

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Dualité en algèbre linéaire | 3 |
| 1.1 | Espace dual | 3 |
| 1.2 | Dualité orthogonale : Espace orthogonal | 4 |
| 1.3 | Dualité d'espace vectoriel : Notion de transposition | 8 |
| 1.4 | Espace Bidual | 9 |
| 2 | L'espace projectif | 11 |
| 2.1 | Introduction | 11 |
| 2.2 | Espace projectif et sous-espace projectif | 11 |
| 2.3 | Coordonnées homogènes | 12 |
| 2.4 | Cartes affines | 13 |
| 2.5 | Paramétrisation des droites projectives | 13 |
| 2.6 | Principe de dualité | 14 |
| 2.7 | Théorème de Desargues, espace projectif arguésien | 14 |
| 2.8 | Théorème de Pappus, commutativité du corps induit | 15 |
| 2.9 | Homographie, $GL(E)$, $PGL(E)$ | 16 |
| 3 | Une utilisation des bases duales | 19 |

Introduction

Ce document a pour but de présenter la dualité en géométrie projective. Il expose les différents résultats abordés lors de mon stage sous la direction de Matthieu Romagny en Mai-Juin 2015.

Nous commencerons par étudier la dualité en algèbre linéaire afin de comprendre le mécanisme de dualité de la géométrie projective. Ensuite nous nous intéresserons aux définitions des espaces projectifs, aux notions de coordonnées homogènes et de carte affines et au principe de dualité. Ensuite nous aborderons les théorèmes de Desargues et de Pappus qui occupent une place importante dans la construction de cette géométrie.

Enfin nous illustrerons une application des bases duales à travers un exercice.

Dualité en algèbre linéaire

Sommaire

| | |
|---|----------|
| 1.1 Espace dual | 3 |
| 1.2 Dualité orthogonale : Espace orthogonal | 4 |
| 1.3 Dualité d'espace vectoriel : Notion de transposition | 8 |
| 1.4 Espace Bidual | 9 |

Pour ce chapitre, nous noterons \mathbf{k} un corps qui peut être \mathbb{R} ou \mathbb{C} ou plus général. Nous noterons E un \mathbf{k} -espace vectoriel. Le symbole \mathbf{o} correspond à la fonction nulle et est utilisé pour une meilleure compréhension et clarté des énoncés.

Section 1.1

Espace dual

Nous allons tout d'abord définir la notion d'espace dual et de base duale avant de considérer les liens entre cet espace dual et l'espace vectoriel initial.

Définition 1.1.1 : Forme linéaire

On appelle **forme linéaire** sur E toute application **linéaire** de E dans \mathbf{k} .

Remarque : Une forme linéaire est surjective ou c'est l'application nulle.

En effet l'image d'une forme linéaire est un sous-espace vectoriel de \mathbf{k} donc c'est $\{0\}$ ou \mathbf{k} lui-même.

Définition 1.1.2 : Espace dual

On appelle **espace dual** de E l'ensemble des forme linéaire de E , c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbf{k})$.
On note E^* l'espace dual de E , c'est un \mathbf{k} -espace vectoriel.

Remarque : Les éléments de E^* sont des applications de E dans \mathbf{k} . Nous les noterons donc φ pour la compréhension ou x^* pour plus de cohérence entre les notations.

Notation

On appelle **crochet de dualité** l'application suivante :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \longrightarrow \mathbf{k}$$

$$(\varphi, x) \longmapsto \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$$

Cette application est bilinéaire car φ est une forme linéaire.

Associée à la notion de base \mathcal{B} d'un espace vectoriel, on définit la base duale \mathcal{B}^* qui lui est associé. Chaque i^e élément de cette base duale \mathcal{B}^* peut être considéré comme la fonction donne la i^e coordonnée de la variable dans la base \mathcal{B} .

Définition 1.1.3 : Base duale

Soit E de dimension finie n . Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E .
Il existe une famille (e_1^*, \dots, e_n^*) de E^* définie par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e_i^*(e_j) = \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

La famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est libre et c'est donc une base de E^* .
On dit que c'est la **base duale** de la base (e_1, \dots, e_n) de E .

Démonstration :

Montrons que (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* .

Comme E est de dimension finie, $\dim E = n = n \times 1 = \dim \mathcal{L}(E, \mathbf{k}) = \dim(E^*)$. Ainsi si (e_1^*, \dots, e_n^*) est libre, c'est une base de E^* .

Supposons qu'elle ne soit pas libre, c'est-à-dire, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ non tous nuls, tel que :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = \mathbf{o}$$

Nous avons donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \right) (e_j) = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*, e_j \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i^*, e_j \rangle = 0$$

Or ceci vaut α_j par définition de e_i^* . Nous en déduisons la contradiction suivante $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_j = 0$.

La famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est libre, de cardinal n , c'est une base de E^* . □

Section 1.2

Dualité orthogonale : Espace orthogonal

Abordons à présent les liens entre un espace vectoriel et son dual. Définissons tout d'abord la notion de sous-espace orthogonal qui sera l'argument qui donnera naissance à la dualité en géométrie projective.

Définition 1.2.1 : Sous-espace orthogonal

Soit $A \subset E$. Soit $A^* \subset E^*$.

Alors notons A^\perp le sous-espace vectoriel de E^* appelé **sous-espace orthogonal de A** l'ensemble suivant :

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in A, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$$

D'autre part, notons $(A^*)^0$ le sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace orthogonal de A^*** l'ensemble suivant :

$$(A^*)^0 = \{x \in E : \forall \varphi \in A^*, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$$

Remarque : On utilise la deuxième notation pour éviter les problèmes d'ambiguïté. En effet, si E n'est de dimension finie, $(A^*)^\perp$ n'a pas la même signification que $(A^*)^0$. En effet, $(A^*)^\perp$ est un sous-espace de E^{**} , alors que $(A^*)^0$ est un sous-espace de E . En dimension finie, ce problème n'existe plus car comme nous le verrons dans le point 1.4.2, E et E^{**} sont isomorphe.

Définition 1.2.2 : Orthogonalité

Soient $x \in E$ et $\varphi \in E^*$.

On dit que x et φ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x) = 0$$

Proposition 1.2.3 : Espace orthogonaux courants

Nous avons les résultats suivants :

- i. $\{0\}^\perp = E^*$
- ii. $\{\mathfrak{o}\}^0 = E$.
- iii. $E^\perp = \{\mathfrak{o}\}$
- iv. $(E^*)^0 = \{0\}$, si E n'est pas de dimension finie, l'axiome du choix est nécessaire.

Démonstration :

Commençons par les trois premiers résultats, qui sont des plus simples.

- i. L'ensemble des éléments orthogonaux à 0 est E^* , car pour toute forme linéaire φ sur E , $\varphi(0) = 0$.
- ii. L'ensemble des éléments orthogonaux à \mathfrak{o} est E , car pour tout élément x de E , $\mathfrak{o}(x) = 0$.
- iii. L'ensemble des éléments orthogonaux à tous les éléments de E est $\{\mathfrak{o}\}$ car c'est la seule forme linéaire qui est nulle pour tous éléments de E .

Abordons maintenant le dernier résultat :

- iv. Dans le cas où E est de dimension finie :

Alors soit $x \in E$ non nul. Montrons que $x \notin (E^*)^0$, c'est-à-dire qu'il existe une forme $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq 0$.

Considérons (x) comme une famille libre et complétons la en une base de E en utilisant le théorème de la base incomplète. Nous obtenons une base $e = (e_1 = x, e_2, \dots, e_n)$ de E . Alors l'application e_1^* issue de la base duale de e n'est pas orthogonale à x car $\langle e_1^*, x \rangle = 1$. Ainsi $x \notin (E^*)^0$.

L'ensemble des éléments orthogonaux à E^* est donc réduit à $\{0\}$.

Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, la démonstration reste identique mais nous devons cependant utiliser l'axiome du choix pour pouvoir compléter la base (x) en une base de E avec l'aide du théorème de la base incomplète. En effet, ce théorème nécessite l'axiome du choix en dimension infinie, puis-qu'alors le choix d'une base est présent.

