Théorèmes de comparaison et représentations galoisiennes

Matthieu Romagny

5 janvier 2014

Résumé. Cette note présente les théorèmes de comparaison des cohomologies p-adiques et le formalisme général des anneaux de périodes et de la classification des représentations galoisiennes, en donnant un panorama des résultats et conjectures principaux.

Notations. Soit K un corps discrètement valué complet de caractéristique 0, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. Soit $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, σ son endomorphisme de Frobenius, K_0 son corps de fractions et $e = [K : K_0]$ l'indice de ramification absolu. Soit X une variété propre et lisse sur K.

1 Cohomologies

On attache à X des algèbres graduées de cohomologie $H^*_\tau(X) = \oplus_i H^i_\tau(X)$ qui sont des espaces vectoriels sur un corps K_τ munis de structures supplémentaires, avec $\tau \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \text{ét}\}$.

1.1. La *cohomologie de Hodge* de X est définie par

$$H^i_{\mathrm{HT}}(X) := \bigoplus_j H^{i-j}(X, \Omega^j_{X/K}).$$

Nous utilisons la notation HT pour Hodge-Tate, en hommage au travail pionnier de Tate dans [Ta67]. Avec la graduation $\mathrm{Gr}^j\, H^i_{\mathrm{HT}}(X) = H^{i-j}(X, \Omega^j_{X/K})$, l'espace $H^i_{\mathrm{HT}}(X)$ est un objet de la catégorie

$$\mathrm{Grad}_K = \big\{K\text{-espaces vectoriels munis d'une } \mathbb{Z}\text{-graduation}\big\}.$$

1.2. La *cohomologie de de Rham* de X est définie par

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X) := \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_{X/K}).$$

Elle est munie de la *filtration de Hodge* $\mathrm{Fil}^j\, H^i_{\mathrm{dR}}(X) = \mathrm{im}(\mathbb{H}^i(X, \Omega^{\geqslant j}_{X/K}) \to \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_{X/K}))$ où

$$\Omega^{\geqslant j}_{X/K} = \big(0 \to \cdots \to 0 \to \Omega^j_{X/K} \to \Omega^{j+1}_{X/K} \to \dots\big) = \text{cran } j \text{ de la filtration bête de } \Omega^\bullet_{X/K}.$$

C'est donc un objet de la catégorie

$$\mathrm{Fil}_K = \big\{K\text{-espaces vectoriels munis d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée}\big\}.$$

On peut noter qu'en fait, par dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham en caractéristique 0 (voir par ex. Deligne [De68], th. 5.5), le morphisme $\mathbb{H}^i(X, \Omega^{\geqslant j}_{X/K}) \to \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_{X/K})$ est injectif, de sorte que $\mathrm{Fil}^j\, H^i_{\mathrm{dR}}(X) = \mathbb{H}^i(X, \Omega^{\geqslant j}_{X/K})$. En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à $0 \to \Omega^{\geqslant j+1}_{X/K} \to \Omega^{\geqslant j}_{X/K} \to \Omega^j_{X/K}[-j] \to 0$, on en déduit que le gradué associé de $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$ est $H^i_{\mathrm{HT}}(X)$.

1.3. Lorsque X a bonne réduction, la *cohomologie cristalline* de X est définie par

$$H^i_{\mathrm{cris}}(X) := K_0 \otimes_W H^i_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_0/W)$$

où $H^i_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_0/W)$ est la cohomologie cristalline relativement à W de la fibre spéciale d'un $\mathcal{O}_K$-modèle propre et lisse $\mathscr{X}$ de X. D'après un résultat de Gillet et Messing ([GM87], cor. B.3.6) le K_0-espace vectoriel $H^i_{\mathrm{cris}}(X)$ ne dépend pas de $\mathscr{X}$. Il est muni d'un endomorphisme bijectif σ-semi-linéaire φ appelé Frobenius, induit par le Frobenius absolu de $\mathscr{X}_0$. Par ailleurs, Berthelot et Ogus ([BO83], cor. (2.5)) ont construit un isomorphisme canonique

$$\rho_{\mathrm{cris}} : H^i_{\mathrm{cris}}(X) \otimes_{K_0} K \longrightarrow H^i_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K = H^i_{\mathrm{dR}}(X)$$

qui permet de transporter sur $H^i_{\mathrm{cris}}(X) \otimes_{K_0} K$ la filtration de Hodge. Finalement $H^i_{\mathrm{cris}}(X)$ est un objet de la catégorie

$$\mathrm{MF}^{\varphi}_K = \left\{ \begin{array}{c} K_0\text{-espaces vectoriels munis d'un Frobenius bijectif } \sigma\text{-semi-linéaire, et dont} \\ \text{l'extension à } K \text{ est munie d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée} \end{array} \right\}.$$

Les objets de MF^{φ}_K sont appelés *φ-modules filtrés* (une autre terminologie est *isocristaux de Hodge* : un isocristal est un K_0-e.v. avec Frobenius bijectif, et le qualificatif *de Hodge* indique la présence d'une filtration) et notés typiquement $(D, \varphi, \mathrm{Fil})$.

