Théorème du changement base

Andrés Sarrazola Alzate,

Séminaire, deuxième semestre 2016.

Directeur Pr. Matthieu Rogmany.

Université de Rennes 1

12 janvier 2016

Université de Rennes 1,
Master de Mathématiques. **Andrés Sarrazola Alzate.**

Table des matières

Université de Rennes 1,
Master de Mathématiques. **Andrés Sarrazola Alzate.**

Chapitre 1

Cohomologie

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions principales sur la cohomologie des faisceaux et le complexe de Čeche. Notre objectif sera montrer que sous des conditions appropriées sur un schéma X et un faisceau $\mathscr{F}$ sur X, nous pouvons calculer les groupes de cohomologie de $\mathscr{F}$ comme les groupes de cohomologie de Čech de $\mathscr{F}$.

1.1 Foncteurs dérivés

Soit $\{A^\bullet, d^\bullet\}$ un complexe dans une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$, nous définissons le i-ème module d'homologie $H^i(A^\bullet)$ par

$$H^i(A^\bullet) = \mathrm{Ker} d^i / \mathrm{im} d^{i-1}$$

Un object I de $\mathfrak{U}$ s'appelle *injectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}(., I)$ est exact. Une résolution injective d'un object A de $\mathfrak{A}$ c'est un complexe $I^\bullet$ défini en grades positifs avec un morphisme $\epsilon : A \to I^0$ telle que la suite

$$0 \to A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \to I^1 \to ...$$

est exacte.
Si tout object de $\mathfrak{A}$ est isomorphe à un sous-objet injectif de $\mathfrak{A}$, donc on dit que $\mathfrak{A}$ a assez d'objets injectifs, et si $\mathfrak{A}$ a la dernière propriété, donc tout objet a une résolution injectif. De plus, si on a deux résolutions injectifs d'un objet $\mathfrak{A}$ il existe toujours une équivalence homotopie entre eux.
finalement, si $\mathfrak{A}$ c'est une catégorie abélienne avec assez d'objets injectifs et $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}$ c'est un foncteur covariante. Donc nous construisons les foncteurs

dérivés à droite R^iF, $i \geq 0$, de F comme suite. Pour chaque objet A de $\mathfrak{A}$, nous choisissons une résolution injectif $I^\bullet$ de A, et on définit $R^iF(A) = H^i(F(I^\bullet))$.

1.2 Cohomologie de faisceaux et des schémas noethériens affines

1.2.1 Définition. *Soit X un espace topologique. Soit $\Gamma(X,.)$ le foncteur sections globales de la catégorie des faisceaux de groupes abéliennes sur X, $\mathfrak{Ab}(X)$, à la catégorie des groupes abéliennes $\mathfrak{Ab}$. Nous définissons les foncteurs de cohomologie $H^i(X,.)$ comme les foncteurs dérivés à droite du foncteur sections globales $\Gamma(X,.)$.*

1.2.2 Proposition. *Soit I un module injectif sur un anneau noethérien A. Alors le faisceau $\tilde{I}$ sur $X = Spec\ A$ est flasque*

1.2.3 Théorème. *Soit $X = Spec\ A$ le spectre d'un anneau noethérien. Alors pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur X, et pour tout $i > 0$, on a $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X et $M = \Gamma(X, \mathscr{F})$. Nous savons que le foncteur $M \to \tilde{M}$ c'est une équivalence des catégories entre la catégorie de $A-$modules de type fini et la catégorie de $\mathscr{O}_X-$modules cohérents, et sont inverse c'est le foncteur sections globales. Cette propriété nous donne une suite exacte des faisceaux sur X

$$0 \to \mathscr{F} \to \tilde{I}^\bullet. \tag{1.1}$$

Par la proposition 1.3.2 nous savons que chaque $\tilde{I}^i$ est flasque et par conséquence en appliquant le foncteur $\Gamma(X,.)$ sur la suite 1.1 et l'observation donnée au début nous obtenons $H^0(X, \mathscr{F}) = M$ et $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $i > 0$. □

1.2.4 Corollaire. *Soit X un schéma noethérien et $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Alors il existe un faisceau flasque et quasi-cohérent $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{F}$ c'est un sous-faisceau de $\mathscr{G}$*

