Modules des courbes à spin

Voici un exposé de la construction d'une compactification de l'espace de modules des courbes à spin d'après :

[J1] T. Jarvis, *Torsion-free sheaves and moduli of generalized spin curves*, Comp. Math. 110 (1998), n°3, 291–333.

[J2] T. Jarvis, *Geometry of the moduli of higher spin curves*, Int. J. Math. 11 (2000), n°5, 637–663.

[AJ] D. Abramovich, T. Jarvis, *Moduli of twisted spin curves*, Proc. AMS 131 (2003), n°3, 685–699.

Toutes les variétés et les champs considérés sont définis sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. On va étudier deux compactifications (isomorphes) pour le champ des courbes à spin lisses. Bien définir les objets classifiés est déjà assez compliqué et on essaiera de le faire proprement. C'est le critère valuatif de propreté qui suggère les définitions des courbes nodales à spin ; on croise ensuite les doigts pour que le champ obtenu soit lisse. Comme on est motivé par le désir de compactifier nous vérifierons que les champs obtenus sont propres, et je vous demanderai de me croire ou de lire les articles pour la lissité.

1 Brefs rappels sur les champs algébriques de Deligne-Mumford

1.1 *Champs.* La structure de « variété » d'un champ algébrique de Deligne-Mumford est donnée par un atlas i.e. un morphisme étale et surjectif $\mathcal{U} \to \mathcal{M}$ (en analogie avec le cas des schémas où l'atlas est donné par un morphisme $\mathcal{U} \to X$ avec $\mathcal{U}$ une union disjointe d'ouverts de X.) Localement sur $\mathcal{M}$, il existe des cartes $U \to \mathcal{M}$ qui sont des variétés (lisses si le champ $\mathcal{M}$ l'est) avec action d'un groupe fini G. Sur cette carte, le champ est isomorphe au champ, habituellement noté $[U/G]$, qui classifie les couples (E, f) composés d'un G-fibré principal E et d'une application $f\colon E \to U$ qui envoie E de manière équivariante dans U. Il faut penser à de tels couples comme à des G-orbites dans U. Un exemple de tel champ est le quotient du point par un groupe fini, noté $BG := [*/G]$.

1.2 *Espaces modulaires.* Un espace modulaire pour un champ algébrique de type fini $\mathcal{M}$ est un morphisme $f\colon \mathcal{M} \to M$ vers une variété algébrique M, qui induit une bijection sur les classes d'isomorphisme de points géométriques, et qui est universelle pour les morphismes de $\mathcal{M}$ vers des variétés. Sur une carte où $\mathcal{M} \simeq [U/G]$ on a $M \simeq U/G$, par exemple le champ BG a pour espace modulaire grossier le point, on dit à cause de cela que c'est une *gerbe*. Par un résultat de Keel et Mori, tout champ de Deligne-Mumford séparé a un espace modulaire grossier. Un champ est une gerbe au-dessus de son espace modulaire grossier.

1.3 *Déformations infinitésimales.* Supposons un champ $\mathcal{M}$ construit comme un champ classifiant pour des objets d'un certain type, disons les courbes de genre g pour faire simple. Étant donnée une courbe représentant un point $[C] \in \mathcal{M}$, la déformation universelle de C est une famille définie sur le spectre d'une $\mathbb{C}$-algèbre locale complète A, qui n'est autre qu'une « carte infinitésimale » du champ en $[C]$. Le champ est lisse en $[C]$ si et seulement si l'algèbre A est une algèbre de séries formelles.

2 Courbes lisses avec structure spin

Fixons g, n tels que $2g-2+n>0$, $r \geq 2$ et $m=(m_1,\ldots,m_n)$ un n-uplet d'entiers.

Soit $X \overset{p_i}{\rightleftarrows} S$ $(1 \leq i \leq n)$ une courbe lisse marquée. Quand $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X on note $\mathcal{F}(-m) := \mathcal{F} \otimes (-\sum m_i p_i)$. Soit $\omega := \omega_{X/S}$ le faisceau dualisant.

Définition 2.1 Une structure r-spin de type m sur X/S est un couple (L, b) avec

- L un fibré en droites sur X,
- $b\colon L^{\otimes r} \to \omega(-m)$ un isomorphisme.