1.4. Plus généralement, si X a réduction semi-stable, sa *cohomologie semi-stable* est définie par

$$H^i_{\mathrm{st}}(X) := K_0 \otimes_W H^i_{\text{log-cris}}(\mathscr{X}_0/W)$$

où $H^i_{\text{log-cris}}(\mathscr{X}_0/W)$ est la cohomologie log-cristalline de la fibre spéciale d'un $\mathcal{O}_K$-modèle propre semi-stable $\mathscr{X}$ de X, construite par Hyodo et Kato [HK89]. (Contrairement au cas de bonne réduction, on ne sait pas vérifier directement que $H^i_{\mathrm{st}}(X)$ ne dépend pas de $\mathscr{X}$.) C'est un K_0-espace vectoriel muni d'un Frobenius bijectif σ-semi-linéaire φ et d'un *opérateur de monodromie* linéaire nilpotent N liés par la relation

$$N\varphi = p\varphi N.$$

Pour chaque choix d'uniformisante π de $\mathcal{O}_K$, on dispose d'un isomorphisme

$$\rho_\pi : H^i_{\mathrm{st}}(X) \otimes_{K_0} K \longrightarrow H^i_{\mathrm{dR}}(X)$$

dont la dépendance en π s'exprime par $\rho_{\pi u} = \rho_\pi \circ \exp(\log(u)N)$, où $u \in \mathcal{O}_K^*$ et log est le logarithme, défini par projection sur les unités principales à l'aide du représentant de Teichmüller puis par la somme de la série usuelle. Lorsque X a bonne réduction, on a $N = 0$ et $\rho_\pi = \rho_{\mathrm{cris}}$ est indépendant de π. Via cet isomorphisme, l'espace $H^i_{\mathrm{st}}(X)$ récupère une filtration de Hodge indépendante de π et devient un objet de la catégorie

$$\mathrm{MF}^{(\varphi,N)}_K = \left\{ \begin{array}{c} K_0\text{-espaces vectoriels munis d'un Frobenius bijectif } \sigma\text{-semi-linéaire } \varphi \text{ et} \\ \text{d'un endomorphisme de monodromie nilpotent } N \text{ tels que } N\varphi = p\varphi N, \text{ et dont} \\ \text{l'extension à } K \text{ est munie d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée} \end{array} \right\}.$$

Les objets de $\mathrm{MF}^{(\varphi,N)}_K$ sont appelés *(φ, N)-modules filtrés* et notés typiquement $(D, \varphi, N, \mathrm{Fil})$.

1.5. La *cohomologie étale p-adique* de X est définie par

$$H^i_{\text{ét}}(X) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

C'est un objet de la catégorie

$$\mathrm{Rep}(G_K) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{Q}_p\text{-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une} \\ \text{action continue du groupe de Galois } G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \end{array} \right\}.$$

2 Anneaux de périodes et théorèmes de comparaison

Dans la situation comparable où X est propre lisse sur $K = \mathbb{Q}$, on dispose des variétés différentiables réelles $X(\mathbb{R})$ et $X(\mathbb{C})$. La première peut être « trop petite » (par exemple vide) ; regardons la deuxième, qui est de dimension réelle $2\dim(X)$. On sait comparer sa cohomologie de de Rham et sa cohomologie singulière (ou de Betti) grâce à un *isomorphisme de périodes* :

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

obtenu en intégrant les formes différentielles le long des cycles et en utilisant la dualité de Poincaré. De plus, le groupe de Galois $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ agit sur $H^i_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ via son action sur $X(\mathbb{C})$; il agit trivialement sur $H^i_{\mathrm{dR}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$, et par son action canonique sur $\mathbb{C}$. Un instant de réflexion permet de se convaincre que l'isomorphisme de périodes est $G_{\mathbb{R}}$-équivariant, ce dont on déduit qu'on peut retrouver la cohomologie de de Rham à partir de la cohomologie singulière par la formule :

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} (H^i_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{G_{\mathbb{R}}}.$$