□

Proposition 1.2.4 : Inclusion d'un sous-espace orthogonal

Soit F une partie de E .

Alors $F^\perp \subset E^*$ et F^\perp est un **sous-espace vectoriel** de E^* .

Démonstration :

Nous savons que $F \subset E$, donc F^\perp , l'ensemble des formes linéaires sur E qui pour tout $x \in F$ sont nulles, est inclus dans l'ensemble des formes linéaires sur E . Cette propriété découle directement de la définition. Enfin, F^\perp est un sous-espace vectoriel de E^* car nous avons vu que le crochet de dualité est bilinéaire. Si φ et θ appartiennent à F^\perp alors $\lambda\varphi + \theta$ également :

$$\forall \lambda \in \mathbf{k}, \forall \varphi, \theta \in E^* : (\lambda\varphi + \theta)(x) = \langle \lambda\varphi + \theta, x \rangle = \lambda\langle \varphi, x \rangle + \langle \theta, x \rangle = \lambda\varphi(x) + \theta(x) = 0$$

□

Observons un résultat très important qui expliquera une particularité du principe de dualité 2.6 en géométrie projective, l'association des espaces de dimension p avec les espaces de dimension $n - p$.

Proposition 1.2.5 : Dimension d'un sous-espace orthogonal

Soit E de dimension finie n . Soient F un sous-espace de E et G un sous-espace de E^* .

Si E est de dimension n , l'orthogonal d'un espace de dimension p dans E est de dimension $n - p$.

Ainsi nous avons les égalités suivantes :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

$$\dim G + \dim G^0 = \dim E$$

Démonstration :

Nous avons deux cas à démontrer puisque nous sommes en dimension finie, car nous pouvons toujours nous y ramener en utilisant l'application canonique ψ qui sera introduite dans le paragraphe 1.4 sur la bidualité.

Premier cas : $F \subset E$: Puisque F est de dimension p , notons $f = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . En utilisant le théorème de la base incomplète, construisons une base de E complétant f : notons la $e = (e_1, \dots, e_n)$. Notons $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de e .

Alors toute forme φ sur E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$$

Or un élément φ appartient à F^\perp si et seulement s'il est orthogonal à tout élément de F , c'est-à-dire s'il est orthogonal à tout élément d'une base de F , ici la base f . Nous avons alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket, \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*, e_j \right\rangle = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket, \alpha_j = 0$$

Une base de F^\perp est donc $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$, donc F^\perp est de dimension $n-p$. nous retrouvons la première égalité.

Deuxième Cas : $G \subset E^*$: Puisque G est de dimension p notons $g^* = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ une de ses base. Complétons la en utilisant le théorème de la base incomplète en une base $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* . Notons $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base de E dont e^* est la base duale.

Tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

Or x appartient à G^0 si et seulement si il est orthogonal avec tout les élément de G , c'est-à-dire orthogonal avec tout les éléments d'une base de G . Cela se transcrit par :

$$\forall j \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket, \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j^* \right\rangle = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket, \alpha_j = 0$$

Une base de G^0 est donc (e_{p+1}, \dots, e_n) et la dimension de G^0 est $n-p$. Nous retrouvons la deuxième égalité.

□

Un autre résultat important concerne les relations d'inclusions qui s'inverse en considérant les espace orthogonaux. Cette proposition est très importante pour établir le principe de dualité 2.6 que nous verrons plus tard. Elle permet d'établir une correspondance entre les relations d'incidence des espaces vectoriels et celles des espaces orthogonaux.

Proposition 1.2.6 : Inclusion et dualité orthogonale

Soit X et Y deux parties de E .

Alors $X \subset Y \Leftrightarrow X^\perp \supset Y^\perp$.

Démonstration :

Premier sens : Montrons que si $X \subset Y$ alors $X^\perp \supset Y^\perp$.

Soit $\varphi \in Y^\perp$. Montrons que $\varphi \in X^\perp$.

Nous savons que $\forall y \in Y, \varphi(y) = 0$. Mais puisque $X \subset Y, \forall x \in X, \exists y \in Y : x = y$ d'où $\forall x \in X, \varphi(x) = 0$ et donc $\varphi \in X^\perp$.

Deuxième sens : Montrons que si $X^\perp \supset Y^\perp$ alors $X \subset Y$.

Soit $x \in X$. Montrons que $x \in Y$.

Nous savons que $\forall \theta \in X^\perp, \theta(x) = 0$. Or $X^\perp \supset Y^\perp$ donc $\forall \varphi \in Y^\perp, \exists \theta \in X^\perp : \varphi = \theta$. D'où, $\forall \varphi \in Y^\perp, \varphi(x) = 0$ ce qui veut dire que $x \in Y$. □

Voici un résultat qui permet d'établir la réversibilité de la relation d'orthogonalité en dimension finie.

Proposition 1.2.7 : Inclusion et égalité des « bi-orthogonaux »

Soit F un sous-espace de E et G un sous-espace de E^* .

Alors $F \subset (F^\perp)^\perp$. De plus, si E est de dimension finie, nous avons égalité $F = (F^\perp)^\perp$.

De manière duale, $G \subset (G^0)^\perp$ et $G = (G^0)^\perp$ si E est de dimension finie.

Démonstration :

Les cas d'inclusion sont simple et découlent de la définition des sous-espaces orthogonaux.

Soit $y \in F$, alors $y \in E$. De plus $(F^\perp)^0 = \{x \in E : \forall \varphi \in F^\perp, \varphi(x) = 0\}$.

Or $\forall \varphi \in F^\perp, \varphi(y) = 0$ puisque $y \in F$. Donc $F \subset (F^\perp)^0$.

De la même manière, soit $\theta \in G$. Puisque $G \subset E^*$, $\theta \in E^*$.

De plus $(G^0)^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in G^0, \varphi(x) = 0\}$.

Or $\forall x \in G^0, \theta(x) = 0$ puisque $\theta \in G$. Nous avons donc $G \subset (G^0)^\perp$.

Intéressons nous aux cas d'égalité : Supposons E de dimension finie.

En utilisant la proposition précédente et en considérant $G = F^\perp$ nous obtenons :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E = \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^0$$

D'où $\dim F = \dim (F^\perp)^0$. Or nous savons que $F \subset (F^\perp)^0$ donc $F = (F^\perp)^0$.

De la même manière en considérant $F = G^0$ nous obtenons :

$$\dim G^0 + \dim (G^0)^\perp = \dim E = \dim G + \dim G^0$$

D'où $\dim G = \dim (G^0)^\perp$. Or $G \subset (G^0)^\perp$ donc $G = (G^0)^\perp$. □

Terminons par une proposition reposant sur les résultats précédents. Cette proposition permet de faire un lien très étroit entre les sous-espaces vectoriels de E et les sous-espaces vectoriels de E^* . Ceci sera important pour l'établissement du principe de dualité 2.6.

Proposition 1.2.8 : Bijection des sous-espaces vectoriels

Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension finie n .

La relation d'orthogonalité établit une bijection \perp entre les sous-espaces vectoriels de E et les sous-espaces vectoriels de E^* .

$$\begin{array}{ccc} \perp : & \{SEV \text{ de } E\} & \longrightarrow & \{SEV \text{ de } E^*\} \\ & F & \longmapsto & F^\perp \end{array}$$

Démonstration :

Tout sous-espace vectoriel F de E admet pour image par \perp un sous-espace vectoriel de E^* noté F^\perp . Cela vient du fait que l'espace orthogonal d'une partie X est un sous-espace vectoriel, comme démontré ici 1.2.4. \perp est donc bien une application des sous-espaces vectoriels de E dans les sous-espaces vectoriels de E^* .

Montrons que cette application est bijective, c'est-à-dire injective et surjective.

