On étudie dans ce mémoire un article de P.E. Chaput et M. Romagny où les auteurs démontrent plusieurs résultats sur le quotient adjoint sur une base quelconque.

On se donne un groupe de Chevalley semi-simple déployé G sur un schéma de base S et on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Le quotient adjoint $\mathfrak{g}/G$ est le schéma affine sur S dont le faisceau structural est formé des fonctions sur $\mathfrak{g}$ invariantes sous l'action adjointe de G. Chevalley a montré que sur le corps des complexes, le quotient adjoint est un espace affine.
Soit T un tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ et W le groupe de Weyl. L'action adjointe induit une action de W sur $\mathfrak{t}$ et l'inclusion $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ induit un morphisme $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ appelé le morphisme de Chevalley.
Springer et Steinberg ont montré que sur un corps algébriquement clos dont la caractéristique est première à l'ordre de W, π est un isomorphisme.

Pour une base S quelconque, les auteurs obtiennent notamment le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit G un groupe de Chevalley simple sur un schéma de base S avec $G \neq Sp_{2n}$. Alors le morphisme de Chevalley est un isomorphisme.*

La stratégie des auteurs consiste à montrer, sous l'hypothèse ci-dessus, la non-annulation des différentielles des racines. Ils s'appuient pour cela sur une analyse précise des systèmes de racines.

Pour le cas $G = Sp_{2n}$, les auteurs ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2 *Si $G = Sp_{2n}$, le morphisme de Chevalley est un isomorphisme si et seulement si la base n'a pas d'éléments de 2-torsion. Dans ce cas, ce morphisme est seulement schématiquement dominant.*

On exposera aussi le calcul de l'anneau des fonctions invariantes sur $\mathfrak{g}$ dans le cas $G = SO_{2n}$ et dans le cas exceptionnel $G = Sp_{2n}$.

Après des rappels sur les schémas en groupes et les groupes de Chevalley en particulier, on exposera la démonstration du résultat principal de l'article, avant de développer les exemples.

Table des matières

1 Schémas en groupes

Soit S un schéma. On note Sch/S la catégorie des S-schémas. Les produits désignent les produits fibrés au-dessus de S. On note Ens la catégorie des ensembles, Gr celles des groupes, $A - Alg$ celle des A-algèbres.

1.1 Définitions et exemples

1.1.1 Définition par morphismes

Soit G dans Sch/S et $\pi : G \to S$ son morphisme de structure. On note $\Delta : G \to G \times G$ le morphisme diagonal. On dit que G est un S-schéma en groupes quand on s'est donné des S-morphismes
$m : G \times G \to G$ (loi de G), $e_G : S \to G$ et $inv : G \to G$ tels que :

a) *Associativité* : Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "1_G\times m"] \arrow[d, "m\times 1_G"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

b) *Elément neutre* : Chaque triangle du diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[ddrr, "1_G"] & G\times S \arrow[r, "1_G\times e_G"] & G\times G \arrow[dd, "m"] \\
S\times G \arrow[d, "e_G\times 1_G"'] & & \\
G\times G \arrow[rr, "m"] & & G
\end{tikzcd}$$

c) *Inverse* : Les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "inv\times 1_G"] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "e_G\circ\pi"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "1_G\times inv"] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "e_G\circ\pi"] & G
\end{tikzcd}$$

1.1.2 Définition fonctorielle

Par application du lemme de Yoneda, on vérifie que la définition précédente est équivalente à :
G est un un S-schéma en groupes quand pour tout S-schéma T, l'ensemble $G(T) := Hom_S(T, G)$ est muni d'une structure de groupe telle que : pour tout S-morphisme $T' \to T$, l'application $G(T) \to G(T')$ correspondante est un morphisme de groupes.
Ainsi, un S-schéma en groupes est un foncteur *représentable* de la catégorie Sch/S dans Gr.

1.1.3 Homomorphismes

Soit G et G' des S-schémas en groupes de lois repectives m et m'.
On dit qu'un S-morphisme $f : G \to G'$ est un morphisme de S-schémas en groupes si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m"] & G' \times G' \arrow[d, "m'"] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd}$$

Du point de vue fonctoriel, cela revient à dire que pour tout T dans Sch/S, le morphisme $G(T) \to G'(T)$ correspondant est un morphisme de groupes.