On souhaite comparer les cohomologies de la section précédente selon le même modèle. On observe d'abord que la théorie de la cohomologie étale suggère qu'elle fournit le bon analogue algébrique de la cohomologie de Betti. Ensuite, on note que dans l'exemple donné sur $K = \mathbb{Q}$, il est bien sûr nécessaire de passer à un sur-anneau qui contient les anneaux de scalaires des deux cohomologies à comparer pour qu'existe un isomorphisme. Ces deux faits sont un guide pour la suite. Considérons maintenant l'une des cohomologies $\tau \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}\}$ et notons $K_\tau \in \{K, K, K_0, K_0\}$ son corps de scalaires. Le formalisme général imaginé par Fontaine consiste à construire une K_τ-algèbre intègre B_τ appelée *anneau de périodes* ou *anneau de Fontaine* (le « B » est l'initiale de Barsotti), munie d'une action de Galois et de structures supplémentaires correspondant à celles de τ, et d'essayer de construire un isomorphisme

$$\iota_\tau : H^i_\tau(X) \otimes_{K_\tau} B_\tau \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{ét}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_\tau$$

compatible aux actions de Galois (sur le seul facteur B_τ à la source, et diagonale au but) et aux structures suppplémentaires (structure produit tensoriel à la source, et sur le facteur B_τ au but). Fontaine veut aller plus loin et déduire $H^i_\tau(X)$ de $H^i_{\mathrm{ét}}(X)$, la réciproque étant a priori problématique puisque les différentes cohomologies ne transportent pas toutes autant d'information, comme on l'a vu (dans la section 1, les cohomologies sont introduites par ordre croissant de raffinement). Pour cela, il est naturel de considérer le foncteur sur les représentations $V \in \mathrm{Rep}(G_K)$ défini par

$$D_\tau(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_\tau)^{G_K},$$

où $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_\tau$ est muni de l'action diagonale de G_K (le « D » est l'initiale de Dieudonné). On a le dessin :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Rep}(G_K) \arrow[dll, bend right, "D_{\mathrm{HT}}"'] \arrow[dl, bend right, "D_{\mathrm{dR}}"] \arrow[dr, bend left, "D_{\mathrm{cris}}"'] \arrow[drr, bend left, "D_{\mathrm{st}}"] & & \\
\mathrm{Grad}_K & \mathrm{Fil}_K & & \mathrm{MF}^{\varphi}_K & \mathrm{MF}^{(\varphi,N)}_K
\end{tikzcd}$$

Partant d'un isomorphisme ι_τ comme ci-dessus, il est clair que pour que le foncteur D_τ envoie l'espace vectoriel sous-jacent à $H^i_{\mathrm{ét}}(X)$ sur l'espace vectoriel $H^i_\tau(X)$, il suffira que l'on ait :

$$B_\tau{}^{G_K} = K_\tau. \tag{AP$_1$}$$

Par définition de $D_\tau(V)$, on dispose d'un morphisme $\alpha_{\tau,V} : B_\tau \otimes_{K_\tau} D_\tau(V) \to B_\tau \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, $\lambda \otimes x \mapsto \lambda x$ qui est candidat à fournir un isomorphisme ι_τ pour les représentations dans la cohomologie de variétés algébriques. Notons C_τ le corps de fractions de B_τ. Il est facile de montrer que sous la condition :

$$B_\tau{}^{G_K} = C_\tau{}^{G_K}, \tag{AP$_2$}$$

l'application $\alpha_{\tau,V}$ est injective, donc $\dim_{K_\tau} D_\tau(V) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. (Ceci montre que D_τ tombe alors dans la sous-catégorie des objets de dimension finie, ce qui n'était pas clair a priori. Cependant on est amené à considérer aussi des objets de dimension infinie... par exemple l'anneau de périodes B_τ lui-même !) La condition que cette inégalité soit une égalité, évidemment nécessaire pour qu'existe un isomorphisme ι_τ, donne naissance à une bonne classe de représentations galoisiennes :

Définition. Soit $V \in \mathrm{Rep}(G_K)$. On dit que V est *B_τ-admissible* si on a $\dim_{K_\tau} D_\tau(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Enfin signalons une troisième condition importante dégagée par la théorie :

(AP$_3$) Tout élément $b \in B_\tau$ non nul et qui engendre une droite G_K-stable est inversible.

Sous cette condition supplémentaire, on montre que l'égalité de dimensions qui définit les représentations admissibles est équivalente au fait que $\alpha_{\tau,V}$ soit un isomorphisme. Tous les anneaux de périodes vérifient les trois conditions (AP$_i$). La conjonction des deux dernières est appelée $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-*régularité*.