Remarques 2.2

- Historiquement $r=2$ d'où la terminologie "spin".
- On peut remplacer ω par n'importe quel fibré en droites K défini sur $\mathcal{M}_g$ ou $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Définition 2.3 Un isomorphisme entre deux courbes à spin lisses X, X' sur S est un couple (τ, ϵ) avec $\tau\colon X \xrightarrow{\sim} X'$ et $\epsilon\colon \tau^*L' \xrightarrow{\sim} L$ tels que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\tau^*(L'^{\otimes r}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\tau^* b"'] & (\tau^*L')^{\otimes r} \arrow[r, "\epsilon^{\otimes r}"] & L^{\otimes r} \arrow[d, "b"] \\
\tau^*\omega'(-m) \arrow[rr, "can"] & & \omega(-m)
\end{tikzcd}$$

Les courbes à spin lisses, et leurs isomorphismes définis ci-dessus forment une catégorie $\mathcal{M}_{g,n}^{1/r,m}$. (C'est la notation qui semble s'être imposée après $\mathfrak{S}_{g,n}^{1/r,m}$ [J2].) Pour $m' \equiv m \ (r)$ on voit que $\mathcal{M}_{g,n}^{1/r,m'} \simeq \mathcal{M}_{g,n}^{1/r,m}$.

Théorème 2.4 *La catégorie $\mathcal{M}_{g,n}^{1/r,m}$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford lisse et le morphisme $\mathcal{M}_{g,n}^{1/r,m} \to \mathcal{M}_{g,n}$ est un revêtement fini étale de degré r^{2g}. (Après extension étale c'est un torseur sous $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{2g}$.)*

Dans la suite je noterai parfois simplement $\mathcal{M}_{g,n}^{r}$ pour $\mathcal{M}_{g,n}^{1/r,m}$.

3 Les réseaux de racines à la Jarvis

3.1 Une première observation

Au bord de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ il n'y a plus assez de fibrés en droites. Soit en effet X une courbe de genre g (par exemple sur $\mathbb{C}$) et $\widetilde{X}$ sa normalisée, de genre $\widetilde{g}$. Soit Γ le graphe dual de X et $h := h^1(\Gamma)$. On sait que $g = \widetilde{g} + h$ et on a une suite exacte

$$0 \to {}_{(r)}H^1(\Gamma) \to {}_{(r)}\operatorname{Pic}(X) \to {}_{(r)}\operatorname{Pic}(\widetilde{X}) \to 0$$

Donc $|{}_{(r)}\operatorname{Pic}(X)| = r^{2\widetilde{g}} r^h = r^{2\widetilde{g}+h} = r^{2g-h} < r^{2g}$. Autre façon de le voir : topologiquement si une courbe dégénère et acquiert un noeud, on voit qu'il y a un lacet qui est contracté donc on perd un point de H^1. Il faut donc aller chercher des faisceaux plus « dégénérés ».

En faisant dégénérer les couples (X, L) avec X courbe lisse et $L \to X$ un fibré en droites on est amené (Caporaso etc...) à considérer comme points GIT-semi-stables des couples $(\widetilde{X}, L)$ avec

- $\widetilde{X}$ nodale dont toutes les courbes exceptionnelles sont disjointes (une CE est une composante $E \simeq \mathbb{P}^1$ ayant ≤ 2 points de raccord avec le reste de la courbe),
- $L \to \widetilde{X}$ fibré en droites de degré 1 sur toute CE de $\widetilde{X}$.

De telles $\widetilde{X}$ ont un groupe d'automorphisme infini, et si on contracte les CE via $\rho\colon \widetilde{X} \to X$ on tombe sur une courbe stable avec un faisceau *sans torsion* $\rho_* L$ sur X.

3.2 Faisceaux sans torsion

Utilisons les notations LL pour "localement libre" et ST pour "sans torsion".

Définition 3.1 (Faltings, [J1] § 2.1 et 3.2) Soit A l'anneau local d'un point dans une courbe. On dit qu'un A-module de type fini M est *sans torsion* s'il n'a pas de premier associé de hauteur 1.

Soit $X \to S$ une courbe nodale. On appelle module sans torsion sur X/S un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie $\mathcal{F}$, plat sur S, et tel que $\mathcal{F}_s$ est sans torsion sur $\mathcal{O}_{X_s}$ pour tout $s \in S$.

Si S est un point on appelle rang de $\mathcal{F}$ son rang aux points génériques des composantes irréductibles de X (c'est bien défini, cf ci-dessous).

Si A est l'anneau d'un point lisse alors cela veut juste dire "sans torsion" au sens usuel (et alors M est plat donc loc. libre). Les modules qui vont nous intéresser particulièrement sont les modules ST sur l'anneau local d'un point double. Si $A = k[[x, y]]/xy$ alors 3.1 veut dire que le seul $z \in M$ annulé par $\mathfrak{m} := (x, y)$ est 0. Un exemple est $M = \widetilde{A}$, la normalisation de A, qui n'est pas A-plat.