La surjectivité découle de la proposition 1.2.7 précédent : Si $G \in E^*$ alors $G = (G^0)^\perp$. Ainsi tout sous-espace vectoriel G de E^* admet pour antécédent le sous-espace vectoriel $G^0 = G^\perp$ en considérant E et E^{**} isomorphes. Bien sur, par la remarque précédente G^0 est un sous-espace vectoriel de E , car G^\perp est un sous-espace vectoriel de $(E^*)^*$.

L'injectivité découle de la même proposition. Supposons qu'un sous-espace vectoriel G de E^* admette plus d'un antécédent par \perp . Soit A et B deux des antécédents de G par \perp . Alors $A^\perp = B^\perp = G$. Or $(A^\perp)^0 = A = G^0$ et $(B^\perp)^0 = B = G^0$ donc $A = B$. □

Remarque : Il faut bien remarquer que cela ne marche qu'en dimension finie!! Ce que l'on note ici 0 est la réciproque de \perp , ceci en dimension finie. En effet, en identifiant E et E^{**} par isomorphisme :

$$\forall G \in E^* : E \ni G^0 = G^\perp \in E^{**}$$

Dualité d'espace vectoriel : Notion de transposition

Après avoir étudié la notion d'orthogonalité, nous allons introduire la notion de transposée, que nous connaissons bien dans le cas particulier de la dimension finie. Cette notion établit un lien entre une application linéaire de E dans F et une application linéaire, qui sera appelée transposée, de F^* dans E^* . L'intérêt de cette notion est les propriétés semblables qui existent entre une application linéaire et sa transposée.

Définition 1.3.1 : Transposée

Soient E et F deux \mathbf{k} -espaces vectoriels. Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Définissons l'application duale ou **transposée** de f , l'application ${}^t f: F^* \rightarrow E^*$ tel que :

$$\forall \varphi \in F^* : {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Remarque : La transposée de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire de $F^* \rightarrow E^*$, ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. Nous observons ici une « inversion » des espaces de départ et d'arrivée en passant à l'application duale et aux espaces duaux.

Proposition 1.3.2 : Caractérisation de l'application transposée

Soient E et F deux \mathbf{k} -espaces vectoriels. Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. La transposée de f est la seule application ${}^t f: F^* \rightarrow E^*$ tel que :

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in F^* : \langle {}^t f(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, f(x) \rangle$$

Démonstration :

La définition de ${}^t f$ est $\forall \varphi \in F^*, {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

Ceci est équivalent à $\forall x \in E, \forall \varphi \in F^*, ({}^t f(\varphi))(x) = \varphi(f(x))$ d'où $\langle {}^t f(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, f(x) \rangle$. □

Une propriété remarquable de la transposée est le lien d'inversion entre injectivité et surjectivité expliqué ici :

Proposition 1.3.3 : Lien entre injectivité et surjectivité

Soient E et F deux \mathbf{k} -espaces vectoriels. Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire.

- i. $(\text{Ker}(f))^\perp = \text{Im}({}^t f)$
- ii. Si f est injective alors ${}^t f$ est surjective et réciproquement.
- iii. $(\text{Im}(f))^\perp = \text{Ker}({}^t f)$.
- iv. Si f est surjective alors ${}^t f$ est injective et réciproquement.

Démonstration :

i. Montrons l'égalité par double inclusion.

— Soit $\varphi \in \text{Im}({}^t f)$. Alors il existe $\theta \in F^*$ tel que $\varphi = {}^t f(\theta) = \theta \circ f$.

Rappelons que $(\text{Ker}(f))^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in \text{Ker}(f), \varphi(x) = 0\}$.

Alors si $x \in \text{Ker}(f)$, $\varphi(x) = \theta \circ f(x) = 0$ donc $\varphi \in (\text{Ker}(f))^\perp$.

— Soit $\varphi \in (\text{Ker}(f))^\perp$. Alors, d'après la définition de $(\text{Ker}(f))^\perp$, $\forall x \in \text{Ker}(f), \varphi(x) = 0$.

Nous voulons montrer que $\varphi \in \text{Im}({}^t f)$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in F^*$ tel que $\varphi = {}^t f(\theta) = \theta \circ f$.

Posons E' un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E et F' un supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans F .

D'après le théorème du rang, nous avons $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Ker}(f) + \dim E'$, d'où l'égalité $\dim E' = \dim \text{Im}(f)$. Ainsi nous pouvons définir la bijection suivante :

$$\begin{aligned} \psi: E' &\longrightarrow \text{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Elle est injective par construction car E' est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ et est bijective car $\dim(E') = \dim(\text{Im}(f))$. En posant maintenant :

$$\theta(x) = \begin{cases} \varphi(\psi^{-1}(x)) & \text{si } x \in \text{Im}(f) \\ 0 & \text{si } x \in F' \end{cases}$$

Nous avons bien une application $\theta \in F^*$ tel que $\varphi = {}^t f(\theta) = \theta \circ f$.

En effet, $\forall x \in E$, il existe une décomposition unique $(x', x'') \in E' \times \text{Ker}(f)$ tel que $x = x' + x''$.
Ainsi :

$$\varphi(x) = \varphi(x') + \varphi(x'') = \varphi(x') \text{ car } \varphi \in (\text{Ker}(f))^\perp \text{ et } x'' \in \text{Ker}(f)$$

Et

$$\begin{aligned} \theta \circ f(x) &= \theta(f(x')) = \varphi(\psi^{-1}(f(x'))) \text{ car } f(x') \in \text{Im}(f) \\ &= \varphi(x') \end{aligned}$$

ii. C'est une conséquence immédiate de i. car si f est injective, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Donc $\text{Im}({}^t f) = (\text{Ker}(f))^\perp = \{0\}^\perp = E^*$ et ${}^t f$ est surjective.

La réciproque marche sur le même principe.

iii. Montrons l'égalité directement :

$$\begin{aligned} \text{Ker}({}^t f) &= \{\varphi \in F^*, {}^t f(\varphi) = \mathbf{o}\} \\ &= \{\varphi \in F^* : \forall x \in E, ({}^t f(\varphi))(x) = 0\} \\ &= \{\varphi \in F^* : \forall x \in E, \langle {}^t f(\varphi), x \rangle = 0\} \\ &= \{\varphi \in F^* : \forall x \in E, \langle \varphi, f(x) \rangle = 0\} \\ &= \{\varphi \in F^* : \forall y \in \text{Im}(f) \langle \varphi, y \rangle = 0\} \\ &= (\text{Im}(f))^\perp \end{aligned}$$

iv. Ceci est une conséquence immédiate de iii. car si f est surjective, $\text{Im}(f) = F$.

Donc $\text{Ker}({}^t f) = (\text{Im}(f))^\perp = F^\perp = \{\mathbf{o}\}$ d'où l'injectivité de ${}^t f$.

La réciproque marche sur le même principe.

□

Section 1.4

Espace Bidual

Définition 1.4.1 : Espace bidual

On appelle **espace bidual** de E , l'espace dual de E^* . Notons le $(E^*)^*$ ou E^{**} .

$$E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbf{k})$$

Notation

Pour $\varphi \in E^*$ et $\Phi \in E^{**}$, étendons le **crochet de dualité** vu précédemment par la notation suivante :

$$\langle\langle \Phi, \varphi \rangle\rangle = \Phi(\varphi)$$

Remarque : Les éléments de E^{**} sont des applications qui, à une application associe un « nombre », élément de \mathbf{k} . Nous noterons Φ ou x^{**} ces éléments et Φ_x ou \hat{x} l'application de E^{**} associé à x définie de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \hat{x}(\varphi) = \Phi_x(\varphi) = \langle\langle \Phi_x, \varphi \rangle\rangle = \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$$

Nous attaquons ici l'une des propositions les plus importante : la bijectivité de l'application linéaire canonique de E dans E^{**} . Ceci nous permettra par la suite de considérer E^{**} comme E par isomorphisme.