On dit plus simplement que V est *de Hodge-Tate* si elle est B_{HT}-admissible, *de de Rham* si elle est B_{dR}-admissible, *cristalline* si elle est B_{cris}-admissible et *semi-stable* si elle est B_{st}-admissible. Ces représentations forment des sous-catégories pleines $\mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K)$, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K)$ de $\mathrm{Rep}(G_K)$. Enfin on introduit la sous-catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{pcris}}(G_K)$ composée des représentations *potentiellement cristallines*, qui sont celles qui se restreignent en une représentation cristalline de $G_{K'}$ pour une certaine extension finie K'/K, et la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{pst}}(G_K)$ des représentations *potentiellement semi-stables* définie de manière analogue. On définit aussi des foncteurs

$$D_{\mathrm{pcris}} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{pcris}}(G_K) \to \mathrm{MF}_K^{(\varphi, G_K)} \qquad \text{et} \qquad D_{\mathrm{pst}} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{pst}}(G_K) \to \mathrm{MF}_K^{(\varphi, N, G_K)}$$

à valeurs dans des catégories de modules filtrés avec action *discrète* de G_K (i.e. l'action se fait au travers d'un quotient fini). Ces représentations sont bien sûr utiles pour prendre en compte la cohomologie des variétés ayant potentiellement bonne réduction, resp. potentiellement réduction semi-stable. En utilisant la construction précise des anneaux de périodes, que nous ne voulons pas donner ici, on montre assez facilement que ces catégories sont incluses les unes dans les autres selon le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K) \arrow[dr, hook] & \\
\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Rep}_{\mathrm{pst}}(G_K) = \mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K) \subset \mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K) \subset \mathrm{Rep}(G_K). \\
 & \mathrm{Rep}_{\mathrm{pcris}}(G_K) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Notons que la catégorie $\mathrm{Rep}(G_K)$ est une catégorie tannakienne ; en particulier c'est une catégorie abélienne possédant des quotients, des produits tensoriels, des Hom internes et des duaux. Toutes les sous-catégories du diagramme sont des sous-catégories tannakiennes. Les catégories Grad_K, Fil_K, MF_K^{φ}, $\mathrm{MF}_K^{(\varphi,N)}$, $\mathrm{MF}_K^{(\varphi,N,G_K)}$ sont des catégories additives munies de sommes directes, produits tensoriels et duaux (et donc de produits symétriques et alternés). Mise à part Grad_K, elles ne sont pas abéliennes à cause de la présence de filtrations : dans ces catégories, l'application canonique coimage $\to$ image qui est une bijection linéaire n'est pas un isomorphisme car la filtration quotient sur la coimage ne coïncide pas en général avec la filtration induite sur l'image. Les foncteurs D_τ sont additifs, exacts et fidèles. En restriction à $\mathrm{Rep}_\tau(G_K)$, ils sont compatibles aux produits tensoriels et au passage au dual.

Le fait que l'inclusion $\mathrm{Rep}_{\mathrm{pst}}(G_K) \subset \mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$ soit une égalité, appelé conjecture de monodromie p-adique, est un résultat difficile sur lequel on reviendra plus loin. Toutes les autres inclusions sont strictes. Par ailleurs, le carré est cartésien : une représentation semi-stable potentiellement cristalline est cristalline. On peut maintenant énoncer les conjectures de Fontaine ([Fo82], App. ; [Ja89], p. 347 ; [Fo89], 6.2.7), chacune comportant deux parties, la seconde étant conséquence de la première avec des anneaux de périodes $(\mathbb{Q}_p, G_K)$-réguliers, comme on l'a vu.

Conjecture C_{HT} (Faltings [Fa88])

1) La cohomologie étale p-adique $H^i_{\text{ét}}(X)$ est de Hodge-Tate.
2) Il existe un $\otimes$-isomorphisme entre les foncteurs $D_{\mathrm{HT}} \circ H^i_{\text{ét}}$ et H^i_{HT}.

Conjecture C_{dR} (Faltings [Fa89])

1) La cohomologie étale p-adique $H^i_{\text{ét}}(X)$ est de de Rham.
2) Il existe un $\otimes$-isomorphisme entre les foncteurs $D_{\mathrm{dR}} \circ H^i_{\text{ét}}$ et H^i_{dR}.

Conjecture C_{cris} (Faltings [Fa89])

1) La cohomologie étale p-adique $H^i_{\text{ét}}(X)$ des variétés ayant bonne réduction est cristalline.
2) Il existe un $\otimes$-isomorphisme entre les foncteurs $D_{\mathrm{cris}} \circ H^i_{\text{ét}}$ et H^i_{cris}.

