Les critères d'Artin pour qu'un champ soit algébrique

Matthieu Romagny

Exposé à Bordeaux le 27 mai 2008

Ces notes sont un guide de lecture pour l'article [Ar3], continuation des travaux [Ar1], [Ar2].

1 L'approche d'Artin pour construire des espaces de modules

Soit F un problème de classification pour lequel on souhaite construire un espace de modules, ou dont on souhaite montrer qu'il est représentable par un champ algébrique. Précisément on suppose que F est un champ pour la topologie étale, sur un schéma S. Pour résoudre ce type de problème, deux approches distinctes se sont développées (successivement) :

- la méthode « globale » (Grothendieck, Mumford, 1960-1965). Elle consiste tout d'abord à ramener la construction à celle d'un schéma de type schéma Quot (en ajoutant au problème des données qui le rigidifient, comme un plongement projectif des objets) puis en faisant un quotient par un groupe algébrique (qui élimine les données additionnelles). L'étape du quotient peut être traitée soit dans le cadre de la théorie GIT, soit dans le cadre des champs algébriques. Cette méthode donne directement une construction globale de l'espace de modules qu'on veut construire.

- la méthode « locale », par algébrisation des déformations formelles (Artin, 1969-1974). Elle consiste à développer la théorie des déformations des objets du problème de modules considéré, à montrer que chaque objet possède une déformation formelle verselle, puis à utiliser les théorèmes d'algébrisation d'Artin pour montrer que cette déformation s'algébrise, donnant ainsi un atlas lisse, localement au-dessus de l'objet de F considéré :

$$\underbrace{\text{Déf. infinit.} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{Déf. formelle}\\ \text{(verselle)}\end{array}}_{\textbf{Schlessinger}} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{array}{c}\text{Déf. formelle effective}\\ \text{(verselle)}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{Déf. algébrique}\\ \text{(Th. d'approximation)}\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{Atlas local}\\ \text{(Versalité ouverte)}\end{array}}_{\textbf{[Ar1] [Ar2] [Ar3]}}$$

J'insiste sur le fait que ces deux méthodes ne diffèrent pas vraiment par la nature des objets que l'on construit (la première méthode peut mener à la construction de champs algébriques, comme la seconde), mais par la façon de les construire.

Dans cet exposé, je vais essayer d'expliquer la méthode d'Artin. Par son côté plus systématique, plus axiomatique, elle se prête mieux à l'élaboration, dans le cadre des champs algébriques, des constructions générales que Grothendieck appelait « théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique ».

2 Théorie des déformations infinitésimales

Avant dénoncer le théorème d'Artin, rappelons les notations de la théorie des déformations.

2.1 Les objets qu'on déforme. Soit F un S-champ, dans cette section on note C la catégorie des $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-anneaux nœthériens ; on voit F comme *co*fibrée en groupoïdes sur C à cause du passage des anneaux à leur spectre. On note $\bar{F}$ le foncteur des classes d'isomorphismes d'objets de F. Si $A \in C$ on note $F(A)$ le groupoïde des objets de F au-dessus de A et $\bar{F}(A)$ l'ensemble de ses classes d'isomorphisme. Pour tout morphisme $A' \to A$ dans C et tout objet $a \in F(A)$, on note $F_a(A')$ le groupoïde des morphismes $a' \to a$ au-dessus de $A' \to A$ et $\bar{F}_a(A')$ l'ensemble de ses classes d'isomorphisme. Il s'agit simplement de l'ensemble des « relèvements de a à A' ».

2.2 Extensions infinitésimales. On considère, pour chaque anneau réduit $A_0 \in C$, la catégorie $\mathcal{E}xan_{A_0}$ des extensions infinitésimales de A_0 :

- ses objets sont les morphismes surjectifs $A \to A_0$ à noyau nilpotent,
- ses morphismes sont les morphismes surjectifs $A' \to A$ commutant à l'extension vers A_0 et dont le noyau M est un A_0-module fini.

Pour $a_0 \in F(A_0)$, on définit de manière évidente la catégorie $\mathcal{E}xob_{a_0}$ des extensions infinitésimales de a_0, cofibrée sur $\mathcal{E}xan_{A_0}$.

2.3 Les conditions de Schlessinger-Rim. Celles qu'utilise Artin sont les suivantes :

(S1) (a) Pour tout diagramme $A' \to A \leftarrow B$ où $A' \to A$ est un morphisme d'extensions de A_0 et $B \to A_0$ est surjectif, et pour tout $a \in F(A)$, l'application canonique $\bar{F}_a(A' \times_A B) \to \bar{F}_a(A') \times \bar{F}_a(B)$ est surjective.