Proposition 1.4.2 : Application linéaire canonique

Si E est de **dimension fine**, l'application suivante dite **linéaire canonique** $\psi : E \rightarrow E^{**}$ est un **isomorphisme** d'espace vectoriel.

$$\begin{array}{ccc} \psi: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \Phi_x: E^* \longrightarrow \mathbf{k} \\ & & & \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{array}$$

Avec $\Phi_x \in E^{**}$ l'application de E^{**} associée à $x \in E$ définie par $\forall \varphi \in E^*$, $\langle \langle \Phi_x, \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi, x \rangle$.

Démonstration :

Montrons que ψ est linéaire :

Par définition, $\psi(x) = \Phi_x$. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda x + y) = \Phi_{\lambda x + y}$.

Nous avons par conséquent : $\forall \varphi \in E^*$ $\langle \langle \Phi_{\lambda x + y}, \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi, \lambda x + y \rangle$.

Ce qui est équivalent par linéarité du crochet de dualité :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \lambda \langle \varphi, x \rangle + \langle \varphi, y \rangle = \lambda \langle \langle \Phi_x, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle \Phi_y, \varphi \rangle \rangle$$

Ce qui équivaut à, toujours par linéarité mais ici de $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$:

$$\forall \varphi \in E^* \langle \langle \Phi_{\lambda x + y}, \varphi \rangle \rangle = \langle \langle \lambda \Phi_x + \Phi_y, \varphi \rangle \rangle$$

Donc $\psi(\lambda x + y) = \lambda \Phi_x + \Phi_y$, ψ est linéaire.

Montrons maintenant que c'est une bijection :

Dans le cas d'un \mathbf{k} -espace vectoriel E de dimension finie, $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$, il suffit donc de montrer l'injectivité de l'application linéaire ψ . Or ψ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Montrons que $\text{Ker}(\psi) = \{0\}$.

Nous cherchons l'ensemble des $x \in E$ tel que $\psi(x) = \Phi_x = 0$ l'application nulle, c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in E^*, \langle \langle \Phi_x, \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi, x \rangle = 0$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\psi) &= \{x \in E, \psi(x) = \Phi_x = 0\} \\ &= \{x \in E, \forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, x \rangle = 0\} \\ &= (E^*)^0 \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Nous concluons que ψ est linéaire et injective entre deux \mathbf{k} -espaces vectoriels de même dimension, donc ψ est bijective, c'est un isomorphisme d'espace vectoriel. \square

Remarque : La bidualité permet, en dimension finie, de faire un certain nombre d'abus d'écriture qu'il est intéressant de relever et d'utiliser une fois les concepts bien assimilés.

Soit $x \in E$ et $\varphi \in E^*$. Notons $\hat{x} = \psi(x)$.

Nous avons alors :

$$\hat{x}(\varphi) = \langle \langle \hat{x}, \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$$

D'où le raccourcis d'écriture en dimension finie en identifiant \hat{x} à x :

$$\varphi(x) = x(\varphi)$$

On se retrouve donc à considérer un élément de E comme une forme sur E^* , considérer E comme E^{**} .

L'espace projectif

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 2.1 Introduction | 11 |
| 2.2 Espace projectif et sous-espace projectif | 11 |
| 2.3 Coordonnées homogènes | 12 |
| 2.4 Cartes affines | 13 |
| 2.5 Paramétrisation des droites projectives | 13 |
| 2.6 Principe de dualité | 14 |
| 2.7 Théorème de Desargues, espace projectif arguésien | 14 |
| 2.8 Théorème de Pappus, commutativité du corps induit | 15 |
| 2.9 Homographie, $GL(E)$, $PGL(E)$ | 16 |

Dans ce chapitre considérons un corps \mathbf{k} commutatif et E un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension finie n sauf mention contraire. Nous noterons E_* l'ensemble E privé de son élément nul.

Section 2.1

Introduction

Introduction historique de la géométrie projective à faire.

Section 2.2

Espace projectif et sous-espace projectif

Définition 2.2.1 : Espace projectif

On appelle **projectif** de E , noté $\mathbb{P}(E)$, l'ensemble des droites vectorielles de E . C'est l'ensemble des classes d'équivalences $\langle u \rangle$ de $E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence de colinéarité :

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{k}^* : u = \lambda v$$

On peut ainsi considérer $\mathbb{P}(E)$ comme le quotient :

$$\mathbb{P}(E) = E_* / \sim$$

Par définition, la dimension de $\mathbb{P}(E)$ est $\dim(E) - 1 = n - 1$.

Notation

Dans le cas où $E = \mathbf{k}^{n+1}$ on notera $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$.
De plus dans le cas où $\mathbb{P}(E)$ est de dimension 1, on dit que c'est une **droite projective** et si $\mathbb{P}(E)$ est de dimension 2, on dit que c'est un **plan projectif**.

Nous introduisons à présent la projection canonique que nous noterons p par la suite. Cette surjection canonique permet de faire le lien entre l'espace vectoriel et l'espace projectif associé.

Proposition 2.2.2 : Surjection canonique

Il existe une **projection canonique** de E_* dans $\mathbb{P}(E)$ définie par :

$$\begin{aligned} p : E_* &\longrightarrow \mathbb{P}(E) \\ u &\longmapsto p(u) = \langle u \rangle = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{k}\} \end{aligned}$$

Cette projection est **surjective** par définition de $\mathbb{P}(E)$. De plus nous avons la propriété :

$$\forall \lambda \in \mathbf{k}^*, p(\lambda u) = p(u)$$

Définition 2.2.3 : Sous-espace projectif

Soit une partie U de $\mathbb{P}(E)$. On dit que U est un **sous-espace projectif** de $\mathbb{P}(E)$ si il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $U = p(F)$.

Ceci met en évidence une bijection entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension $k + 1$ et l'ensemble des sous-espace projectifs de dimension k de $\mathbb{P}(E)$. Le résultat suivant est très important car il explique entre autre les relations d'incidences non intuitives qui existent dans la géométrie projective.

Proposition 2.2.4 : Dimension des sous-espaces projectifs

Soit U et V deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$.

Si $\dim U + \dim V \geq \dim \mathbb{P}(E)$ alors l'intersection de U et V est non vide.

Remarque : Lorsque $\mathbb{P}(E)$ est de dimension 2 nous retrouvons le résultat : deux droites projectives se coupent toujours en un point unique.

Démonstration :

Il faut se ramener à l'espace vectoriel E . Soit F et G des \mathbf{k} -espaces vectoriels tel que $p(F) = U$ et $p(G) = V$. Alors :

$$\dim U + \dim V \geq \dim \mathbb{P}(E) \Leftrightarrow \dim F - 1 + \dim G - 1 \geq \dim E - 1$$

D'après la formule de la dimension d'une somme d'espace vectoriels :

$$\dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim E$$

Nous trouvons que :

$$\dim F + \dim G - \dim E \geq 1 \Rightarrow \dim(F \cap G) \geq 1$$

Donc $F \cap G$ est de dimension supérieure à 1, d'où $V \cap W$ non vide. \square

Section 2.3

Coordonnées homogènes

Nous cherchons à établir un système de coordonnées pour chaque point projectif A tel que le choix du représentant vectoriel engendrant la droite n'importe plus. Cela donne naissance à la notion de coordonnées homogènes.

Posons $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E . Alors tout élément A de $\mathbb{P}(E)$ s'écrit comme $p(a)$ avec $a = \sum_{k=1}^n a_k e_k = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Cependant, nous avons vu que $p(\lambda a) = p(a)$. Ainsi, la multiplication de a par un scalaire n'a pas d'effet par rapport à la projection canonique et $p(\lambda a)$ représente toujours le point A .

Nommons donc coordonnée homogène de A les coordonnées suivantes :

$$[a_1, \dots, a_n] = p(a_1, \dots, a_n) = \{\lambda(a_1, \dots, a_n) \mid \lambda \in \mathbf{k}^*\} \in \mathbf{k}_*^n / \mathbf{k}^*$$

Nous représentons à présent le point A par la classe d'équivalence de a par rapport à la relation de colinéaire.