Dans la suite, on note Gr/S la catégorie des S-schémas en groupes.

1.1.4 Noyaux

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de Gr/S. Soit $ker(f)$ le S-foncteur en groupes qui à T associe $ker(G(T) \to G'(T))$. La propriété universelle du produit fibré montre alors que $ker(f)$ est représentable par le S-schéma donné par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} H = G \times_{G'} S \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & S \arrow[d, "e_{G'}"] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd}$$

H est appelé le noyau de f.

1.1.5 Exemples

Soit G un $\mathbb{Z}$-foncteur en groupes, représentable par un $\mathbb{Z}$-schéma encore noté G. G peut être vu comme un S-foncteur en groupes, noté G_S, qui est alors représentable par $G_S := G \times_{\mathbb{Z}} S$. Dans les exemples qui suivent, on définit des $\mathbb{Z}$-schémas en groupes, qu'on étend par changement de base pour définir les groupes correspondants sur S. En particulier, si $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X_i]/I)$ alors $G_S = \mathrm{Spec}_S(\mathcal{O}_S[X_i]/I)$.
On note B_T la $\mathbb{Z}$-algèbre $B_T := \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$.

a) Le groupe additif.
Soit $\mathbb{G}_a$ le $\mathbb{Z}$-foncteur qui à T associe le groupe $(B_T, +)$.
Il est représentable par $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[u]) = \mathbb{A}^1$.

b) Le groupe multiplicatif.
Soit $\mathbb{G}_m$ le $\mathbb{Z}$-foncteur qui à T associe le groupe $(B_T^*, \times)$.
Il est représentable par $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[u, u^{-1}])$.

c) Le groupe linéaire.
Soit $GL_n (n \geq 1)$ le $\mathbb{Z}$-foncteur qui à T associe le groupe $GL_n(B_T)$ des matrices inversibles

d'ordre n à coefficients dans B_T.
Il est représentable par $GL_n = \mathrm{Spec}(\frac{\mathbb{Z}[X_{i,j},Y]}{Y.(det(X_{i,j}))-1})$.

d) Les groupes diagonalisables.
Soit X un groupe abélien. Soit $\mathbb{Z}[X]$ son algèbre de groupe. On rappelle que si A est un anneau, G_1 et G_2 sont des groupes alors $A[G_1 \times G_2] = A[G_1] \otimes A[G_1]$.
Soit $D(X)$ le $\mathbb{Z}$-foncteur qui à T associe le groupe $\mathrm{Hom}_{Ab}(X, B_T^*) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-Alg}(\mathbb{Z}[X], B_T)$. Il est représentable par $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$.
Si $X = \mathbb{Z}$ alors $\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$, via la flèche $1 \mapsto u$. Donc $D(\mathbb{Z}) = \mathbb{G}_m$. D'après le rappel, on a alors $D(\mathbb{Z}^n) = {\mathbb{G}_m}^n$.
Si $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} (n \geq 1)$ alors $\mathrm{Hom}_{Ab}(X, B_T^*) = \{b \in B_T \mid b^n = 1\}$. Le schéma $D(X)$ est alors noté μ_n et est appelé le schéma des racines n^{iemes} de l'unité.
Soit enfin X un groupe abélien de type fini. X est alors un produit fini de groupes cycliques (éventuellement infinis). $D(X)$ est donc isomorphe à un produit fini de copies de $\mathbb{G}_m$ et de μ_n.
Un S-schéma en groupes isomorphe à un $D(X)_S$, où X est un groupe abélien de type fini, est appelé groupe diagonalisable.

e) Le groupe $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[u, \frac{1}{1+2u}])$.
Soit $\mathcal{G}$ le $\mathbb{Z}$-foncteur qui à T associe $\mathcal{G}(T) := \{b \in B_T \mid 1 + 2b \in B_T^*\}$. Pour $b, b' \in \mathcal{G}(T)$, on pose $b * b' := b + b' + 2bb'$. Vérifions que $(\mathcal{G}(T), *)$ est un groupe d'élément neutre 0. Pour $b, b' \in \mathcal{G}(T)$,on a $1 + 2b * b' = 1 + 2(b + b' + 2bb') = (1 + 2b)(1 + 2b') \in \mathcal{G}(T)$. On vérifie l'associativité par un calcul direct. Enfin, on a $b * b' = 0 \Leftrightarrow b' = -b/(1 + 2b)$ et $1 + 2[-b/(1 + 2b)] = 1/(1 + 2b) \in \mathcal{G}(T)$.
Donc $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{Z}$-foncteur en groupes. Il est représentable par $\mathcal{G} := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[u, \frac{1}{1+2u}])$.