Proposition 3.2 *Soit* $A = k[[x, y]]/xy$ *et* M *un* A*-module. LCSSE :*

(1) M *est sans torsion*

(2) $M \hookrightarrow M \otimes_A \widetilde{A} \simeq M/x \oplus M/y$

(3) $M \hookrightarrow S^{-1}M$ *où* $S \subset A$ *est l'ensemble des non diviseurs de zéro.*

Le (2) signifie qu'on peut voir M comme un sous-module de son pullback sur la normalisée de la courbe, et le point (3) siginifie qu'on peut aussi le voir comme un sous-module de ses sections méromorphes.

Démonstration : (1) et (2) sont deux façons de dire la même chose.
Pour (2) $\Rightarrow$ (3) soit $z \in M$ tel qu'il existe $s \in S$ avec $sz = 0$. Si $s \in A^\times$ alors $z = 0$ et c'est fini. Sinon on peut écrire $s = xf(x) + yg(y)$ avec $f \neq 0$ et $g \neq 0$ (car $s \nmid 0$) donc $s = x^\alpha u(x) + y^\beta v(y)$ avec $\alpha, \beta \geq 1$ et u, v unités. De $sz = 0$ on tire $x^\alpha uz = -y^\beta vz$ qui est donc un élément annulé par x et par y, donc nul par hypothèse. Donc $x^\alpha z = y^\beta z = 0$. Si $\alpha \geq 1$ alors $x^{\alpha-1}z$ est annulé par x et par y, donc nul par hypothèse. On obtient en itérant $xz = yz = 0$ donc $z = 0$.
Enfin (3) $\Rightarrow$ (1) car si $xz = yz = 0$ on a $(x - y)z = 0$ donc $z = 0$ car $x - y \in S$. □

Remarque 3.3 Sur $A = k[[x, y]]/xy$ tout module ST est isomorphe à $A^m \oplus \widetilde{A}^n$ (exercice).

3.3 Image directe d'un fibré par contraction

On va voir sur quels faisceaux ST on tombe en étudiant la structure locale d'une contraction $\rho\colon \widetilde{X} \to X$ comme dans 3.1, dans un voisinage sur la base et dans la courbe espace total. Pour simplifier et avec la vérification du critère valuatif de propreté en ligne de mire, on regarde une famille dont la base est un germe de courbe : soit R un anneau de valuation discrète d'uniformisante τ. Soit un point double qui se lissifie sur la fibre générique :

$$X = \mathrm{Spec}(A) \qquad \text{où} \qquad A = \frac{R[[x,y]]}{xy-\tau^r}$$

Le voisinage de la CE avant contraction est :

$$\widetilde{X} = \mathrm{Proj}\left(\frac{A[\alpha,\beta]}{x\alpha-\tau^v\beta, y\beta-\tau^u\alpha}\right)$$

On voit que nécess. $u+v=r$ l'épaisseur du point double. Sur $\widetilde{X}$ il y a un $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1)$ qui est engendré par α (resp. β) là où cette section est non nulle. Le lemme suivant dû à Cornalba nous montre que la restriction de $\widetilde{X}$ à E définit un isomorphisme $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \simeq \mathrm{Pic}(E) \simeq \mathbb{Z}$:

Lemme 3.4 (Cornalba, [J1] 3.1.3) *Soit L un fibré en droites sur une courbe semi-stable $X \to S$ tel que $L_{|E} \simeq \mathcal{O}_E$ sur une CE d'une fibre X_s. Alors il existe un voisinage S' du point $s \in S$ tel que L est trivial sur un voisinage de E dans $X_{S'}$.* □

Il n'y a donc que les puissances de $\mathcal{O}(1)$, et en ce qui concerne leurs poussés en avant on a :

Lemme 3.5 ([J1] 3.1.4) *Soit $L = \mathcal{O}(n)$ sur $\widetilde{X}$.*

(1) $\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_X$

(2) *pour $n \geq 0$, ρ_*L est plat sur R et commute au changement de base.*

(3) *pour $n \geq 0$, ρ_*L est sans torsion ssi $n = 0$ ou 1.*

Le module de sections globales de $\rho_*\mathcal{O}(1)$ est le module ST1

$$E_{u,v} := \langle\, \xi_1, \xi_2 \,|\, \tau^v\xi_1 = x\xi_2,\ \tau^u\xi_2 = y\xi_1 \,\rangle$$

Un cas particulier est celui du module libre de rang 1 (obtenu pour $uv = 0$) que, pour des raisons de cohérence de notations, on désignera et présentera par

$$E_{0,0} := \langle\, \xi_1, \xi_2 \,|\, \xi_1 = \xi_2 \,\rangle$$

Lemme 3.6 ([J1] 3.1.5) *Il y a une application $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(r) \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ donnée par*

$$\begin{gathered} \alpha^{\otimes r} \mapsto y^v \\ \beta^{\otimes r} \mapsto x^u \end{gathered}$$

qui induit un morphisme $c\colon (\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1))^r \to \mathcal{O}_X$. La longueur de $\mathrm{coker}(c)$ en le point double de la fibre spéciale est égale à $r-1$.