Étant donné un A_0-module fini M et $a_0 \in F(A_0)$, on notera $D_{a_0}(M) = \bar{F}_{a_0}(A_0 + M)$ où $A_0 + M$ est l'anneau $A_0[M]$ avec $M^2 = 0$.

(b) Pour toute surjection $B \to A_0$ et pour tout A_0-module fini M, pour tout $b \in F(B)$ d'image notée $a_0 \in F(A_0)$, l'application canonique $D_b(M) \to D_{a_0}(M)$ est bijective.

(S2) $D_{a_0}(M)$ est un A_0-module fini.

Pour donner un sens à (S2) il faut noter que la condition (S1)(a) permet de munir $D_{a_0}(M)$ d'une structure canonique de A_0-module : on le voit en appliquant le foncteur $\bar{F}$ au morphisme d'addition $(A_0 + M) \times_{A_0} (A_0 + M) \to A_0 + M$ qui envoie $(a + m, a + m')$ sur $a + m + m'$ puis au morphisme de multiplication scalaire $A_0 + M \to A_0 + M$ qui envoie $a + m$ sur $a + \lambda m$.

Je parlerai un peu plus tard de l'espace des obstructions $\mathcal{O}(M)$. Pour l'instant il est utile de se rappeler sur des exemples à quoi ressemblent tous ces objets. On y voit que la condition de finitude (S2) est, en général, assurée par des hypothèses de propreté sur X :

2.4 Premier exemple : déformations d'une variété. Soit X une variété algébrique sur un corps k et $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{X/k}$ son complexe cotangent. Soit F le foncteur de déformation correspondant.

- Espace tangent : $D_X(M) = \bar{F}(k + M) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_X, \mathcal{O}_X \otimes M)$ $(= \mathrm{H}^1(X, T_X \otimes M)$ si X lisse) ;
- Espace d'obstructions : $\mathcal{O}_X(M) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{L}_X, \mathcal{O}_X \otimes M)$ $(= \mathrm{H}^2(X, T_X \otimes M)$ si X lisse) ;

2.5 Deuxième exemple : déformations des sections d'un morphisme. On fixe un S-schéma X. La théorie des déformations d'une section $a : S \to X$ est la suivante :

- Espace tangent : $D_a(M) = \mathrm{Ext}^0(La^*\mathcal{L}_{X/S}, M)$ $(= \mathrm{H}^0(S, a^*T_{X/S} \otimes M)$ si X lisse sur S) ;
- Espace d'obstructions : $\mathcal{O}_a(M) = \mathrm{Ext}^1(La^*\mathcal{L}_{X/S}, M)$ $(= \mathrm{H}^1(S, a^*T_{X/S} \otimes M)$ si X lisse sur S) ;

2.6 Déformations formelles. Le processus de déformation continue ainsi : les déformations infinitésimales s'organisent en des déformations formelles, qui lorsque tout va bien sont effectives, puis s'algébrisent. Pour ne pas encombrer notre esprit avant d'énoncer le théorème d'Artin, nous remettons à un peu plus tard les définitions utiles sur ces notions.

3 Les critères d'Artin

En plus de la théorie de déformation des objets D, on a besoin d'une théorie d'obstructions $\mathcal{O}$, considérée dans l'énoncé du théorème d'Artin comme une structure supplémentaire, et de conditions de compatibilité de D et $\mathcal{O}$ à la localisation et à la complétion.

3.1 Obstructions. On définit une *théorie d'obstructions pour* F comme étant la donnée, fonctorielle en $a \in \mathcal{E}xob_{a_0}$ et linéaire en A_0, M, de :

- pour toute extension infinitésimale $A \to A_0$ et tout $a \in F(A)$, un foncteur $\mathcal{O}_a$ de la catégorie des A_0-modules finis dans elle-même,

- pour tout morphisme d'extensions $A' \to A \to A_0$ avec $M := \ker(A' \to A)$, et tout $a \in F(A)$, un élément $o_a(A') \in \mathcal{O}_a(M)$ qui est nul ssi $\bar{F}_a(A')$ est non vide.

