Dégénérescence de revêtements galoisiens en caractéristique positive

Matthieu Romagny

Exposé à Chevaleret (25.09.2006) et au Mans (28.11.2006)

RÉSUMÉ : Pour étudier le groupe fondamental des courbes en caractéristique p il est naturel de faire dégénérer les revêtements de courbes. Les courbes elles-mêmes dégénèrent en des courbes stables, mais à cause de la ramification sauvage on ne sait pas encore bien vers quel type d'objet dégénère le revêtement. Je décrirai des résultats récents d'Abramovich et moi-même qui répondent à cette question et indiquent quel "bon" espace de modules propres on peut construire (sur l'anneau des entiers).

1 Motivation

On s'intéresse aux revêtements galoisiens de courbes lisses $Y \to X$ pour lesquels on fixe le groupe de Galois G (fini), les genres g, h et le degré de la ramification $r = \deg(\omega_{Y/X})$. Sur un anneau de base qui peut être $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$, ils forment un espace de modules $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{G,g,h,r}$, ou plutôt un champ algébrique car c'est ce langage que j'utiliserai. Ici on étudie les compactifications de ce champ en caractéristique positive ou mixte. Applications : étude de π_1 sauvage (conjecture d'Abhyankar : Raynaud, Harbater), problème de Galois inverse...

En caractéristique première à $\sharp G$ le stabilisateur G_y en un point $y \in Y$ est cyclique et le lieu de ramification est réduit. (En familles, le diviseur de ramification est étale sur la base.) L'action de G_y sur le tangent $T_{Y,y}$ est fidèle. On dispose d'une compactification qui est le champ $\overline{\mathcal{H}}$ classifiant les revêtements galoisiens de courbes stables $Y \to X$ tels que en tout point double y, les caractères du stabilisateur G_y sur les espaces tangents aux branches en y vérifient $\chi_1\chi_2 = 1$. (On a supposé que G_y préserve les branches pour simplifier.) Ce $\overline{\mathcal{H}}$ est aussi beau que possible (propre et lisse).
En caractéristique $p|\sharp G$, il y a plein de problèmes, liés essentiellement à la ramification. Il y a des problèmes "locaux" : les stabilisateurs ne sont plus cycliques ; il y a de la ramification supérieure (chaîne de sous-groupes de G_y) ; les caractères aux points d'inertie ne sont plus injectifs. Des résultats de Bertin et Mézard montrent que $\mathcal{H}$ est singulier sur $\mathbb{F}_p$ et même pour $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on ne sait pas si les singularités sont raisonnables : intersection complète, CM... (au voisinage d'un point de $\mathcal{H}$ correspondant à un revêtement $Y \to X$, les singularités de $\mathcal{H}$ sont localisées aux points de ramification sauvage).

Résumé

	Car=$p \nmid \sharp G$	Car=$p \mid \sharp G$
Stabilisateurs G_y	cycliques	non nécess. cycliques
Ramification	modéré donnée par G_y	sauvage $G_y = G_0 \supset G_1 \supset$...
Régularité de $\mathcal{H}$	lisse	Non lisse ; à quel point ?
Compactification	OK : $\chi_1\chi_2 = 1$; lisse	?
Applications	$\mathcal{M}_g$ irred ; PGI	Abhyankar ; π_1
Auteurs	Ekedahl ; Bertin-R	Bertin-Mézard ; Raynaud

Pour Abhyankar on "passe" par le bord.

Quand on s'intéresse à l'existence d'une compactification, il y a aussi des problèmes "globaux" qui sont ceux qui m'intéressent plus particulièrement.

2 Réduction du groupe de Galois : énoncé

Dans toute la suite R, K, k, π = un AVD de corps des fractions K, de corps résiduel k de caractéristique $p|\sharp G$, et d'uniformisante π. Soit donc une K-courbe lisse Y_K avec action de G et Y son modèle stable sur R.

Dessin de Y.

En général certains éléments de G agissent trivialement sur des composantes de Y_k.