C'est ce morphisme (application puissance r-ème) qui indique comment dégénère l'isomorphisme $L^{\otimes r} \simeq \omega$. Étant donnés g, r, m comme auparavant et une courbe stable marquée $X \to S$ on est amené à faire la définition suivante :

Définition 3.7 Soit $\mathcal{F}$ un faisceau ST1 sur $X \to S$. Une quasi-racine r-ème de $\mathcal{F}$ de type m est un couple $(\mathcal{E}, c)$ où $\mathcal{E}$ est un faisceau ST1 sur X et $c\colon \mathcal{E}^{\otimes r} \to \mathcal{F}(-m)$ est un morphisme tel que

- $r\deg(\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{F}) - \sum m_i$,
- en un point où $\mathcal{E}$ est LL, c est un isomorphisme,
- en un point où $\mathcal{E}$ n'est pas LL, la longueur de $\mathrm{coker}(c)$ est égale à $r-1$.

Mais on va voir que la structure de ces puissances r-èmes ne peut pas être aussi simple, et en fait elle est singulièrement plus compliquée.

3.4 Une deuxième observation

Si on veut avoir $\overline{\mathcal{M}}^r_{g,n}$ lisse il est facile de voir que les flèches de "puissance r/d-ème"

$$\mathcal{M}^r_{g,n} \to \mathcal{M}^d_{g,n}$$

définies pour tout $d|r$, doivent s'étendre aux compactifiés.

(Argument : on considère le produit fibré $\mathcal{X} := \overline{\mathcal{M}}^r_{g,n} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \overline{\mathcal{M}}^d_{g,n}$ ci-dessous. Soit i l'application graphe de la puissance d-ème et soit $\mathcal{Y}$ l'adhérence réduite de l'image de i.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"] & \overline{\mathcal{M}}^d_{g,n} \arrow[d, "u"] \\ \mathcal{M}^r_{g,n} \arrow[ur, bend left, "i"] \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{M}}^r_{g,n} \arrow[r, "f"] & \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \end{tikzcd}$$

Le théo principal de Zariski montre que le morphisme $u'_{|\mathcal{Y}}$ est un iso et $f' \circ (u'_{|\mathcal{Y}})^{-1}$ répond à la question.)

Or avec des faisceaux ST comme dans la définition 3.7 une racine r-ème ne détermine plus des racines d-èmes : le faisceau $\mathcal{E}^{\otimes r/d}$ n'est même pas nécessairement ST...

3.5 Structures r-spin

Ces éléments expliquent la définition qui suit. Soient toujours g, r, m et $X \to S$ une courbe stable marquée.

Définition 3.8 ([J1] def. 2.1.4 et 2.3.4) Une structure r-spin (ou réseau de racines r-èmes) de type m sur X/S est une collection $\{\mathcal{E}_d, c_{d,d'}\}$ composée de

- un faisceau sans torsion $\mathcal{E}_d$ pour chaque $d|r$,
- un isomorphisme $\mathcal{E}_1 \simeq \omega(-m)$,
- un morphisme $c_{d,d'} \colon \mathcal{E}_d^{\otimes d/d'} \to \mathcal{E}_{d'}$ pour chaque $d'|d|r$,

tels que

- $c_{d,d} = \mathrm{id}$,
- $c_{d',d''} \circ c_{d,d'}^{\otimes d'/d''} = c_{d,d''}$ pour chaque $d''|d'|d|r$,
- pour tous $d'|d|r$ soit m' le uplet dont les coordonnées sont les restes modulo d/d' des coordonnées de m. Alors $c_{d,d'}$ se factorise à travers $\mathcal{E}_{d'}(-m')$ en une quasi-racine d/d'-ème de $\mathcal{E}_{d'}$ de type m',
- en tout point nodal $x \in X_s$ posons $R := \mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{S,s}$ et $A := \mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$, alors il existe des isomorphismes $\mathcal{E}^{\mathrm{sh}}_{d,x} \simeq E_{u_d,v_d}$ et $\mathcal{E}^{\mathrm{sh}}_{d',x} \simeq E_{u'_d,v'_d}$ par lesquels $c_{d,d'}$ s'identifie à une *application puissance d/d'-ème* (définie plus bas). (On désigne par « $^{\mathrm{sh}}$ » le hensélisé strict.)