3.2 Conditions sur D et $\mathcal{O}$.

(Ét) On dit que D et $\mathcal{O}$ sont *compatibles à la localisation étale* ssi pour tout morphisme étale $A \to B$, et tout $a \in F(A)$ d'image $b \in F(B)$, on a

$$D_{b_0}(M \otimes B_0) \simeq D_{a_0}(M) \otimes B_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_b(M \otimes B_0) \simeq \mathcal{O}_a(M) \otimes B_0 \ .$$

(Comp) On dit que D est *compatible à la complétion* ssi pour tout idéal maximal m de A_0 on a

$$D_{a_0}(M) \otimes \widehat{A}_0 \simeq \varprojlim D_{a_0}(M/m^n M) \ .$$

(Const) On dit que D et $\mathcal{O}$ sont *constructibles* ssi il existe un ouvert dense de points de type fini $p \in \mathrm{Spec}(A_0)$ tels que

$$D_{a_0}(M) \otimes k(p) \simeq D_{a_0}(M \otimes k(p)) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_a(M) \otimes k(p) \simeq \mathcal{O}_a(M \otimes k(p)) \ .$$

(Les produits tensoriels sont pris sur A_0.)

3.3 Énoncé du théorème et commentaires.

Ce qu'on appelle *critères d'Artin* est le théorème suivant :

Théorème ([Ar3], corollaire 5.2) *Soit S un schéma excellent et F un S-champ muni d'une théorie d'obstructions $\mathcal{O}$. Alors F est un champ algébrique localement de type fini sur S ssi*

(1) *la diagonale de F est représentable et localement de type fini,*

(2) *les conditions* (S1) *et* (S2) *de Schlessinger-Rim sont vérifiées,*

(3) *pour toute algèbre locale complète $\widehat{A}$ à corps résiduel de type fini sur S l'application $\bar{F}(\widehat{A}) \to \varprojlim \bar{F}(\widehat{A}/m^n)$ est d'image dense,*

(4) *les modules D et $\mathcal{O}$ satisfont les conditions de compatibilité* (Ét), (Comp) *et* (Const).

Indiquons brièvement comment on vérifie les conditions du théorème en pratique. Notons qu'à bien des endroits, des hypothèses de projectivité, ou au moins de propreté, sont nécessaires. Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans une situation suffisamment sympathique pour que ces hypothèses (et parfois quelques autres) soient satisfaites.

La condition (1) est en général une conséquence de la théorie de Grothendieck pour les foncteurs Isom (sous-produit de la théorie des schémas de Hilbert).

Ensuite, on doit calculer les modules D et $\mathcal{O}$ de la théorie de déformations : ce sont des groupes de cohomologie explicites pour lesquels on va vérifier les conditions suivantes.

La condition (S1) est impliquée par la condition plus forte (S1') qui dit que pour tout diagramme $A' \to A \leftarrow B$ où $A' \to A$ est un morphisme d'extensions de A_0 et $B \to A_0$ est surjectif, et pour tout $a \in F(A)$, le foncteur $F_a(A' \times_A B) \to F_a(A') \times F_a(B)$ est une équivalence de catégories. Cette condition est un résultat de recollement le long d'un fermé, qui est classiquement vérifié.

La condition (S2) résulte du théorème de finitude des images directes pour les morphismes propres.

La condition (3) résulte du théorème d'existence des faisceaux cohérents.

La condition (Ét) résulte du fait que la formation de la cohomologie commute au changement de base plat.

La condition (Comp) résulte du théorème sur les fonctions formelles (« théorème fondamental des morphismes propres » de Grothendieck).

Pour la condition (Const), par le théorème de platitude générique et le théorème de finitude, quitte à remplacer $\mathrm{Spec}(A_0)$ par un ouvert dense, les modules en question sont localement libres, et dans ce cas le théorème de changement de base dans la cohomologie est vrai aussi pour les morphismes non nécessairement plats (cf SGA6, Exposé IV, proposition 3.1.0).

4 Schéma de la preuve

4.1. Voici les grandes idées de la preuve du théorème d'Artin. Comme nous l'avons dit, en pratique, la condition (1) résulte de la théorie de Grothendieck pour les foncteurs Isom et est facile à vérifier. Les critères d'Artin (2)-(3)-(4) sont conçus pour vérifier l'existence d'une présentation lisse surjective $X \to F$ depuis un schéma. Nous nous concentrerons donc sur ce point.