Définition 2.3.1 : Coordonnées homogènes

Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension n et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$.
On appelle coordonnées homogènes du point projectif $A = p(a)$ les coordonnées notées $[a_1, \dots, a_n]$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{k}^* : p(a) = p(\lambda a) = [a_1, \dots, a_n] = [\lambda a_1, \dots, \lambda a_n]$$

Nous avons donc :

$$[a_1, \dots, a_n] = \{ \lambda(a_1, \dots, a_n) : \lambda \in \mathbf{k}^* \}$$

Section 2.4

Cartes affines

Le principe des cartes affines repose sur la simplification des coordonnées homogènes. L'idée est, qu'au lieu de représenter chaque élément de $\mathbb{P}(E)$ par une classe d'équivalence de E par rapport à la relation de colinéarité, il est préférable de prendre dans chaque classe d'équivalence un seul élément représentant tout les autres.

En supposant $a_n \neq 0$, divisons l'ensemble des coordonnées homogènes par a_n .

$$[a_1, \dots, a_n] = [a_0 a_n^{-1}, \dots, a_{n-1} a_n^{-1}, 1]$$

Ainsi, si $a_n \neq 0$ choisissons comme représentant de la classe $[a_0, \dots, a_n]$ le seul élément qui admet un 1 pour n -ième coordonnée. Mais cela ne permet de représenter qu'une seule partie de $\mathbb{P}(E)$ puisqu'il faut encore déterminer quel élément de la classe d'équivalence choisi-t-on lorsque $a_n = 0$. Et bien divisons par a_{n-1} et nous obtenons :

$$[a_1, \dots, a_n] = [a_1 a_{n-1}^{-1}, \dots, a_{n-2} a_{n-1}^{-1}, 1, 0]$$

Dans le cas général, si $a_n = \dots = a_{n-k+1} = 0$ alors choisissons pour représentant de la classe d'équivalence $[a_1, \dots, a_n]$ le seul élément qui admet un 1 pour k -ième coordonnée et des 0 pour toutes les coordonnées suivantes.

Et ainsi, nous pouvons partitionner $\mathbb{P}(E)$, remarquons alors qu'un espace projectif de dimension $n-1$ sur un corps \mathbf{k} est l'union de $\mathbf{k}^{n-1}, \mathbf{k}^{n-2}, \dots, \mathbf{k}$ et $\{\infty\}$. En effet nous pouvons identifier $\{\infty\}$ à la classe $[1, 0, \dots, 0]$ puis \mathbf{k} à la classe $[a_1, 1, 0, \dots, 0]$ puisque a_1 prend exactement toutes les valeurs de \mathbf{k} , \mathbf{k}^2 correspond à $[a_1, a_2, 1, 0, \dots, 0]$ puisque $(a_1, a_2) \in \mathbf{k}^2$ et ainsi de suite.

Nous remarquons qu'un espace projectif de dimension n peut être considéré comme l'union d'un espace affine de dimension n ainsi que d'un espace projectif de dimension $n-1$. Nous remarquons ainsi l'emboîtement de la construction. C'est donc l'union de n espace affine de dimension n à 0. C'est pourquoi on appelle carte affine cette représentation de notre espace projectif.

En particulier, la droite projective est une droite affine complété par un point à l'infini, et le plan projectif est un plan affine complété d'une droite projective, donc complété d'une droite affine à l'infini et d'un point à l'infini.

Définition 2.4.1 : Carte affine

Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel et $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé.

On appelle **carte affine** de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des représentants des classes d'équivalences **choisis selon une règle**. Ils forment une union d'espaces affines équivalente à $\mathbb{P}(E)$.

Section 2.5

Paramétrisation des droites projectives

Nous cherchons à paramétrer une droite projective passant par deux points distincts $A = p(a)$ et $B = p(b)$. Cette droite projective est l'ensemble des droites vectorielle du plan vectoriel engendré par les vecteurs a et b puisqu'ils sont non colinéaires ($A \neq B$). Chacune de ces droites est représenté par une famille de vecteur colinéaire.

Or nous savons que tout vecteur d'un plan peut se décomposer selon une base de ce plan, ici (a, b) , donc tout point de la droite projective (AB) est induit par une droite vectorielle du plan $\text{Vect}(a, b)$, engendrée par un vecteur v de la forme $\lambda a + \mu b$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{k}_*^2$.

Ainsi, la droite projective est paramétré par $(AB) = \{p(\lambda a + \mu b) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{k}_*^2\}$.

Proposition 2.5.1 : Paramétrisation d'une droite projective

Soit E un \mathbf{k} -espace vectoriel. Soient A et $B \in \mathbb{P}(E)$.

Alors la droite (AB) est $\{p(\lambda a + \mu b) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{k}_*^2\}$.

Principe de dualité

Nous allons découvrir le principe de dualité. La construction de ce principe proposée ici n'est pas rigoureuse mais reprend les arguments essentiels permettant de l'établir et d'en comprendre les mécanismes.

Nous savons que si l'espace vectoriel E est de dimension n alors son dual E^* est de même dimension. Ainsi la relation d'orthogonalité établit une bijection $\perp : X \mapsto X^\perp$ de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E^* , comme nous l'avons vu dans la proposition 1.2.8.

De plus, ces espaces orthogonaux vérifient des propriétés particulières :

- D'après la proposition 1.2.5, nous avons $\dim(X) + \dim(X^\perp) = n$.

Cela signifie que si X est de dimension p alors son orthogonal sera de dimension $n - p$.

- D'après la proposition 1.2.6, nous avons $X \subset Y \Leftrightarrow X^\perp \supset Y^\perp$.

Cela signifie que l'on a une inversion des relations d'incidence. Si tout élément de X appartient à Y alors après application de l'orthogonalité nous avons le contraire. C'est-à-dire que tout élément de Y^\perp appartient à X^\perp .

Nous obtenons donc des relations très fortes entre les éléments de E et de E^* . En passant aux projectifs $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E^*)$ par la projection canonique, puisque d'après la définition 2.2.3 il y a bijection entre sous-espace vectoriel et sous-espace projectif, nous obtenons le principe de dualité suivant :

- **Version complète :** « Il est possible d'inverser chaque espace projectif A de dimension p avec un espace projectif B de dimension $n - p$ et d'invertir les relations d'incidence $A \subset B$ en $A \supset B$ tout en conservant les propriétés des éléments géométriques. »
- **Version simplifiée :** « Il est possible d'invertir points et hyperplan projectifs et d'invertir la relation (le point M appartient à l'hyperplan H) avec (l'hyperplan M contient le point H) tout en conservant les résultats d'un théorème ».
- **Cas d'application concret :** Ce principe est particulièrement utilisé et intéressant dans le cas d'un plan projectif où droites et points échangent leur rôle et que l'alignement de trois points correspond à l'intersection de trois droites en un même point.

On dit que $\mathbb{P}(E^*)$ est l'espace projectif dual de $\mathbb{P}(E)$.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftrightarrow{\perp} & E^* \\
 \downarrow p_E & & \downarrow p_{E^*} \\
 \mathbb{P}(E) & \xleftrightarrow[\text{dualité}]{\text{Principe}} & \mathbb{P}(E^*)
 \end{array}$$

Il est clair que ce principe est très utile. Nous allons d'ailleurs le retrouver dans les démonstrations des théorèmes suivants. De plus, dès lors que l'on démontre un résultat, on démontre automatiquement tous les énoncés duaux de ce dernier. Ceci par équivalence des situations par dualité.

Théorème de Desargues, espace projectif arguésien

Théorème 2.7.1 : De Desargues

Soient (A, B, C) et (A', B', C') deux triplet de points non alignés du plan projectif $\mathbb{P}(E)$ tels que les droites (AA') , (BB') et (CC') soient distinctes.

Nommons P , Q et R les points d'intersections respectifs de (BC) et $(B'C')$, de (CA) et $(C'A')$, et de (AB) et $(A'B')$.

Les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si P , Q et R sont alignés.