Conjecture C_{st} (Tsuji [Ts99])

1) La cohomologie étale p-adique $H^i_{\text{ét}}(X)$ des variétés ayant réduction semi-stable est semi-stable.
2) Il existe un $\otimes$-isomorphisme entre les foncteurs $D_{\mathrm{st}} \circ H^i_{\text{ét}}$ et H^i_{st}.

Les énoncés complets de ces conjectures affirment en plus que les isomorphismes de foncteurs sont compatibles aux applications classes de cycles.

Par la suite, des démonstrations alternatives de C_{cris} ont été données par Nizioł[Ni98], Beilinson [Be12], Bhatt [Bh12]. Des démonstrations alternatives de C_{st} ont été données par Faltings [Fa02], Nizioł[Ni08], Beilinson [Be13], Bhatt [Bh12].

Terminons cette partie en répétant le fait fondamental qui découle de ces conjectures : la cohomologie étale détermine les autres cohomologies.

3 Propriétés des foncteurs D_τ

Les conjectures C_τ pour $\tau \in \{\mathrm{HT}, \mathrm{dR}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}\}$ (qui sont maintenant des théorèmes) montrent que les foncteurs H^i_τ, définis sur des sous-catégories convenables de la catégorie Var_K des variétés propres lisses sur K, se factorisent par le foncteur $H^i_{\text{ét}}$. Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de base des foncteurs D_τ (dans cette section) et $H^i_{\text{ét}}$ (dans la section suivante) : (pleine) fidélité et image essentielle.

3.1 Pleine fidélité

Les foncteurs $D_{\mathrm{HT}} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K) \to \mathrm{Grad}_K$ et $D_{\mathrm{dR}} : \mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K) \to \mathrm{Fil}_K$ ne sont pas pleinement fidèles, par exemple parce qu'ils ne voient pas la différence entre bonne réduction et potentiellement bonne réduction, voir [BC09], prop. 6.3.8. Ces foncteurs ne plongent donc pas les catégories $\mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K)$ et $\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$ dans les catégories de modules filtrés appropriées. Pour les représentations de Hodge-Tate, il n'y a pas grand'chose à y faire, mais on verra ci-dessous que pour les représentations de de Rham, le problème peut être résolu en remplaçant D_{dR} par D_{pst}.

Il est tout à fait remarquable que les foncteurs D_{cris} et D_{st} (ainsi d'ailleurs que D_{pcris} et D_{pst}) sont pleinement fidèles, induisant des équivalences de catégories sur leur image esssentielle. On dispose même de foncteurs quasi-inverses explicites V_{cris} et V_{st}. Dans le cas cristallin, il s'agit du théorème 5.2 de [Fo82] avec pour quasi-inverse :

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{cris}}(D) &= \mathrm{Fil}^0(D \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}})^{\varphi=1} \\ &:= \{v \in D \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}}, \varphi v = v, v \in \mathrm{Fil}^0(D \otimes_K B_{\mathrm{cris}})\}. \end{aligned}$$

Dans le cas semi-stable, il s'agit des théorèmes 5.3.5 et 5.6.7 de [Fo89] avec pour quasi-inverse :

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{st}}(D) &= \mathrm{Fil}^0(D \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}})^{\varphi=1, N=0} \\ &:= \{v \in D \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}}, \varphi v = v, Nv = 0, v \in \mathrm{Fil}^0(D \otimes_K B_{\mathrm{st}})\}. \end{aligned}$$

On peut maintenant revenir aux représentations de de Rham, dont la nature est éclairée par le résultat suivant, répondant par l'affirmative à une supputation de Fontaine ([Fo89], 6.2.2) :

Conjecture de monodromie p-adique (Berger-André/Kedlaya/Mebkhout [Be02][An02][Ke04][Me02])
Toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable, i.e. $\mathrm{Rep}_{\mathrm{pst}}(G_K) = \mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$.

Cette conjecture a été prouvée par les efforts conjoints de Berger [Be02] qui a montré que la conjecture se déduit d'une conjecture de monodromie p-adique de Crew portant sur des équations différentielles p-adiques, puis André [An02], Kedlaya [Ke04] et Mebkhout [Me02] qui ont démontré la conjecture de Crew simultanément et indépendamment. De nouvelles preuves ont été données par Colmez [Co08] puis par Fargues-Fontaine [FF11].

Compte tenu de la conjecture de monodromie p-adique (qui est un théorème !), on peut donc plonger $\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$ dans une catégorie de modules filtrés via D_{pst}.