On dira que $a \in F(A)$ est algébrique si A est algébrique, c'est-à-dire de type fini sur $\mathcal{O}_S$. Comme F est de présentation finie sur S, il possède des points algébriques (prendre un point quelconque sur A, il est alors défini sur un sous-anneau de type fini sur S). L'idée est de construire un morphisme lisse $X_a \to F$ au voisinage de tout point algébrique $a : \mathrm{Spec}(k) \to F$ où k est de type fini sur S.

Une *déformation formelle* de a est un système projectif d'éléments $v_n \in \bar{F}(\widehat{A}/m^{n+1})$ où $\widehat{A}$ est un anneau local complet de corps résiduel k et $v_0 = a$. Une déformation formelle est dite *verselle* si pour tout $A' \to A = k$ surjectif avec A' de longueur finie et le noyau M vérifiant $M^{m+1} = 0$, tout diagramme

$$\begin{tikzcd} v_n \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & a' \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd}$$

peut être complété à l'aide d'une flèche pointillée. D'après le théorème de Schlessinger, les conditions (S1) et (S2) impliquent que l'objet $a \in F(k)$ dont on est parti possède une déformation formelle verselle $\{v_n\}$.

On notera au passage la ressemblance entre la notion de versalité et le caractère formellement lisse (EGA4 définition 17.1.1). Dans le même esprit on dit que $\{v_n\}$ est universelle si on a aussi unicité dans le diagramme ci-dessus, ce qui donne une notion analogue au caractère formellement étale. On n'est donc pas très surpris que Artin montre ([Ar3], proposition 4.2) que pour un élément algébrique $v \in F(R)$, le morphisme $\mathrm{Spec}(R) \to F$ est lisse ssi v est formellement versel en tout point de type fini $p \in \mathrm{Spec}(R)$.

Une déformation formelle est dite *effective* s'il existe un élément $\widehat{v} \in F(\widehat{A})$ qui induit v_n dans $F(\widehat{A}/m^{n+1})$ pour tout n. Utilisant le fait que l'application $\bar{F}(\widehat{A}) \to \varprojlim \bar{F}(\widehat{A}/m^n)$ est d'image dense (condition (3)), on montre que $\{v_n\}$ est effective. En fait, si on peut appliquer le théorème d'existence des faisceaux de Grothendieck, alors cette application est même bijective et c'est fini. En général, comme l'image est dense il existe $v' \in \bar{F}(\widehat{A})$ qui induit $v_1 \in \bar{F}(\widehat{A}/m^2)$. En utilisant le caractère versel on relève l'identité $\widehat{A}/m^2 \to \widehat{A}/m^2$ en un système projectif de morphismes

$\widehat{A}/m^{n+1} \to \widehat{A}/m^{n+1}$, $n \geq 0$. À la limite on a un morphisme $\varphi : \widehat{A} \to \widehat{A}$ qui est l'identité modulo m^2, donc un automorphisme. Alors $\widehat{v} := F(\varphi^{-1}(v'))$ est la déformation effective recherchée.

On utilise maintenant le théorème d'approximation 1.12 de [Ar1] qui dit la chose suivante : si (A, m) est l'hensélisé d'un schéma excellent en un point, c est un entier, et F est un foncteur localement de présentation finie, un élément de $F(\widehat{A})$ peut être approché modulo m^c par un élément de $F(A)$. À l'aide de ce théorème, on montre que $\widehat{v}$ est algébrisable, i.e. il existe un S-schéma de type fini X_a, un point $x \in X_a$ de corps résiduel k, et un élément $\xi \in F(X_a)$ tel que (X_a, x, ξ) est une déformation verselle de a, i.e. il existe un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{X_a,x}$ tel que $\widehat{v}$ est induite par ξ. Pour cette étape voir [Ar2], théorème 1.6.

Enfin, Artin montre dans [Ar3], paragraphe 4, que sous les conditions de compatibilité (Ét), (Comp) et (Const), le fait d'être une déformation verselle est une condition ouverte, c'est-à-dire que quitte à restreindre X_a à un ouvert, ses points définissent encore des déformations verselles de leur image dans F. On a vu plus haut que ceci signifie que $X_a \to F$ est lisse, et on obtient ainsi l'atlas local désiré.

4.2 Commentaires.

- La démonstration montre que si on a des déformations *uni*-verselles, on obtient des atlas $X_a \to F$ étales et donc un champ de Deligne-Mumford.