Démonstration :

Nous allons montrer que si les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes alors P , Q et R sont alignés. Puis nous utiliserons la dualité des espaces projectifs pour conclure la réciproque.

Supposons (AA') , (BB') et (CC') concourantes et notons comme précédemment p la projection canonique de $E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$. Supposons $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$. Posons maintenant $A = p(a)$, $B = p(b)$, $C = p(c)$ et $S = p(s)$ le points d'intersection des droites (AA') , (BB') et (CC') .

D'après la paramétrisation d'une droite projective, il existe donc $\lambda \in \mathbf{k}$ tel que $A' = p(s + \lambda a)$. De même nous obtenons l'existence de μ et ν tel que $B' = p(s + \mu b)$ et $C' = p(s + \nu c)$.

L'intersection de (BC) et $(B'C')$ est le point P et représente :

$$\begin{aligned} (BC) \cap (B'C') &= \{p(\alpha a + \beta c) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{k}_*^2\} \cap \{p(\gamma(s + \mu b) + \delta(s + \nu c)) \mid \gamma, \delta \in \mathbf{k}_*^2\} \\ &= \{p(\alpha b + \beta c) = p(\gamma(s + \mu b) + \delta(s + \nu c)) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{k}_*^4\} \\ &= \{\theta(\alpha b + \beta c) = \gamma(s + \mu b) + \delta(s + \nu c) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta \in \mathbf{k}_*^5\} \end{aligned}$$

Et en résolvant le système nous trouvons que $P = (BC) \cap (B'C') = p(\mu b - \nu c) = p(u_1)$. De même, nous obtenons que $Q = p(\nu c - \lambda a) = p(u_2)$ et $R = p(\lambda a - \mu b) = p(u_3)$. Montrons que P , Q et R sont alignés.

Remarquons que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ c'est-à-dire que u_1 , u_2 et u_3 sont coplanaires dans E . D'où l'alignement des points projectifs déduits des droites vectorielles engendrées par ces trois vecteurs. P , Q et R sont bien alignés.

Montrons maintenant la réciproque et supposons P , Q et R alignés. Alors notons $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{A}', \tilde{B}', \tilde{C}'$ les points de $\mathbb{P}(E^*)$ correspondant respectivement par dualité aux droites (BC) , (CA) , (AB) , $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$. Nommons également $\alpha = (\tilde{AA}')$, $\beta = (\tilde{BB}')$, $\gamma = (\tilde{CC}')$ les droites projectives du plan projectif dual $\mathbb{P}(E^*)$ correspondant par dualité aux points P , Q et R .

Puisque par hypothèse P , Q et R sont alignés, nous en déduisons que α , β et γ sont concourantes. En nous plaçant dans $\mathbb{P}(E^*)$ comme dans un espace projectif, nous pouvons appliquer le début de la preuve et déduire que $\tilde{P} = (\tilde{B}\tilde{C}) \cap (\tilde{B}'\tilde{C}')$, $\tilde{Q} = (\tilde{C}\tilde{A}) \cap (\tilde{C}'\tilde{A}')$ et $\tilde{R} = (\tilde{A}\tilde{B}) \cap (\tilde{A}'\tilde{B}')$ sont alignés.

Or à ces trois points \tilde{P} , \tilde{Q} et \tilde{R} correspondent les droites (AA') , (BB') et (CC') de $\mathbb{P}(E)$. Donc puisque ces trois points sont alignés, les trois droites sont concourantes. \square

Section 2.8

Théorème de Pappus, commutativité du corps induit

Nous allons maintenant nous intéresser au théorème de Pappus, et en particulier son équivalence avec la commutativité du corps sous-jacent.

Théorème 2.8.1 : Pappus et commutativité

Soit $\mathbb{P}(E)$ un plan projectif sur un corps \mathbf{k} .

Alors \mathbf{k} est **commutatif** si il existe deux droite Δ et Δ' de $\mathbb{P}(E)$ vérifiant la propriété suivante :
Pour tout triplet (A, B, C) de Δ et tout triplet (A', B', C') de Δ' , les trois points suivants sont alignés :

$$P = (BC') \cap (CB'), \quad Q = (CA') \cap (AC'), \quad R = (AB') \cap (BA')$$

Réciproquement, si \mathbf{k} est **commutatif**, tout couple de droites distinctes possède cette propriété.

Démonstration :

Montrons le premier sens : Supposons qu'il existe un tel couple de droite Δ et Δ' de $\mathbb{P}(E)$.

Nous allons nous occuper dans un premier temps seulement des triplets (A, B, C) de Δ et (A', B', C') de Δ' tel que $O = \Delta \cap \Delta' \notin \Delta'' = (QR)$. En effet, tout couple vérifié la propriété, en particulier ces couples la vérifie, et cela nous permet de conclure, sans nous occuper du reste des couples.

Envoyons cette droite Δ'' à l'infini. Munissons $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E) \setminus \Delta''$ d'une structure de plan affine. Nous retrouvons \mathcal{D} et \mathcal{D}' les droites affines correspondant à Δ et Δ' par restriction à \mathcal{P} après avoir retiré les points appartenant à Δ'' .

Puisque le point O d'intersection de Δ et Δ' n'est pas sur la droite Δ'' , alors les droites affines \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes en O . Puisque Q et R ont été envoyé à l'infini, nous en déduisons que les restrictions des droites (CA') et (AC') ainsi que (AB') et (BA') au plan affine \mathcal{P} sont parallèles.

Or $P = (BC') \cap (CB')$ est aligné avec Q et R , donc P appartient à Δ'' ce qui implique de (BC') et (CB') sont parallèles. Ainsi le fait que (CA') est parallèle avec (AC') et de même pour (AB') et (BA') implique que les droites (BC') et (CB') sont parallèles, et ceci pour tout triplet (A, B, C) et (A', B', C') .

Nous pouvons donc choisir deux points $C \in \mathcal{D}$ et $B' \in \mathcal{D}'$ et définir les autres points pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{k}^*$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= x\overrightarrow{OC}, & \overrightarrow{OB} &= y\overrightarrow{OA} = yx\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OA'} &= y\overrightarrow{OB'}, & \overrightarrow{OC'} &= x\overrightarrow{OA'} = xy\overrightarrow{OB'} \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = -x\overrightarrow{OC} + x\overrightarrow{OA'} = x\overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{BA'} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'} = -y\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB'} = y\overrightarrow{AB'}\end{aligned}$$

Ainsi nous retrouvons (CA') parallèle avec (AC') et de même pour (AB') et (BA') . Cela implique que les droites (BC') et (CB') sont parallèles, or $\overrightarrow{OB} = yx\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OC'} = xy\overrightarrow{OB'}$. Donc :

$$\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC'} = -yx\overrightarrow{OC} + xy\overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{CB'}$$

Le parallélisme de (BC') et (CB') implique donc que $yx = xy$ d'où la commutativité de \mathbf{k} .

Montrons le deuxième sens : Supposons \mathbf{k} commutatif. Montrons que pour tout couple de droites distinctes, tout couple de triplet de points vérifient P, Q, R alignés.

Soient Δ et Δ' deux droites de $\mathbb{P}(E)$ et soient (A, B, C) et (A', B', C') deux triplets de points distincts portés par ces deux droites.

Si l'un de ces points est confondu avec $O = \Delta \cap \Delta'$, remarquons que deux des trois points P, Q et R sont confondus, donc ils sont trivialement alignés.

Supposons donc que aucun des points n'est l'intersection de Δ et Δ' . La droite $\Delta'' = (QR)$ ne passe par aucun des points du couple de triplet. Nous pouvons envoyer cette droite Δ'' à l'infini et munir $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E) \setminus \Delta''$ d'une structure de plan affine. Nous sommes à présent dans la configuration de deux triplets de points alignés dans un plan affine vérifiant le parallélisme entre (CA') et (AC') ainsi qu'entre (AB') et (BA') . Montrons qu'alors (BC') et (CB') sont parallèles ce qui conclura puisque que P leur point d'intersection serait alors sur la droite Δ'' c'est-à-dire aligné avec Q et R , le résultat recherché.