Démonstration. Soit $U_i = spec\ A_i$ un recouvrement fini par des ouverts affines, $\mathscr{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$ et I_i A_i- modules injectifs telles que $M_i \subset I_i$. Donc si

$f : U_i \to X$ c'est l'inclusion, les morphismes des faisceaux injectifs $\mathscr{F}|_{U_i} \to \tilde{I}_i$ induisent un morphisme $\mathscr{F} \to f_*(\tilde{I}_i)$ et an prenant la somme directe on obtient un morphisme injectif $\mathscr{F} \to \bigoplus_i f_*(\tilde{I}_i)$. □

1.3 Cohomologie de Čech

Soit X un espace topologique et $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout ensemble fini d'indices $i_0, ..., i_p \in I$ on dénote l'intersection $U_{i_0} \cap ...U_{i_p}$ par $U_{i_0...i_p}$.
Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliennes sur X. Nous définissons un nouveau complexe de groupes abéliennes, $C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$, de la manière suivante. Pour chaque $p \geq 0$, soit

$$C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i_0<...<i_p} \mathscr{F}(U_{i_0...i_p}).$$

Et, on définit le morphisme $d : C^p \to C^{p+1}$ en prenant

$$(d\alpha)_{i_0...i_p} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0...\hat{i}_k...i_{p+1}}|_{U_{i_0...i_{p+1}}}$$

1.3.1 Remarque. *Nous supposerons $\alpha_{i_0.,,,.i_p} = 0$ s'il existe un indice répété, et si σ c'est une permutation qui préserve l'ordre donc $\alpha_{i_0,...,i_p} = (-1)^\sigma \alpha_{\sigma i_0,...,\sigma i_p}$*

1.3.1 Définition. *Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout faisceau de groupes abéliennes $\mathscr{F}$ sur X nous définissons le $p-$ème groupe de cohomologie de Čech, par rapport au recouvrement $\mathscr{U}$ par*

$$\check{H}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = H^p(C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})).$$

Soit $V \subseteq X$ un sous-ensemble ouvert de X avec $f : V \to X$ l'inclusion et $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ comme dans la définition ci-dessus. On construit un complexe des faisceaux $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ sur X de la manière suivante. Pour chaque $p \geq 0$, soit

$$\mathscr{C}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i_0<...<i_p} f_*(\mathscr{F}|_{U_{i_0...i_p}})$$

et les morphismes $d : \mathscr{C}^p \to \mathscr{C}^{p+1}$ comme ci-dessus.

Les suivantes résultats peuvent être consultés dans [1].

1.1 Lemme. *Pour tout triplet X, $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ comme ci-dessus nous avons $\check{H}^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \simeq \Gamma(X,\mathscr{F})$*

1.2 Lemme. *Pour tout $\mathscr{F} \in \mathfrak{Ab}(X)$ il existe un morphisme naturel $\epsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$ tel que la suite des faisceaux*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \ldots$$

est exacte.

1.3.2 Proposition. *Pour tout triple X, $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ comme ci-dessus, mais avec $\mathscr{F}$ un faisceau flasque, nous avons $\check{H}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = 0$ pour tout $p > 0$.*

1.3 Lemme. *Pour tout $p \geq 0$, il existe un morphisme fonctoriel dans $\mathscr{F}$,*

$$\check{H}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^p(X,\mathscr{F}).$$

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}^\bullet$ une résolution injectif de $\mathscr{F}$. L'acyclicité donnée dans la proposition 1.3.2 nous dit qu'il existe un unique morphisme (sauf des homotopies) de complexes $\mathscr{C}^\bullet \to \mathscr{I}^\bullet$. □

1.3.3 Théorème. *Soit X un schéma noethérien et séparé, soit $\mathscr{U}$ un recouvrement affine de X, et soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Alors pour tout $p \geq 0$ les morphismes naturels donnés par la proposition précédente sont des isomorphismes.*

Démonstration. Pour $p = 0$ c'est le lemme 1.1. Pour le cas général, le corollaire 1.2.4 nous donne une suite exacte