- Dans la version originale du théorème d'Artin (cf [Ar3]), S était un schéma de type fini sur un corps ou un anneau de valuation discrète excellent. Cette restriction était rendue nécessaire par les limites de la désingularisation de Néron, pour la preuve du théorème d'approximation 1.12 de [Ar1]. Par la suite, ces limitations ont été levées par Popescu (on parle maintenant de désingularisation de Néron-Popescu). Utilisant ce résultat, B. Conrad et A. de Jong [CJ] ont montré que le théorème d'Artin était valable pour tout schéma excellent S.

- la théorie d'obstructions est traitée comme une donnée extrinsèque à F par Artin, qui dit « we do not know to what extent a theory of obstructions is determined by the groupoid F » [Ar3]. Par la suite, Olsson [O1] a prouvé que si F est algébrique, alors on peut en effet produire une théorie d'obstructions pour F en posant $\mathcal{O}_a(M) = \mathrm{Ext}^1(La^*\mathcal{L}_{F/S}, M)$. (L'expression de $\mathcal{O}_a(M)$ n'est pas une surprise, voir 2.5 ; la difficulté est de construire $\mathcal{L}_{F/S}$ et la théorie de déformations sur les champs, car elle ne relève pas du formalisme d'Illusie.) Par ailleurs, Fantechi et Manetti [FM] ont caractérisé l'existence d'une théorie d'obstructions par une condition de type Schlessinger.

- si j'ai bien lu [Ar3], paragraphe 4, il suffit de se donner une théorie de déformations pour les A_0 intègres. L'endroit où on utilise cela est pour montrer que la versalité est une condition ouverte, en disant que si ce n'était pas vrai en $x \in X_a$, alors il existerait un fermé $Y \subset X_a$, que l'on peut supposer irréductible, et un ensemble dense de points « non versels » dans Y. L'anneau de fonctions A_0 de Y est intègre, et c'est pour cet anneau qu'on utilise la condition (Const) pour aboutir à une contradiction.

5 Exemples d'application aux constructions d'espaces de modules

Il est utile de signaler que déjà dans le cas des faisceaux fppf, les critères d'Artin donnent des résultats extrêmement importants de représentabilité par des espaces algébriques, et les exemples abondent. Plus généralement ces critères montrent que la catégorie des espaces algébriques et la 2-catégorie des champs algébriques vérifient les propriétés que l'on attend d'elles : elles sont à peine plus grosses que la catégorie des schémas, et closes pour un certain nombre de constructions de géométrie algébrique.

5.1 Foncteur Quot. [Ar2], § 6. Soit $f : X \to S$ un morphisme localement de présentation finie d'espaces algébriques, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, et pour tout T/S, soit $Q(T)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients de $\mathcal{F}_T$ qui sont de présentation finie, plats, à support propre sur T. Alors Q est représentable par un espace algébrique localement de présentation finie sur S, séparé si f l'est.

5.2 Foncteur de Picard. [Ar2], § 7. Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces algébriques qui est localement de présentation finie, propre, plat et de dimension cohomologique 0. Alors le foncteur de Picard $P = R^1 f_* \mathbb{G}_m$ est représentable par un espace algébrique localement de présentation finie sur S.

5.3 Champ des morphismes entre deux champs. Aoki [Ao1], [Ao2], Olsson [O2]. Soient F, F' des champs de présentation finie sur S. Supposons F propre et plat ; et F' séparé ou $F' = B\mathbb{G}_m$. Alors le champ $\mathcal{H}om_S(F, F')$ des 1-morphismes $F_T \to F'_T$ est un champ algébrique. Si de plus F et F' sont à diagonale finie, et il existe un morphisme fini plat de présentation finie et surjectif $X \to F$ depuis un espace algébrique X, alors $\mathcal{H}om_S(F, F')$ est localement de présentation finie à diagonale séparée et quasi-compacte.

Un exemple est le champ de Picard d'un champ propre et plat $\mathcal{P}ic_{F/S} = \mathcal{H}om_S(F, B\mathbb{G}_m)$. Un autre exemple est le champ tangent d'un champ séparé $T_{F/S} = \mathcal{H}om_S(S[\epsilon]/(\epsilon^2), F)$.

5.4 Champ de Picard d'un champ algébrique. Aoki [Ao1], [Ao2], Brochard [B]. Soit F un champ algébrique propre et plat sur S, alors le champ de Picard $\mathcal{P}ic(F/S)$ est un champ algébrique. Si S est nœthérien et F plat et de dimension cohomologique 0, alors $\mathcal{P}ic(F/S)$ est quasi-séparé sur S.