Nous sommes confronté à deux cas :

- a) Le point $O = \Delta \cap \Delta' \in \Delta''$. Ainsi les droites affines \mathcal{D} et \mathcal{D}' issues de la restriction de Δ et Δ' sont parallèles. Alors le parallélisme entre (CA') et (AC') ainsi qu'entre (AB') et (BA') , nous obtenons des parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$. Nous en déduisons que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{C'B'}$ d'où $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{B'C}$.

Les droites (BC') et (CB') sont parallèles, ce qui conclut pour ce cas.

- b) Le point $O = \Delta \cap \Delta' \notin \Delta''$. Ainsi les droites affines \mathcal{D} et \mathcal{D}' issues de la restriction de Δ et Δ' sont sécantes en O . Il existe donc deux scalaire x, y tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= x\overrightarrow{OC}, & \overrightarrow{OC'} &= x\overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{OB} &= y\overrightarrow{OA}, & \overrightarrow{OA'} &= y\overrightarrow{OB'}\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\overrightarrow{OC'} = xy\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OB} = yx\overrightarrow{OC}$. Et puisque \mathbf{k} est commutatif, $xy = yx$ cela implique $\overrightarrow{BC'} = xy\overrightarrow{CB'}$ donc (BC') est parallèle à $(B'C)$ ce qui conclut. □

Section 2.9

Homographie, $\text{GL}(E)$, $\text{PGL}(E)$

Terminons notre approche de la géométrie projective en introduisant le groupe de transformation naturel d'un espace projectif.

Définition 2.9.1 : Homographie

On appelle **homographie** toute application du groupe $\text{PGL}(E)$

Mais quel est ce groupe de transformation ? Il vient d'une modification du groupe linéaire de E .

Soit $\text{GL}(E)$ le groupe linéaire de E . Alors $\text{GL}(E)$ agit sur E par l'action de groupe suivante : $f.x \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$. Nous retrouvons une action induite sur $\mathbb{P}(E)$:

$$D \in \mathbb{P}(E) \quad \begin{matrix} f.D \\ \stackrel{\text{def}}{=} \\ f(D) \end{matrix} \quad \begin{matrix} D \subset E \end{matrix}$$

En effet, si $f \in GL(E)$, et si $x \sim x'$, nous avons $x' = \lambda x$, pour $\lambda \in \mathbf{k}^*$ d'où $f(x) \sim f(x')$ car $f(x') = \lambda f(x)$. De cette remarque nous construisons $PGL(E)$, le groupe de transformation associé à l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$. Le groupe $PGL(E)$ est le quotient du groupe linéaire $GL(E)$ par l'ensemble des homothéties car ce sont les applications qui agissent trivialement sur $\mathbb{P}(E)$. Elles forment le noyau de $GL(E)$. Nous pouvons aussi identifier ce quotient au quotient de $GL(E)$ par l'action du groupe \mathbf{k}^* , car les homothéties sont l'application d'une multiplication par un scalaire.

Nous obtenons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 GL(E) & \longrightarrow & \text{Bij}(X) \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 PGL(E) = GL(E) / \mathbf{k}^* & &
 \end{array}$$

Ceci termine la présentation de la géométrie projective. La suite présente une utilisation des bases duales à travers un exercice sur la somme des puissances k^{es} .

Une utilisation des bases duales

On connaît les formules classiques :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

qui expriment les sommes des n premières valeurs de P pour $P = X$, $P = X^2$ et $P = X^3$. Nous allons généraliser ces formules en calculant $P(1) + \dots + P(n)$, pour un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ quelconque.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ appelé *dérivée discrète* de P .

a) Montrez que l'application $\Delta : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$ est un endomorphisme de \mathbb{Q} -espaces vectoriels.

L'application Δ est clairement une application de $\mathbb{Q}[x]$ dans lui-même puisque c'est la différence de deux polynômes de \mathbb{Q} . Montrons que Δ est linéaire.

$$\begin{aligned} \forall P, Q \in \mathbb{Q}[X], \Delta(P+Q) &= (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X) \\ &= P(X+1) + Q(X+1) - P(X) - Q(X) \\ &= P(X+1) - P(X) + Q(X+1) - Q(X) = \Delta(P) + \Delta(Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathbb{Q}[X], \lambda \in \mathbb{Q}, \Delta(\lambda P) &= (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X) \\ &= \lambda P(X+1) - \lambda P(X) = \lambda \Delta(P) \end{aligned}$$

L'application Δ est un endomorphisme

b) Montrez que $\Delta^j(P) = \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l)$ pour tout $j \geq 0$.

Montrons cette propriété par récurrence. Soit $H_n : \ll \Delta^j(P) = \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l) \gg$.

H_0 est vérifiée car $\Delta^0(P) = \text{id}(P) = P(X)$ et $\sum_{l=0}^0 (-1)^0 \binom{0}{l} P(X+l) = P(X)$.

Supposons H_j vérifiée.

$$\begin{aligned}
\Delta^{j+1}(P) &= \Delta(\Delta^j(P)) = \Delta\left(\sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l)\right) \\
&= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} \Delta(P(X+l)) \\
&= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} [P(X+l+1) - P(X+l)] \\
&= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l+1) - \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l) \\
&= \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^{j+1-l} \binom{j}{l-1} P(X+l) - \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l) \\
&= (-1)^0 P(X+j+1) + (-1)^{j+1} P(X) + \sum_{l=1}^j (-1)^{j+1-l} \binom{j}{l} P(X+l) \left[\binom{j}{l-1} + \binom{j}{l} \right] \\
&= \sum_{l=0}^{j+1} (-1)^{j+1-l} \binom{j+1}{l} P(X+l)
\end{aligned}$$

On conclut que $\forall j \geq 0$, $\Delta^j(P) = \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} P(X+l)$.

c) Calculez $\Delta^j(X^k)$ pour $k \geq 0$.

Calculons simplement la valeur de $\Delta^j(P)$ pour $P = X^k$, $k \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta^j(X^k) &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} (X+l)^k \\
&= \sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^k (-1)^{j-l} \binom{j}{l} \binom{k}{i} X^{k-i} l^i
\end{aligned}$$

2. Pour tout entier $j \geq 0$, on pose $\phi_j(P) = (\Delta^j P)(0)$.

a) Montrez que l'application $\phi_j : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}$ est une forme linéaire.

ϕ_j est clairement une application de $\mathbb{Q}[X]$ dans \mathbb{Q} . Montrons qu'elle est linéaire :

$$\begin{aligned}
\forall P, S \in \mathbb{Q}[X], \forall \lambda \in \mathbb{Q}, \phi_j(\lambda P + Q) &= (\Delta^j(\lambda P + Q))(0) \\
&= (\lambda \Delta^j(P) + \Delta^j(Q))(0) \\
\text{linéarité de l'évaluation} &= \lambda(\Delta^j(P))(0) + (\Delta^j(Q))(0) \\
&= \lambda \phi_j(P) + \phi_j(Q)
\end{aligned}$$

L'application ϕ_j est une forme linéaire sur $\mathbb{Q}[X]$.

b) Calculez $\phi_j(X^k)$ puis $\phi_j(P)$ pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ quelconque.

Calculons $\phi_j(X^k)$:

$$\begin{aligned}
\phi_j(X^k) &= (\Delta^j(X^k))(0) = \left(\sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^k (-1)^{j-l} \binom{j}{l} \binom{k}{i} X^{k-i} l^i \right) (0) \\
&= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} l^k
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout polynôme de la forme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, nous avons :

$$\phi_j(P) = \phi_j\left(\sum_{k=0}^d a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^d a_k \phi_j(X^k) = \sum_{k=0}^d a_k \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} \binom{j}{l} l^k$$

3. Pour tout entier $i \geq 0$, on appelle i -ème polynôme de Hilbert le polynôme noté $\binom{X}{i}$ défini par :

$$\binom{X}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{X}{i} = \frac{1}{i!} X(X-1)\dots(X-i+1) \quad \text{si } i \geq 1.$$

a) Montrez que $\Delta\binom{X}{0} = 0$ et $\Delta\binom{X}{i} = \binom{X}{i-1}$ si $i \geq 1$.