Remarque 3.9 Noter que seul le cas de la puissance r-ème a déjà été défini : ce que doit être la puissance d/d'-ème $E_{u_d,v_d} \to E_{u'_d,v'_d}$ n'est pas clair du tout. Dans [J1], Jarvis sort du chapeau un morphisme défini algébriquement, sans lien apparent avec la géométrie. Pour comprendre ce lien (qui existe !) il est préférable d'être un peu patient et de prendre le point de vue des fibrés en droites sur des courbes tordues que je présenterai dans le paragraphe suivant.

D'ici là donnons quand même le résultat de Jarvis. On note $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r,m}$ la catégorie des courbes stables avec réseau de racines r-èmes de type m.

Théorème 3.10 ([J2] th. 2.4.4) *La catégorie $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r,m}$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford propre et lisse et le morphisme $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r,m} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est un revêtement fini plat de degré r^{2g}. L'espace modulaire grossier $\overline{M}_{g,n}^{1/r,m}$ est une variété projective normale.* □

La preuve consiste à calculer l'anneau universel de déformation d'une courbe à spin. Il est à noter que ce revêtement n'est *pas* étale, et on sait décrire exactement le lien entre sa ramification au-dessus d'une courbe $(X, \mathcal{E}_d, c_{d,d'})$, et les singularités de le courbe (voir [J2] 2.4.2).

4 Courbes tordues d'Abramovich-Vistoli + Jarvis

Dans cette définition les structures spin sont encore des fibrés en droites dont la puissance r-ème est isomorphe au fibré canonique, mais sur des courbes tordues i.e. possédant une structure orbifold. Cette définition donne lieu à un champ algébrique isomorphe à $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r,m}$ comme on le verra.

4.1 Définitions

On définit d'abord les courbes tordues d'Abramovich-Vistoli (cf *Compactifying the space of stable maps*, J. AMS 15 (2002), n°1, 27–75), puis les structures spin dessus. Remarquer que le fait d'accepter une structure orbifold aux points marqués permet d'absorber les « poids » i.e. le type m (voir § 4.2).

Définition 4.1 Une courbe marquée tordue est la donnée de $(\mathcal{C} \to S, \mathcal{S}_i)$ où

(1) $\mathcal{C}$ est un champ de Deligne-Mumford propre, plat, de présentation finie et de dimension 1 sur S, et $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{C}$ sont des sous-champs fermés qui sont des gerbes étales sur S,

(2) l'espace modulaire grossier (C, S_i) est une courbe stable marquée et $\pi\colon \mathcal{C} \to C$ est un isomorphisme hors des noeuds et des points marqués,

(3) en un point géométrique $p \in \mathcal{C}$ d'image s dans la base, notons $R = \mathcal{O}_{S,s}^{sh}$ le hensélisé strict, alors la courbe a l'allure suivante :

- en un point ordinaire $\mathcal{C}^{sh} \simeq \mathrm{Spec}(R[z])^{sh}$,
- en un point marqué $\mathcal{C}^{sh} \simeq [U/\mu_l]$ où $U = \mathrm{Spec}(R[z])^{sh}$ et μ_l agit par $z \mapsto \zeta z$,
- en un noeud $\mathcal{C}^{sh} \simeq [U/\mu_l]$ où $U = \mathrm{Spec}(\frac{R[z,w]}{zw-t})^{sh}$ et μ_l agit par $z \mapsto \zeta z$, $w \mapsto \zeta^{-1} w$.

À cause de l'invariance du générateur dz/z sous l'action de μ_l on prendra plutôt le point de vue des racines r-èmes de $\omega_{\log} := \omega(\sum \mathcal{S}_i)$ (le faisceau dualisant logarithmique) de type $m - 1$ que celui des racines r-èmes de ω de type m.

Définition 4.2 ([AJ]) Une structure r-spin sur une courbe tordue $(\mathcal{C} \to S, \mathcal{S}_i)$ est la donnée de

- un fibré en droites fidèle $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$, ce qui veut dire qu'en un point p où la structure orbifold est non triviale le stabilisateur μ_l agit fidèlement sur la fibre $\mathcal{L}_p$. (Sur une carte $[U/\mu_l]$ de $\mathcal{C}$, un fibré en droites est donné par un fibré en droites μ_l-linéarisé sur U.)
- un isomorphisme $b\colon \mathcal{L}^{\otimes r} \to \omega_{\log}$.