> Exemple : sur $R[x,y]/xy-a$, l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $x \mapsto x/(x+\zeta)$ et $y \mapsto \zeta y + a$. En projectif, sur la conique plane $xy = az^2$ l'action est $[x:y:z] \mapsto [x : \zeta(az+\zeta y) : x+\zeta z]$.

Le morphisme $Y \to Y/G$ est alors ramifié tout le long de ces composantes. En conséquence on ne peut plus localiser la théorie de déformation aux points exceptionnels (points de ramification sauvage ou points doubles). Et même pire : pour le groupe le plus simple possible $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :

Théorème (Maugeais) Partant de n'importe quelle courbe stable Y_0, si le genre arithmétique de Y_0/G est nul alors Y_0 se déforme en une courbe lisse Y munie d'une action de G.

Donc le champ classifiant les revêtements de courbes stables $Y \to Y/G$ est assez monstrueux et n'est certainement pas celui qu'on veut.

Le but de l'exposé est de raffiner le modèle stable pour arriver à un objet plus sympathique. La courbe $X = Y/G$ est semi-stable et le morphisme $Y \to X$ est plat hors des points doubles de X. Nous allons tordre X aux points doubles (au sens des twisted curves d'Abramovich-Vistoli) en $\mathcal{X} \to X$ pour que le revêtement soit plat ici aussi. Ensuite on modifiera G sur chaque composante de $\mathcal{X}_k$ pour avoir un groupe qui agit fidèlement. On aura donc un groupe $\mathcal{G}$ fini plat *sur* $\mathcal{X}$ et on ne sera alors plus très loin d'avoir un champ classifiant propre raisonnable.

Pour ne pas tricher, je vous définis $\mathcal{X}$ mais sans m'attarder.

Soit donc un point double $x \in X_k$ et y au-dessus. Étale localement on a $\mathcal{O}_{X,x} = R[u,v]/(uv-\pi^m)$ et $\mathcal{O}_{Y,y} = R[s,t]/(st-\pi^n)$. La structure locale de $Y \to X$ est $u = s^d\mu$ et $v = t^d\nu$ où $d = [k(y):k(x)]$, μ, ν sont des unités dans $\mathcal{O}_Y$. (On vérifie que $m = dn$ et $\mu\nu = 1$.) On définit $Z = \mathrm{Spec}(R[g,h]/(gh-\pi^n))$ et $\mathcal{X} = [Z/\mu_d]$. Ce "twisting" est minimal pour que

$$\boxed{Y \to X \text{ se relève en un morphisme plat } Y \to \mathcal{X}. \text{ On vérifie que ce relevé est } G\text{-équivariant}}$$

Encadrer au tableau.

Pour la suite de l'exposé, vous n'avez pas besoin d'en savoir plus.

> Minimalité du twisting : pour un twisting général $\mathcal{X} = [\mathrm{Spec}(R[g,h]/(gh-\pi^a))/\mu_b]$ avec a, b tels que $ab = m$. Pour qu'il existe $Y \to \mathcal{X}$ il faut que $b|d$, et pour avoir la platitude il faut que $b = d$.

Théorème 1 (Abramovich $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, Romagny G quelconque)
L'image schématique $\mathcal{G}$ de $G_{\mathcal{X}} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$ est un schéma en groupes fini plat sur $\mathcal{X}$.

C'est un théorème de "réduction stable" pour les revêtements. Il ouvre la voie à une définition

$$\overline{\mathcal{H}} = \{\ (Y \to \mathcal{X}, \mathcal{G} \to \mathcal{X}, \mathcal{G} \times_{\mathcal{X}} Y \to Y)\ \}$$

La fin de l'exposé est la description de $\mathcal{G}$, qui prouve le théorème. Elle nécessite des résultats intermédiaires intéressants pour eux-mêmes. Allons-y. Notons qu'il n'est pas clair du tout que $\mathcal{G}$ soit un schéma en groupes. Il y a deux types de points $x \in \mathcal{X}$ à regarder :

3 Points situés sur une seule composante irréductible de $\mathcal{X}_k$

Cela veut dire que $\mathcal{X}$ est intègre au voisinage de x.

