise* n.

Corollaire : le déterminant sur $\mathrm{Alg}_{3,2}$ est réductible. En effet,...

Proposition : *Soit* k *un corps. Soient* $n_1, \dots, n_r$ *des entiers et* $n = (n_1)^2 + \dots + (n_r)^2$*. On suppose que* $\nu := \inf(n_i) \geq 2$*. Alors la composante irréductible de* $A_0 = \mathrm{M}_{n_1}(k) \times \dots \times \mathrm{M}_{n_r}(k)$ *est incluse dans* $\mathrm{Alg}_{n,n-\nu}$.

Preuve. Si la comp. irréd. de A_1 rencontre $\mathrm{Alg}_{n,d}$ (pour un d) alors $\exists$ un AVD (R, K, k, m) et une R-algèbre A telle que $\deg(A \otimes K) = d$ et $A \otimes k = A_0$. On doit avoir $d < n$ car A_0 n'est pas commutative (puisque $\nu \geq 2$). Donc on a $CH_\alpha(T) = \psi(T) \det(T - \alpha)$ où $\deg(\psi) = n - d > 0$. De même $CH_{\alpha_0}(T) = \psi_0(T) \det(T - \alpha_0)$, or en réduisant mod m on a

$$\overline{CH}_\alpha(T) = CH_{\alpha_0}(T) = \overline{\psi}(T)\, \overline{\det}(T - \alpha)\ .$$

Comme $\det(T - \alpha_0)$ est le produit des det des algèbres de matrices et que $CH_{\alpha_0}(T)$ et $\det(T - \alpha_0)$ ont mêmes facteurs irréductibles, alors l'un de ces facteurs divise $\overline{\psi}$. Donc $n - d \geq \nu$, cqfd. $\square$

Question : est-ce que $\mathrm{Alg}_{n,\leq d}$ est une union de composantes irréductibles de Alg_n ?

Question : savez-vous calculer le déterminant d'une algèbre de Clifford ?