3.2 Image essentielle

La situation dans les cas (potentiellement) cristallin et semi-stable est favorable au point que l'on parvient à décrire l'image essentielle des foncteurs D_τ correspondants. Décrivons ici le cas semi-stable ; il suffit de faire $N = 0$ pour obtenir les énoncés du cas cristallin. Soit d'abord D un (φ, N)-module filtré de dimension 1 et notons :

- $t_N(D)$ la valuation (normalisée par $v(p) = 1$) de $\varphi(d)/d$, pour un quelconque $d \in D$ non nul ;
- $t_H(D)$ le plus grand entier $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Fil}^i D \neq 0$.

Si D est un (φ, N)-module filtré de dimension r, on pose $t_N(D) = t_N(\wedge^r D)$ et $t_H(D) = t_H(\wedge^r D)$. Les fonctions t_N et t_H sont additives sur les suites exactes courtes. On dit qu'un (φ, N)-module filtré D est *admissible* s'il est dans l'image de D_{st}, et *faiblement admissible* s'il vérifie la condition :

$$t_H(D) = t_N(D), \text{ et } t_H(D') \leqslant t_N(D') \text{ pour tout sous-objet } D' \subset D.$$

On vérifie assez facilement qu'admissible implique faiblement admissible, et...

Conjecture faiblement admissible implique admissible (Colmez-Fontaine [CF00])
Tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est admissible.

Par la suite, des démonstrations alternatives de cette conjecture ont été données par Colmez [Co02], Berger [Be08], Kisin [Ki06], Fargues-Fontaine [FF11].

4 Propriétés du foncteur $H^i_{\text{ét}}$

4.1 Pleine fidélité

La cohomologie des variétés est loin de refléter toutes leurs propriétés ; elle constitue une version linéarisée de la catégorie hautement non linéaire Var_K. Il n'est donc pas surprenant que le foncteur $H^*_{\text{ét}} = \oplus H^i_{\text{ét}}$ ne soit pas pleinement fidèle.

On va préciser ce fait, en montrant de plus que les notions de « bonne réduction » (ou de caractère cristallin) et de « réduction semi-stable » ne sont pas tout à fait les mêmes pour les variétés et pour les représentations galoisiennes. Les conjectures C_{cris} et C_{st} affirment que la cohomologie étale de variétés qui possèdent de bonnes propriétés de réduction possède de bonnes propriétés arithmétiques. Cependant les énoncés réciproques sont faux, car il existe des variétés X n'ayant pas réduction semi-stable mais dont la cohomologie étale est cristalline. Par exemple, supposons que X est un torseur non trivial sous une K-courbe elliptique E ayant bonne réduction, et que le corps résiduel k est fini ou séparablement clos. Alors X n'a pas bonne réduction, car sinon sa réduction lisse aurait un point rationnel (lorsque k est fini, c'est vrai pour tout torseur sous un groupe connexe par un théorème de Lang, [La56] ou [Se75], chap. VI, §1, no. 4) qui se relèverait par le lemme de Hensel en un point rationnel de X. Il s'ensuit que X n'a pas non plus réduction semi-stable, car il a potentiellement bonne réduction. Or la cohomologie étale de X est isomorphe à celle de E : le H^0 est trivial, le H^1 est le dual du module de Tate de la jacobienne, et le H^2 est un twist de Tate par dualité de Poincaré. On en déduit que $H^*_{\text{ét}}(X)$ est cristalline et aussi que l'application $\mathrm{Hom}(E, X) \to \mathrm{Hom}(H^*_{\text{ét}}(E), H^*_{\text{ét}}(X))$ n'est pas surjective.

Comme on vient de le voir, les choses coincent déjà pour les torseurs sous les variétés abéliennes. Il est remarquable que pour les variétés abéliennes elles-mêmes, exemple historique, la situation est plus agréable au moins en ce qui concerne la bonne réduction. Pour une K-variété abélienne A et un nombre premier ℓ, on sait que l'algèbre de cohomologie étale ℓ-adique est l'algèbre extérieure sur $H^1_{\text{ét}}$ et il suffit donc de considérer le degré 1. Il suffit également de considérer la représentation duale, qui est le module de Tate ℓ-adique $T_\ell(A)$. Si $\ell \neq p$, le critère de Néron-Ogg-Šafarevič (démontré dans le cas général par Serre et Tate [ST68]) affirme que A a bonne réduction ssi $T_\ell(A)$ est non ramifié. Si $\ell = p$, Coleman et Iovita [CI99] ont prouvé (trente ans après) que A a bonne réduction si et seulement si $T_p(A)$ est cristallin. Ceci illustre le fait, mis en avant par Grothendieck, que le bon analogue du caractère non ramifié pour $\ell \neq p$ est le caractère cristallin pour $\ell = p$. Enfin citons un invariant plus fin attaché à A : son groupe ℓ-divisible $A[\ell^\infty]$. Si $\ell \neq p$, cet objet est équivalent au module de Tate, en revanche, si $\ell = p$ le groupe p-divisible contient beaucoup plus d'information sur la variété A et sur sa réduction. À son sujet, Grothendieck a montré le résultat remarquable suivant ([SGA7.1], Exp. IX, cor. 5.10) : pour tout ℓ (égal à p ou non, mais le cas vraiment intéressant est $\ell = p$), la variété abélienne A a bonne réduction si et seulement si son groupe ℓ-divisible a bonne réduction, c'est-à-dire qu'il s'étend en un groupe ℓ-divisible sur $\mathcal{O}_K$. Il n'y a pas à ma connaissance de résultats semblables à ceux de ce paragraphe dans le cas de réduction semi-stable.