Dessin de $\mathcal{X}$, un x lisse, un x nodal intègre.

Voyons le phénomène qui se produit sur des exemples :

(Ex1) $\mathrm{car}(K) = 0$, R contient une racine p-ème de l'unité ζ donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_K \simeq \mu_{p,K}$. Soit $Y = \mathbb{P}^1_R$ muni de l'action de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par multiplication par ζ sur un paramètre de Y. Alors l'action résiduelle est triviale. On voit que $\mu_{p,R} = \mathrm{Spec}(R[z]/z^p - 1)$ agit par multiplication par z non trivialement sur Y_k ; c'est l'image schématique de G dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

(Ex2) $\mathcal{E}$ le modèle de Néron d'une courbe elliptique E avec action de $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ par translations. Le "bon" groupe qui agit est le schéma en groupes $\mathcal{E}[p]$.

(Ex3) (Utile plus tard) $G =$ un schéma en groupes fini plat de degré p^2 et de fibre spéciale $(\alpha_p)^2$ que je ne donne pas explicitement, agissant sur $\mathbb{A}^1_R$. L'action résiduelle est

$$(a,b)x = x + a + bx^{p(p-1)} \qquad (x \text{ paramètre de } \mathbb{A}^1)$$

Le stabilisateur d'un point $x_0 \in \mathbb{A}^1_k$ est le sous-groupe de $(\alpha_p)^2$ d'équation $a + b(x_0)^{p(p-1)} = 0$.

En fait dans ces exemples $\mathcal{G}$ est constant : $\mathcal{G} = G' \times_R \mathcal{X}$. Dans le 1er exemple le schéma Aut existe sans problème et G' est simplement l'image schématique de $G \to \mathrm{Aut}$. Dans les autres exemples la variété de départ n'est pas propre...

Ce qui est notre cas !

... ce qui pose problème. Néanmoins on a :

Théorème 2 Soit $\mathcal{Y}$ un champ algébrique plat et localement de type fini sur R, à fibre spéciale réduite. Soit G un schéma en groupes fini plat sur R agissant sur $\mathcal{Y}$, fidèlement sur $\mathcal{Y}_K$.

(1) Supposons que le quotient $\mathcal{Y}/G$ est R-pur. Alors il existe un modèle $G \to G'$ iso sur la fibre générique, où G' est un schéma en groupes fini plat sur R agissant sur $\mathcal{Y}$, fidèlement sur les deux fibres.

(2) Soit $\mathcal{X}$ un autre champ algébrique plat et localement de type fini sur R, à fibres intègres. Soit $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un morphisme représentable fini G-équivariant. Supposons que $\mathcal{X}$ est R-pur. Alors l'image schématique $\mathcal{G}$ de $G_{\mathcal{X}} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$ est isomorphe à $G' \times_R \mathcal{X}$.

Preuve : Pour (1) on se ramène au cas d'un schéma Y puis on le recouvre par ses sous-schémas fermés finis plats sur R auxquels on applique le cas propre (cas facile). Pour (2) c'est "essentiellement" une application de Nakayama. □

Ce théorème conclut pour le $\mathcal{G}$ du th. 1 au voisinage de x.

4 Intersections de deux composantes irréductibles de $\mathcal{X}_k$

Quitte à localiser, ops $\mathcal{X}_k$ n'a que deux composantes irréductibles E_1, E_2. Ici on ne pourra plus décrire $\mathcal{G}$ aussi simplement car il va bouger en franchissant le point double.

Pour ne pas vous embêter avec les champs faites comme si $\mathcal{X}$ était un schéma.

On va plonger $Y, \mathcal{X}$ dans $Y^n, \mathcal{X}^n$ pour n grand ; on montrera que l'adhérence schématique $\mathcal{L}$ de $G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{X}^n}(Y^n)$ est un schéma en groupes fini plat, ce qui sera plus simple...

Vous comprendrez bientôt pourquoi.

... et ensuite on pourra toujours trouver une immersion de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^n$ permettant d'identifier $\mathcal{G}$ à la restriction de $\mathcal{L}$.