Pour voir ce qui se passe et faire le lien avec les faisceaux ST de Jarvis nous allons décrire la structure de $\pi_*\mathcal{L}$ (sur la courbe espace modulaire grossier) aux points marqués et aux noeuds.

4.2 Description locale

4.2.1 Soit un point marqué p en lequel $\mathcal{C}^{\mathrm{sh}} \simeq [U/\mu_l]$ avec $U = \mathcal{S}pec(R[z])^{\mathrm{sh}}$. Soit $x = z^l$ une coordonnée sur $C = U/\mu_l$. Soit s un générateur semi-invariant de $\mathcal{L}$ tel que $s^r = dz/z$. Cela veut dire que μ_l agit par $s \mapsto \zeta^b s$ pour un $b < l$ qui est inversible modulo l, d'après l'hypothèse que le fibré en droites est fidèle ; de plus comme $s^r = dz/z$ est invariant alors $l|r$. Un monôme $z^a s$ est invariant ssi $a + b \equiv 0 \ (l)$ donc $\pi_* \mathcal{L}$ est engendré en $\pi(p)$ par $z^a s$ avec $a = l - b$. De plus

$$(z^a s)^r = z^{ar} dz/z = l^{-1} x^{ar/l} dx/x$$

donc on voit que localement $(\pi_* \mathcal{L})^r \simeq \omega(-mS)$ où $m = ar/l$ et S est la section marquée.

Soit un noeud p en lequel $\mathcal{C}^{\mathrm{sh}} \simeq [U/\mu_l]$ avec $U = \mathcal{S}pec(\frac{R[z,w]}{zw-t})^{\mathrm{sh}}$. Soient $x = z^l$ et $y = w^l$ des coordonnées sur $C = U/\mu_l$. Soit s un générateur semi-invariant de $\mathcal{L}$ tel que $s^r = \nu_*(dz/z - dw/w)$ où ν est la normalisée, i.e. $s \mapsto \zeta^b s$ pour un $b < l$ inversible mod l. Un monôme $z^a s$ resp. $w^{a'} s$ est invariant ssi $a + b \equiv 0 \ (l)$ resp. $-a' + b \equiv 0 \ (l)$. Donc $\pi_* \mathcal{L}$ est engendré par $\xi_1 := z^a s$ (où $a = l - b$) et $\xi_2 := w^b s$ soumis aux relations

$$t^b \xi_1 = z^b w^b \xi_1 = x \xi_2 \qquad \text{et} \qquad t^a \xi_2 = z^a w^a \xi_2 = y \xi_1$$

On reconnaît donc $(\pi_* \mathcal{L})_p \simeq E_{a,b}$.

4.2.2 *Le produit qui donne la puissance* d-*ème*. Étant donnés deux fibrés $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ on obtient par adjonction un morphisme $\pi_*\mathcal{L} \otimes \pi_*\mathcal{L}' \to \pi_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')$. Si on est sur un point double et $E_{a,b} := \pi_*\mathcal{L}$, $E_{a',b'} := \pi_*\mathcal{L}'$ alors $\pi_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \simeq E_{a'',b''}$ où a'' resp. b'' est le reste de $a + a'$ resp. $b + b'$ mod l. En termes de générateurs cela donne

$$E_{a,b} = \langle\, \zeta_1, \zeta_2 \,|\, \tau^b \zeta_1 = x\zeta_2,\ \tau^a \zeta_2 = y \zeta_1 \,\rangle$$

$$E_{a',b'} = \langle\, \xi_1, \xi_2 \,|\, \tau^{b'} \xi_1 = x\xi_2,\ \tau^{a'} \xi_2 = y \xi_1 \,\rangle$$

$$E_{a'',b''} = \langle\, \nu_1, \nu_2 \,|\, \tau^{b''} \nu_1 = x\nu_2,\ \tau^{a''} \nu_2 = y \nu_1 \,\rangle$$

et le morphisme $E_{a,b} \otimes E_{a',b'} \to E_{a'',b''}$ est donné ainsi. Supposons par exemple que $a + a' > l$, alors on trouve

$$\zeta_1 \otimes \xi_1 \mapsto x\nu_1, \qquad \zeta_1 \otimes \xi_2 \mapsto \tau^{b'} \nu_1, \qquad \zeta_2 \otimes \xi_1 \mapsto \tau^b \nu_1, \qquad \zeta_2 \otimes \xi_2 \mapsto \nu_2$$

Dans les autres cas $a + a' < l$ et $a + a' = b + b' = l$ on trouve des expressions similaires que je n'écris pas (cf [AJ]). En itérant ce produit on obtient $E_{a,b}^{\otimes d} \to E_{a',b'}$ pour un certain couple (a', b') bien déterminé. C'est la puissance d-ème qui doit entrer dans la définition 3.8.