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{R} \to 0,$$

où $\mathscr{R}$ c'est le quotient. comme X est séparé, les intersections $U_{i_0 \ldots i_p}$ sont des ouverts affines et le théorème 1.2.3 nous dit que la suite

$$0 \to \mathscr{F}(U_{i_0\ldots i_p}) \to (U_{i_0\ldots i_p}) \to \mathscr{R}(U_{i_0\ldots i_p}) \to 0$$

est exact et par conséquence nous obtenons un suite exacte des complexes de Čech

$$0 \to C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{G}) \to C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{R}) \to 0.$$

Dans la suite exacte longue en cohomologie la proposition 1.3.2 nous donne un suite exacte

$$0 \to \check{H}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to \check{H}^0(\mathscr{U}, \mathscr{G}) \to \check{H}^0(\mathscr{U}, \mathscr{R}) \to \check{H}^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to 0,$$

et le cas $p = 0$ nos dit que $\check{H}^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \simeq H^1(X, \mathscr{F})$. Comme $\mathscr{R}$ est quasi-cohérent on obtient le résultat par induction. $\square$

Université de Rennes 1,
Master de Mathématiques. **Andrés Sarrazola Alzate.**

Chapitre 2

Théorème du changement base

Dans ce chapitre notre objectif sera montrer le théorème suivant

TEOREMA **1.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre des schémas noethériens avec $Y = Spec\ A$ un schéma affine, et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X, plat sur Y. Alors il existe un complexe finite $K^\bullet : 0 \to K^0 \to K^1 \to ... \to K^n \to 0.$ de $A-$modules projectifs de type fini et un isomorphisme de foncteurs*

$$H^p(X \times_Y spec(B), \mathscr{F} \otimes_A B) \simeq H^p(K^\bullet \otimes_A B), \quad (p \geq 0)$$

sur la catégorie de $A-$algèbres.

2.0.4 Définition. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas et $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. On dit que $\mathscr{F}$ c'est un faisceau plat sur Y ou $f-$plat si pour tout $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ c'est un $\mathscr{O}_{Y,f(x)}-$module plat.*

2.0.2 Remarque. *La définition précédente est équivalente a montrer que si $U \subset X$, $V \subset Y$ sont des ouverts affines avec $f(U) \subset V$, donc $\mathscr{F}(U)$ c'est un $\mathscr{O}_Y(V)-$module plat.*

Nous aurons besoin des suivants lemmes dont démonstration se trouve dans [2].

2.1 Lemme. *Soient A un anneau noethérien et $C^\bullet$ un complexe de $A-$modules tel que les groupes de cohomologie $H^i(C^\bullet)$ sont $A-$modules de type fini et tel que $C^p \neq 0$ seulement si $0 \leq p \leq n$. Alors il existe un complexe $K^\bullet$ de $A-$modules de type fini tel que $K^p \neq 0$ seulement si $0 \leq p \leq n$, K^p est libre si $1 \leq p \leq n$ et un morphisme de complexes $\phi : K^\bullet \to C^\bullet$ tel que ϕ induit un isomorphisme $H^i(K^\bullet) \to H^i(C^\bullet)$, pour tout i. De plus si tous les $A-$modules C^p sont plats, donc K^0 sera un $A-$module plat aussi.*

2.2 Lemme. *Soient $C^\bullet$, $K^\bullet$ complexes finis de $A-$modules plats, et soit $K^\bullet \to C^\bullet$ un morphisme de complexes qui induit des isomorphismes $H^p(K^\bullet) \to H^p(C^\bullet)$ pour tout p. Alors pour toute $A-$algèbre B les morphismes $H^p(K^\bullet \otimes_A B) \to H^p(C^\bullet \otimes_A B)$ sont des isomorphismes.*