6 Présentations plates pour un champ

On ne peut clore cet exposé sans citer un autre résultat important d'Artin [Ar3], indépendant de celui discuté au-dessus (et bien plus facile), mais qui a sa place dans la même boîte à outils du « fabriquant d'espaces de modules ». Il s'agit du premier résultat démontré dans le chapitre consacré aux critères d'Artin dans le livre de Laumon et Moret-Bailly (mais à mon sens, il ne s'agit pas à proprement parler de ce qu'on appelle les critères d'Artin) :

Théorème ([Ar3], théorème 6.1) *Soit F un S-champ pour la topologie* fppf *à diagonale représentable et de type fini, tel qu'il existe un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie $X \to F$ depuis un schéma X. Alors F est un S-champ algébrique.*

Pour la preuve, on peut lire Laumon et Moret-Bailly. Une application est l'algébricité de BG, le champ classifiant des torseurs sous un groupe G fidèlement plat et localement de présentation finie. Voici d'autres exemples d'application :

6.1 Quotient par une relation d'équivalence plate. [Ar3]. Soit X un espace algébrique localement de type fini sur S. Soit $R \to X \times_S X$ une relation déquivalence de type fini telle que les projections $R \to X$ sont plates. Alors le faisceau quotient X/R est un espace algébrique.

Un exemple de telle relation d'équivalence est la relation $G \times_S X \to X \times_S X$ induite par l'action d'un groupe fidèlement plat et localement de présentation finie agissant librement. Une conséquence de 5.6 est que dans la catégorie des S-espaces algébriques, tout S-morphisme $X' \to X$ fidèlement plat et localement de présentation finie est de descente effective. Ceci montre que du point de vue de la descente, la catégorie des espaces algébriques corrige certains défauts de la catégorie des schémas.

6.2 Quotient d'un champ algébrique par un groupe. [Ar3], Romagny [Ro]. Soit F un S-champ algébrique et G un groupe fidèlement plat et localement de présentation finie agissant sur F. Alors le champ quotient F/G est un champ algébrique et le morphisme $F \to F/G$ est un G-torseur.

Le cas traité par Artin est le cas où $F = S$, on obtient le champ classifiant BG. L'énoncé ci-dessus cache une difficulté, qui est de clarifier la notion d'action d'un groupe sur un champ (pour plus de détails, voir [Ro]). Comme exemples, on a le champ classifiant les courbes avec n points marqués non ordonnés $\mathcal{M}_{g,(n)} = \mathcal{M}_{g,n}/\mathfrak{S}_n$, la courbe modulaire $\mathcal{X}_0(N) = \mathcal{X}_1(N)/G$ avec $G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, etc.

References

[Ao1] M. Aoki, *Hom stacks*, Manuscripta Math. 119 (2006), no. 1, 37–56.

[Ao2] M. Aoki, *Erratum: "Hom stacks"*, Manuscripta Math. 121 (2006), no. 1, 135.

[Ar1] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. Math. IHES No. 36, 1969, 23–58.

[Ar2] M. Artin, *Algebraization of formal moduli I*, Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira) pp. 21–71 (1969), Univ. Tokyo Press.

[Ar3] M. Artin, *Versal deformations and algebraic stacks*, Invent. Math. **27** (1974), 165–189.

[B] S. Brochard, *Foncteur de Picard d'un champ algébrique*, thèse, et prépublication arXiv:0711.4545.

[CJ] B. Conrad, A. J. de Jong, *Approximation of versal deformations*, J. Algebra 255 (2002), no. 2, 489–515.

[FM] B. Fantechi, M. Manetti, *Obstruction calculus for functors of Artin rings, I*, J. Algebra 202 (1998), no. 2, 541–576.

[O1] M. Olsson, *Deformation theory of representable morphisms of algebraic stacks*, Math. Z. 253 (2006), no. 1, 25–62.

[O2] M. Olsson, *Hom-stacks and restriction of scalars*, Duke Math. J. 134 (2006), no. 1, 139–164.

[Ri] D. S. Rim, *Formal deformation theory*, Sem. Geom. algebrique Bois-Marie 1967-1969, SGA 7 I, No.6, Lect. Notes Math. 288, 32-132 (1972).

[Ro] M. Romagny, *Group actions on stacks and applications*, Michigan Math. J. 53 (2005), no. 1, 209–236.

[S] M. Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 130, 1968, 208–222.