4.3 Propreté du champ des courbes tordues avec r-spin

Pour des raisons sur lesquelles je ne veux pas m'étendre le champ des courbes tordues avec r-spin est noté $\mathcal{B}_{g,n}(\mathbb{G}_m, \omega_{\log}^{1/r})$. En guise de justification pour la définition des courbes tordues avec r-spin on va commencer par vérifier le critère valuatif de propreté :

Lemme 4.3 *Soit* R *un anneau de valuation discrète complet et* $(\mathcal{C}_K \to \mathrm{Spec}(K), \mathcal{S}_{i,K}, \mathcal{L}_K, b_K)$ *une courbe à spin sur le corps de fractions* K. *Alors après une éventuelle extension finie de* R *il existe une courbe à spin* $(\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(R), \mathcal{S}_i, \mathcal{L}, b)$ *qui l'étend.*

Démonstration : On sait qu'après une éventuelle extension finie de R l'espace modulaire grossier $(C_K, S_{i,K})$ s'étend en (C, S_i). Il reste à

- construire un champ $\mathcal{C}$ qui étend $\mathcal{C}_K$ (il suffit pour cela de donner la structure orbifold aux points marqués et aux noeuds). C'est facile et la nécessité d'accepter des courbes orbifold n'apparaît pas.

- étendre $\mathcal{L}_K$ et l'isomorphisme b_K. Ici on verra comment il est nécessaire de faire dégénérer la courbe en orbifold.

Soit $p \in S_i$ un point marqué dans la fibre spéciale et considérons un voisinage étale de p sur lequel $C \simeq \mathrm{Spec}(R[x])$. Sur la fibre générique il y a une carte de $\mathcal{C}_K$ au point marqué $x = 0$ de C_K donnée par $[U_K/\mu_l]$ où $U_K = \mathrm{Spec}(K[z])$, et $x = z^l$. Il est clair que l'action de μ_l s'étend de manière évidente sur $U := \mathrm{Spec}(R[z])$ et que $U/\mu_l \simeq C$. Donc la carte $[U/\mu_l]$ donne une structure orbifold bien définie en $\mathcal{S}_i$.

En un noeud de C on procède pareil pour donner une structure orbifold qui définit $\mathcal{C}$.

Il reste à étendre $\mathcal{L}_K$ et l'isomorphisme b_K. Partout où $\mathcal{C}$ est régulière on peut étendre le fibré. Les seuls points où $\mathcal{C}$ n'est pas un champ régulier sont les points doubles d'épaisseur $n \geq 2$ i.e.

$$\mathcal{C}^{\mathrm{sh}} \simeq [U/\mu_l] \qquad \text{avec} \qquad U = \mathrm{Spec}\left(\frac{R[z,w]}{zw - \pi^n}\right)^{\mathrm{sh}}$$

avec $t = \pi^n$ où π est une uniformisante de R. L'astuce est de considérer un revêtement régulier $U' \to U$ donné par

$$\mathrm{Spec}\left(\frac{R[z',w']}{z'w' - \pi}\right) \to \mathrm{Spec}\left(\frac{R[z,w]}{zw - \pi^n}\right)$$

avec $z = z'^n$ et $w = w'^n$. On a bien sûr $U = U'/\mu_n$ et comme U' est régulier le fibré $(\mathcal{L}_K)_{|U'_K}$ s'étend en $\mathcal{L}'$ sur U'. Soit $\mu_d \subset \mu_n$ le sous-groupe qui agit trivialement sur $\mathcal{L}'$ au point p. Alors $\mathcal{L}'$ descend en un fibré $\mathcal{L}$ sur $V := U'/\mu_d$ qui est le revêtement minimal de U sur lequel $\mathcal{L}_K$ s'étend en un fibré fidèle. Donc, en modifiant la structure orbifold $[U/\mu_l]$ de $\mathcal{C}$ en p en $[V/\mu_{ln/d}]$ on obtient une extension de $\mathcal{L}_K$ à $\mathcal{C}$.