4.2 Image essentielle

Les conjectures C_τ, à commencer par la « plus facile » d'entre elles C_{HT}, montrent que les représentations galoisiennes issues de la cohomologie des variétés algébriques sont très contraintes et en particulier que les foncteurs D_τ ne sont pas essentiellement surjectifs.

Plus précisément, la conjecture C_{HT} implique que l'image essentielle de $H^i_{\text{ét}}$ est incluse dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K)$ qui est relativement facile à décrire. Notons $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim \mu_{p^n}(\bar{K})$ le module de Tate p-adique de $\mathbb{G}_m$, sur lequel G_K agit par le caractère cyclotomique p-adique $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ via $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$ pour $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$. C'est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang 1. On définit $\mathbb{Z}_p(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$ de la manière habituelle, et le twist de Tate $V(r) := V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(r)$ pour tout $\mathbb{Z}_p$-module galoisien. Utilisant la description précise de l'anneau B_{HT} et le calcul par Tate-Sen des invariants $\mathbb{C}_K(r)^{G_K}$ des twists de Tate du complété $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$, on montre que les représentations de Hodge-Tate sont les représentations V telles que $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K$ est une somme directe finie de twists $\mathbb{C}_K(r)$.

On aimerait avoir une idée plus précise de l'image essentielle de $H^i_{\text{ét}}$. Cela semble malheureusement très difficile, notamment car la cohomologie des variétés ayant (par exemple) bonne réduction doit satisfaire diverses contraintes arithmétiques, telles que celles données par les conjectures de Weil, portant sur les valeurs propres de Frobenius agissant sur la cohomologie. Il n'existe donc pas de conjecture décrivant cette image essentielle. En revanche, les choses sont mieux comprises (au moins conjecturalement) pour les représentations p-adiques qui s'étendent en des représentations *globales* du groupe de Galois absolu G_M d'un *corps de nombres* M : c'est l'objet de la conjecture de Fontaine-Mazur [FM93]. Disons qu'une représentation de G_M dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie est *géométrique* si elle est non-ramifiée en dehors d'un nombre fini de places de M (c'est-à-dire triviale sur le sous-groupe d'inertie de la place), et si sa restriction au sous-groupe de décomposition de toute place non-archimedienne est potentiellement semi-stable. (Ramakrishna [Ra00] a construit des exemples de représentations ramifiées en un nombre infini de places.) Disons qu'une représentation irréductible de G_M *provient de la géométrie* si elle est sous-quotient d'un groupe de cohomologie étale p-adique $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_p(r))$ à coefficients dans un twist de Tate, pour une certaine M-variété algébrique X (de manière équivalente, par la résolution des singularités : pour une certaine M-variété algébrique propre lisse). On a alors :

Conjecture de Fontaine-Mazur (Kisin [Ki09] pour $M = \mathbb{Q}$ et $n = 2$, ouverte en général)

Une représentation p-adique irréductible de dimension n du groupe de Galois absolu d'un corps de nombres G_M est géométrique si et seulement si elle provient de la géométrie.

En quelque sorte, cette conjecture repose sur l'idée miraculeuse que pour la cohomologie des variétés définies sur un corps de nombres, les contraintes arithmétiques mentionnées plus haut sont forcées par les deux conditions assez naturelles de non-ramification en dehors d'un nombre fini de places (condition globale) et de potentielle semi-stabilité (condition locale).

Références

[An02] Y. André, *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique*, Inv. Math. 148 (2002), 285–317.

[Be12] A. Beilinson, *p-adic periods and derived de Rham cohomology*, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012), no. 3, 715–738.