Soit $Z = Y^n/G$. On a donc un morphisme

$$f\colon (\mathcal{H} \times_{\mathcal{X}^n} Z) \times_Z Y^n \to Y^n \times_Z Y^n$$

En fait en utilisant le fait que $Y \to \mathcal{X}$ est plat on peut choisir Z un peu mieux pour que $Y^n \to Z$ et $Z \to \mathcal{X}^n$ soient plats ce qui est crucial. Pour simplifier laissons cela comme ca et supposons que $Y^n \to Z \to \mathcal{X}^n$ sont plats. Alors f est fini birationnel, si $\mathcal{L}$ était normal alors source et but de f le seraient et ce serait un iso... donc $(\mathcal{H} \times_{\mathcal{X}^n} Z) \times_Z Y^n \to Y^n$ serait plat et comme $Y^n \to \mathcal{X}^n$ est fidèlement plat $\mathcal{H} \to \mathcal{X}^n$ serait plat. Utilisant la normalité on étend ensuite la multiplication $\mathcal{H} \times_{\mathcal{X}^n} \mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{H}$ qui n'est que rationnelle au départ. Enfin il est assez facile de trouver localement une immersion $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^n$, et on montre que $\mathcal{G} \simeq \mathcal{H} \times_{\mathcal{X}^n} \mathcal{X}$, cqfd.

Malheureusement $\mathcal{L}$ n'a aucune chance d'être normal = R1+S2. (Il peut être non réduit sur la fibre spéciale.) Mais il se trouve qu'il est S2 ! Pour déduire que f est un iso il faut qu'il soit un iso non seulement en codimension 0 mais aussi 1.

Codim 1 = pts de $Y_K^n \bigcup$ pts génériques des comp irred de $(\mathcal{X}^n)_k$.

Pour ce qui est de Y_K^n, soit m le nombre de points fixes de G sur Y_K. Alors l'action diagonale de G sur $(Y_K)^{m+1}$ privé de la diagonale grasse, est libre. Donc quitte à grossir n et à enlever la diagonale grasse, f_K est iso.

Pour les pts génériques des comp irred de $(\mathcal{X}^n)_k$ on utilise le résultat suivant :

Proposition Soit k un corps alg clos et Z une k-courbe intègre. Soit G un schéma en groupes fini (plat) agissant fidèlement sur Z. Alors pour n suffisamment grand, l'action de G sur Z^n est génériquement libre.

L'exemple (3) ci-dessus nous a montré qu'on a vraiment besoin de prendre un $n > 1$. Moyennant quoi, sur une composante de $(Y^n)_k$ de la forme $(E_1)^r \times (E_2)^s$, si r est assez grand par exemple, on pourra identifier $\mathcal{H}$ avec le modèle G' donné par le théorème 2 pour l'action de G sur la préimage de E_1 dans Y. Quitte à localiser encore un peu sur Y^n et $\mathcal{X}^n$ on peut faire le même raisonnement sur les autres composantes. On obtient un morphisme f iso en codimension 1. Par la propriété S2 c'est un iso. $\square$

Pour finir je voudrais esquisser la preuve de la proposition, que je trouve jolie. Pour tout e on appelle H_e le stabilisateur du point générique de Z^e. La projection oubliant le dernier facteur $Z^{e+1} \to Z^e$ induit une inclusion $H_{e+1} \subset H_e$. Il s'ensuit que pour $e \geq e_0$, on a $H_e = H_{e_0}$. D'autre part soit $U \subset Z$ l'ouvert de lissité et soit $\mathcal{H}$ l'adhérence schématique de $H_{e_0}/k(U)$ dans $G \times U$. C'est un schéma en groupes fini plat sur U. On a un morphisme de U vers le schéma représentant les sous-groupes finis de G, de degré $d = [\mathcal{H} : U]$. Si $\mathcal{H} \neq 1$ ce morphisme est non constant, de degré fini m, donc $e > m$ points de U ne peuvent avoir le même $\mathcal{H}_u$. Si $e > e_0$ ceci n'est pas possible, donc $\mathcal{H} = 1$.