Enfin il reste à étendre b. Comme $\mathcal{L}^{\otimes r}$ et $\omega_{\log}$ sont isomorphes sur la fibre générique, il est facile de voir que $\mathcal{L}^{\otimes r} \otimes \omega_{\log}^{-1}$ est le fibré associé à un diviseur de Cartier supporté dans la fibre spéciale, c'est-à-dire que pour certaines composantes irréductibles $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C} \otimes_R k$ on a $\mathcal{L}^{\otimes r} \simeq \omega_{\log}(\sum a_i \mathcal{C}_i)$. Quelques calculs d'intersections dans un lemme de Jarvis montrent qu'on peut supposer que tous les coefficients a_i sont divisibles par r, donc l'isomorphisme b s'étend, quitte à changer $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-\sum \frac{a_i}{r}\mathcal{C}_i)$. (Lire [J1] lemma 4.2.3, à transcrire dans le cadre des courbes orbifolds. Observer que la courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de composante exceptionnelle. Il suffit en fait de tordre $\mathcal{L}$ par un multiple de $\mathcal{O}(\sum \mathcal{C}_i)$, la somme de toutes les composantes irréductibles $\mathcal{C}_i$ étant le diviseur principal associé à π.) □

Au vu de la description locale de 4.2 il est clair que, en associant à toute courbe à spin tordue $(\mathcal{C} \to S, \mathcal{S}_i, \mathcal{L}, b)$ la courbe stable (C, S_i) qui est l'espace modulaire de $(\mathcal{C} \to S, \mathcal{S}_i)$, munie du réseau de racines $\pi_*\mathcal{L}^{\otimes d}$ avec les applications puissances d/d'-èmes induites, on définit un foncteur $\mathcal{B}_{g,n}(\mathbb{G}_m, \omega_{\log}^{1/r}) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r}$ où on a posé $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r} := \coprod_{0 \leq m_i < r} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r,m}$.

Théorème 4.4 ([AJ] th. 4.3.1) *Ce foncteur induit un isomorphisme $\mathcal{B}_{g,n}(\mathbb{G}_m, \omega_{\log}^{1/r}) \simeq \overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/r}$.*

Démonstration : On montre d'abord que $\mathcal{B}_{g,n}(\mathbb{G}_m, \omega_{\log}^{1/r})$ est lisse. Ensuite on montre que le foncteur est un morphisme fini, birationnel (c'est clair). Comme il est à valeurs dans un champ normal c'est un isomorphisme. □

5 Annexe : modules de morphismes entre deux modules ST1

L'analogue espéré de la puissance d-ème $L \to L^{\otimes d}$ sera un morphisme $E_{u,v}^{\otimes d} \to E_{u',v'}$ où $E_{u',v'}$ est un module ST1. Le problème qui se pose ici est qu'il y a beaucoup de tels morphismes – comme on le montre maintenant – et celui qui est proposé par Jarvis donne l'impression de « sortir du chapeau ». (La bonne façon de le comprendre est de parler de courbes tordues, objets introduits par Abramovich et Vistoli.)

Lemme 5.0.1 *Soit* $M := \mathrm{Hom}_A(E_{u,v}^{\otimes d}, E_{u',v'})$ *où* $E_{u,v}$ *et* $E_{u',v'}$ *sont deux modules ST1 avec* $E_{u,v}$ *non trivial. Alors* M *est un module ST1 non trivial.*

Démonstration : Il est clair que M est plat sur R car sans R-torsion. D'autre part :

- $M_K = \mathrm{Hom}_{A_K}((E_{u,v,K})^{\otimes d}, E_{u',v',K}) \simeq \mathrm{Hom}_{A_K}(A_K, A_K) \simeq A_K$
- Comme $E_{u,v}$ est non trivial, $E_{u,v,k}$ est isomorphe comme module au normalisé de A_k que nous notons N. On a $N \simeq A_k/x \oplus A_k/y$ donc

  $$N^{\otimes d} \simeq \bigoplus_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (A_k/x)^{\otimes i} \otimes (A_k/y)^{\otimes d-i} \simeq A_k/x \oplus k^{\oplus 2^d-2} \oplus A_k/y \simeq N \oplus k^{\oplus 2^d-2}$$

  (on utilise le fait que $A_k/x \otimes A_k/x \simeq A_k/x$ et $A_k/x \otimes A_k/y \simeq k$, les produits tensoriels étant sur A_k). Que $E_{u',v'}$ soit trivial ou non on calcule facilement $\mathrm{Hom}(k, E_{u',v',k}) = 0$ et $\mathrm{Hom}(N, E_{u',v',k}) = N$. En conséquence $M_k \simeq \mathrm{Hom}(N \oplus k^{\oplus 2^d-2}, E_{u',v',k}) \simeq N$.

On conclut que M est ST1. □