[Be13] A. Beilinson, *On the crystalline period map*, arXiv :1111.3316.

[Be08] L. Berger, *Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés*, Astérisque no. 319 (2008), 13–38.

[Be74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Springer Lecture Notes in Mathematics 407, 1974.

[Be02] L. Berger, *Représentations p-adiques et equations différentielles*, Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.

[BO83] P. Berthelot, A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology. I*, Invent. Math. 72 (1983), no. 2, 159–199.

[Bh12] B. Bhatt, *p-adic derived de Rham cohomology*, arXiv :1204.6560.

[BC09] O. Brinon, B. Conrad, *CMI Summer School notes on p-adic Hodge Theory*, disponible à `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf`.

[CI99] R. Coleman, A. Iovita, *The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties*, Duke Math. J. 97 (1999), no. 1, 171–215.

[Co02] P. Colmez, *Espaces de Banach de dimension finie*, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), 331–439.

[Co03] P. Colmez, *Les conjectures de monodromie p-adiques*, Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002. Astérisque no. 290 (2003), Exp. no. 897, vii, 53–101.

[Co08] P. Colmez, *Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham*, dans Représentations p-adiques de groupes p-adiques I, Représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules, Astérisque no. 319 (2008), 117–186.

[CF00] P. Colmez, J.-M. Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Invent. Math. 140 (2000), no. 1, 1–43.

[DK11] Ch. Davis, K. Kedlaya, *Witt vectors with p-adic coefficients and Fontaine's rings*, disponible à `http://math.uci.edu/~davis/padic.pdf`.

[De68] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Publ. Math. IHES no. 35 (1968) 259–278.

[Fa88] G. Faltings, *p-adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 255–299.

[Fa89] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore 1988), 25–80, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.

[Fa02] G. Faltings, *Almost étale extensions*, dans Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques II, Astérisque no. 279 (2002), 185–270.

[FF11] L. Fargues, J.-M. Fontaine, *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*, disponible à `http://www.math.jussieu.fr/~fargues/Courbe.pdf`.

[Fo82] J.-M. Fontaine, *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. 115 (1982), 529–577.

[Fo89] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, dans Périodes p-adiques, édité par J.-M. Fontaine, Astérisque no. 223 (1994), 113–184.

[FM93] J.-M. Fontaine, B. Mazur, *Geometric Galois representations*, Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 41–78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[GM87] H. Gillet, W. Messing, *Cycle classes and Riemann-Roch for crystalline cohomology*, Duke Math. J. 55 (1987), no. 3, 501–538.

[HK89] O. Hyodo, K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, dans Périodes p-adiques, édité par J.-M. Fontaine, Astérisque no. 223 (1994), 221–268.

[Ja89] U. Jannsen, *On the ℓ-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, dans Galois groups over $\mathbb{Q}$, édité par Ihara, Ribet, Serre, Proc. of 1987 MSRI workshop, Springer, 1989.

[Ke04] K. Kedlaya, *A p-adic monodromy theorem*, Ann. of Math. 160 (2004), 93–184.

[Ki02] M. Kisin, *Potential semi-stability of p-adic étale cohomology*, Israel J. Math. 129 (2002), 157–173.

[Ki06] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, in Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser, 2006, p. 459–496.

[Ki09] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2*, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), no. 3, 641–690.

[La56] S. Lang, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. 78 (1956), 555–563.

[Me02] Z. Mebkhout, *Analogue p-adique du théorème de Turritin et le théorème de la monodromie p-adique*, Inv. Math. 148 (2002), 319–351.

[Ni98] W. Nizioł, *Crystalline conjecture via K-theory*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31 (1998), no. 5, 659–681.

[Ni08] W. Nizioł, *Semistable conjecture via K-theory*, Duke Math. J. 141 (2008), no. 1, 151–178.

[Ol07] M. Olsson, *Crystalline cohomology of algebraic stacks and Hyodo-Kato cohomology*, Astérisque no. 316 (2007), 412 pp.

[Ra00] R. Ramakrishna, *Infinitely ramified Galois representations*, Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 793–815.

[Se67] J.-P. Serre, *Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles*, Proc. Conf. on Local Fields (Driebergen, 1966), pp. 118–131, Springer, 1967.

[Se75] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Deuxième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1264. Hermann, 1975.

[SGA7.1] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique I* (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim, Lecture Notes in Mathematics 288, Springer-Verlag, 1972.

[ST68] J.-P. Serre, J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 492–517.

[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups*, Proc. Conf. on Local Fields (Driebergen, 1966), pp. 158–183, Springer, 1967.

[Ts99] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inv. Math. 137 (1999), 233–411.