Par simple substitution :

$$\Delta\binom{X}{0} = \binom{X}{0}(X+1) - \binom{X}{0}(X) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \forall i \geq 1, \Delta\binom{X}{i} &= \binom{X}{i}(X+1) - \binom{X}{i}(X) \\ &= \frac{1}{i!} [(X+1)X(X-1)\dots(X-i+2) - X(X-1)\dots(X-i+1)] \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-i+2)}{i!} [(X+1) - (X-i+1)] \\ &= \frac{1}{(i-1)!} X(X-1)\dots(X-i+2) = \binom{X}{i-1} \end{aligned}$$

Comme $\Delta\binom{X}{i} = \binom{X}{i-1}$ on déduit que $\Delta^j\binom{X}{i} = \binom{X}{i-j}$.

b) Montrez que pour tous $i, j \geq 0$ on a $\phi_j\binom{X}{i} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \phi_j\binom{X}{i} &= \left(\Delta^j\binom{X}{i}\right)(0) = \binom{X}{i-j}(0) \\ &= \left(\frac{1}{(i-j)!} X(X-1)\dots(X-(i-j)+1)\right) \end{aligned}$$

Si $i = j$, $i - j = 0$ donc :

$$\binom{X}{i-j} = \binom{X}{0} = 1 \Rightarrow \phi_j\binom{X}{i} = 1$$

Si $i \neq j$, 0 est racine du polynôme $\binom{X}{i-j}(0)$ d'où :

$$\phi_j\binom{X}{i} = \binom{X}{i-j}(0) = 0$$

4. Soit $d \geq 0$ un entier et $E = \mathbb{Q}_d[X]$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel des polynômes de degré $\leq d$.

a) Montrez que la famille $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$ est une base de E .

La dimension de $\mathbb{Q}_d[X]$ est $d+1$. De plus la famille $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$ possède $d+1$ éléments. Il suffit donc d'établir la liberté de $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$ pour montrer que c'est une base de $\mathbb{Q}_d[X]$. Chaque polynôme de cette famille est un polynôme de degré i . Nous avons donc $d+1$ polynôme de degré différents, ils sont linéairement indépendants ! La famille $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$ est une base de $\mathbb{Q}_d[X]$.

b) Montrez que la famille $\{\phi_j\}_{i \leq d}$ est une base du dual E^* qui est la base duale de $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$.

Nous avons établi dans la question 3. que $\forall i, j \geq 0$, $\phi_j\binom{X}{i} = \delta_{i,j}$. De plus, nous savons à présent que $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$ est une base de $\mathbb{Q}_d[X]$. Ainsi nous savons que $\{\phi_j\}_{i \leq d}$ est la base duale de $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$ car nous la retrouvons par construction. $\{\phi_j\}_{i \leq d}$ est donc une base de $\mathbb{Q}_d[X]^*$.

c) Montrez que pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}_d[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^d \phi_i(P) \binom{X}{i}$.

$\phi_i(P)$ représente la i -ème coordonnée de P dans la base antéduale de $\{\phi_j\}_{j \leq d}$, c'est-à-dire $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$. Nous avons donc $P = \sum_{i=0}^d \phi_i(P) \binom{X}{i}$ car c'est la décomposition de P dans la base $\{\binom{X}{i}\}_{i \leq d}$.

d) En utilisant 3.a), déduisez-en une expression pour $P(X) + P(X+1) + \dots + P(X+n)$.

Posons $\alpha_i = \phi_i(P)$. Alors, en remarquant que $\binom{X}{i} = \Delta \binom{X}{i+1} = \binom{X+1}{i+1} - \binom{X}{i+1}$, on obtient :

$$P = \sum_{i=0}^d \alpha_i \binom{X}{i} = \sum_{i=0}^d \alpha_i \left[\binom{X+1}{i+1} - \binom{X}{i+1} \right]$$

$$\begin{aligned} P(X) + P(X+1) + \dots + P(X+n) &= \sum_{k=0}^n P(X+k) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^d \alpha_i \left[\binom{X+1+k}{i+1} - \binom{X+k}{i+1} \right] \\ &= \sum_{i=0}^d \alpha_i \left[\binom{X+1+n}{i+1} - \binom{X}{i+1} \right] \end{aligned}$$

e) Donnez une expression pour $P(0) + P(1) + \dots + P(n)$.

On remarque une expression simple de $\binom{X+1+n}{i+1}$ et $\binom{X}{i+1}$ lorsqu'il sont évalués en 0 :

$$\begin{aligned} \binom{X+1+n}{i+1}(0) &= \left(\frac{1}{(i+1)!} (X+n+1) \cdots (X+n+1-i) \right)(0) = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} \\ \binom{X}{i+1}(0) &= \left(\frac{1}{(i+1)!} X(X-1) \cdots (X-i) \right)(0) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P(0) + P(1) + \dots + P(n) = \sum_{i=0}^d \frac{\alpha_i (n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} = \sum_{i=0}^d \frac{\alpha_i (n+1)n \cdots (n+1-i)}{(i+1)!}$$

Donnez l'exemple $P = X^4$.

Il nous faut calculer les α_i :

$$\phi_i(X^4) = (\Delta^i(X^4))(0) = \sum_{l=0}^i (-1)^{i-l} \binom{i}{l} l^4 = \sum_{l=1}^i (-1)^{i-l} \binom{i}{l} l^4$$

$$\phi_0(X^4) = 0$$

$$\phi_1(X^4) = 1 \cdot \binom{1}{1} \cdot 1^4 = 1$$

$$\phi_2(X^4) = (-1) \cdot \binom{2}{1} \cdot 1^4 + 1 \cdot \binom{2}{2} \cdot 2^4 = 2^4 - 2 = 14$$

$$\phi_3(X^4) = 1 \cdot \binom{3}{1} \cdot 1^4 + (-1) \cdot \binom{3}{2} \cdot 2^4 + 1 \cdot \binom{3}{3} \cdot 3^4 = 3 - 16 \cdot 3 + 81 = 36$$

$$\phi_4(X^4) = (-1) \cdot \binom{4}{1} \cdot 1^4 + 1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2^4 + (-1) \cdot \binom{4}{3} \cdot 3^4 + 1 \cdot \binom{4}{4} \cdot 4^4 = -4 + 6 \cdot 16 - 4 \cdot 81 + 256 = 24$$

Nous avons enfin :

$$\begin{aligned} P(0) + P(1) + \dots + P(n) &= \frac{(n+1)n}{2!} + 14 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + 36 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} + 24 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!} \\ &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \\ &= \frac{(3n^2 + 3n - 1)(2n + 1)(n + 1)n}{30} \end{aligned}$$

En complément, un petit programme sous sage permettant de calculer rapidement ces sommes :

```
def phi(i,P):
    S1=0
    d=P.degree()
    for k in [0..d]:
        S2=0
        for l in [0..i]:
            S2=S2+(-1)^(i-l)*binomial(i,l)*l^k
        end
        S1=S1+P[k]*S2
    end
    return(S1)
end
```

```
def produit(a,b,e):
    Q=1
    for k in [a..b]:
        Q=Q*e(n,k)
    end
    return(Q)
end
```

```
def somme(P):
    n=var('n')
    d=P.degree()
    S=0
    for i in [0..d]:
        S=S+phi(i,P)*produit(0,i,n+1-x)\
            /((i+1).factorial())
    end
    return(S.factor())
end
```

Ici un test, qui peut être modifié dans le fichier *.tex*. Le module SageTeX permet de faire directement le calcul.

```
sage: x=QQ['x'].0 1
sage: somme(x^4) 2
```

$$\frac{1}{30} (3n^2 + 3n - 1)(2n + 1)(n + 1)n$$