Démonstration du Théorème 1. Soit $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Comme f c'est un morphisme propre et Y c'est un schéma affine donc X c'est un schéma séparé et par conséquence toutes les intersections $U_{i_0,\dots,i_p}$ sont des ouverts affines. De plus, par la remarque 2.0.2 (en prenant $U = U_{i_0,\dots,i_p}$ et $V = Y$) les $A-$modules $\mathscr{F}(U_{i_0,\dots,t_p})$ sont plats et le théorème 1.3.3 nos dit que les groupes de cohomologie du complexe de Čech $C^\bullet = C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \oplus C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie $H^p(X, \mathscr{F})$.
Par ailleurs, pour toute $A-$algèbre B, $\{U_i \times_Y Spec\ B\}$ c'est un recouvrement par des ouverts affine du produit fibré $X \times_Y Spec\ B$, et $C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \otimes_A B$ c'est le complexe de Čech de $\mathscr{F} \otimes_A B$ par rapport à ce recouvrement.
Finalement, comme $f : X \to Y$ c'est un morphisme propre entre schémas noethériens, nous avons la propriété d'être séparé par changement base et en appliquant le raisonnement donné dans le premier paragraphe nous obtenons

$$H^p(X \times_Y Spec\ B, \mathscr{F} \otimes_A B) \simeq H^p(C^\bullet \otimes_A B)$$

pour toute $A-$algèbre B. Ce qui est fonctoriel en B comme conséquence de la fonctorialité dans le lemme 1.3.
En appliquant le lemme 2.1, nous avons un complexe $K^\bullet$, et des morphismes $K^\bullet \to C^\bullet$ tels que

$$H^p(K^\bullet) \to H^p(C^\bullet) \simeq H^p(X, \mathscr{F}), \quad \text{pour tout } p,$$

et le lemme 2.2 nous donne le résultat. □

Or, soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Nous dénotons par X_y la fibre de f sur y (c'est-à-dire, le produit fibré $X \times_Y k(y)$), et pour tout faisceau quasi-cohérent sur X, on dénote par $\mathscr{F}_y$ le faisceau $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} k(y)$ sur X_y.

2.0.5 Corollaire. *Soient X, Y, f comme dans le théorème (sauf que c'est pas nécessaire que Y soit affine). Alors on a :*

(a) Pour tout $p \geq 0$, la fonction $Y \to \mathbb{Z}$ définie par

$$y \to dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$$

est semi-continue supérieurement

(b) La fonction $Y \to \mathbb{Z}$ définie par

$$y \to \chi(\mathscr{F}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$$

est localement constante sur Y.

Démonstration. (a) La nature local du problem nous dit qu'on peut considérer Y comme un schéma affine $Y = spec\ A$.
Soit $\{K^\bullet, d^\bullet\}$ le complexe donné par le théorème 1 ; en localisant sur un idéal premier de A, nous pouvons supposer que $K^\bullet$ c'est un complexe libre. Par le théorème du rang nous avons

$$\begin{aligned} dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y) &= dim_{k(y)}[Ker(d^p \otimes_A k(y))] \\ &\quad - dim_{k(y)}[Im(d^{p-1} \otimes_A k(y))] \\ &= dim_{k(y)}[K^p \otimes k(y)] - dim_{k(y)}[Im(d^p \otimes k(y))] \\ &\quad - dim_{k(y)}[Im(d^{p-1} \otimes_A k(y))]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Comme le premier terme est constante, nous voudrons montrer que pour tout $p \geq 0$, la fonction $\rho_p(y) = dim_{k(y)}[Im(d^p \otimes k(y))]$ est semi continue inférieurement sur Y.
Soit $r \geq 0$ un entier quelconque, et $d^p_r : \wedge^r K^p \to \wedge^r K^{p+1}$ le morphisme induit par d^p, nous avons

$$\{y \in Y|; \rho_p(y) < r\} = \{y \in Y | d^p_r \otimes k(y) = 0\}, \tag{2.2}$$

et de plus, comme d^p_r c'est un morphisme de modules libres de type fini, il est donné par une matrice dans A et par conséquence l'ensemble 2.2 c'est l'ensemble de zéros communs à toutes les coefficients de la matrice A.
(b) Dans l'égalité 2.2, nous prenons la somme alternante sur p pour obtenir la somme alternante des dimensions des espaces vectorielles $K^p \otimes_A k(y)$ avec $y \in Y$. En considérant un recouvrement affine de Y nous avons le résultat. $\square$

Bibliographie

[1] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, (Vol. 52). Springer Science and Business Media.

[2] Mumford D., Ramanujam C. and Manin J.I, *Abelian Varieties*, (Vol. 48). Oxford : Oxford university press.