1.2 Actions et Quotients

1.2.1 Définitions

a) Un S-schéma en groupes G agit sur un S-schéma X quand on s'est donné un S-morphisme $\sigma : G \times X \to X$ tel que les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "1_G \times \sigma"] \arrow[d, "m \times 1_X"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times X \arrow[r, "\sigma"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, equal] & X \\ S \times X \arrow[r, "e_G \times 1_X"'] & G \times X \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

b) Soit σ une action de G sur X dans Sch/S
On dit que (Y, p), où Y est dans Sch/S et p un S-morphisme $p : X \to Y$, est un quotient catégorique de X par G quand :

b.1.) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

b.2.) Pour tout (Z, f), où Z est dans Sch/S et f un S-morphisme $f : X \to Z$ tel que $f \circ \sigma = f \circ p_2$, il existe un unique S-morphisme $\overline{f} : Y \to Z$ tel que $f = \overline{f} \circ p$

Une autre notion naturelle de quotient dans Sch/S est le quotient géométrique (on montre que s'il existe alors il est un quotient catégorique).
Dans la suite, tous les quotients seront des quotients catégoriques.

1.2.2 Quotients et catégories

On peut plonger la catégorie Sch/S dans diverses catégories.

Exemples :

i) Par définition, elle se plonge dans la catégorie Ann des espaces annelés.

ii) Par le lemme de Yoneda, elle se plonge dans la catégorie $Hom((Sch/S)^{\circ}, Ens)$ des foncteurs contravariants de Sch/S dans Ens

Si C est une catégorie dans laquelle on plonge Sch/S, on cherche un quotient dans C. Autrement dit, on cherche un objet X/G de C et un morphisme $p : X \to X/G$ dans C tels que tout morphisme G-équivariant de C se factorise à travers X/G via p.

a) *Les espaces annelés*
On plonge Sch/S dans Ann.

Désignons par $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à X, par p la projection canonique $p : |X| \to |X|/G$ et par O_X^G le faisceau des fonctions G-invariantes de X.

Alors on vérifie que l'espace annelé $(|X|/G, p_*(O_X^G))$ est un quotient X/G dans Ann. Cependant, ce n'est pas en général un schéma. Il faut donc chercher d'autres catégories.

b) *Un exemple*

Voyons un exemple illustrant le fait que le quotient dépend de la catégorie dans laquelle on plonge Sch/S.

Soit k un corps, C la catégorie des schémas quasi-affines de type fini sur k et D la catégorie des schémas quasi-projectifs de type fini sur k.
Soit $X = \mathbb{A}_k^n$ et $G = \mathbb{G}_m$. G agit sur X par homothétie.
On démontre alors que dans D, on a $X/G = \mathbb{P}_k^n$ tandis que dans C, on a $X/G = Spec(k)$

1.2.3 Quotient *fpqc*

On rappelle qu'un diagramme d'ensembles $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g,h} C$ est dit exact si f induit une bijection de A sur l'ensemble des b de B tels que $g(b) = h(b)$.

a) *Définitions*

i) On appelle préfaisceau d'ensembles sur Sch/S un foncteur F : $(Sch/S)^\circ \to Ens$.

ii) On dit qu'un tel préfaisceau F est un faisceau pour la topologie de Zariski si pour tout T de Sch/S et tout recouvrement ouvert (U_i) de T le diagramme canonique suivant est exact $F(T) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$ et si F transforme isomorphismes en isomorphismes.

On rappelle qu'un S-morphisme $f : T' \to T$ est *fidèlement plat et quasi-compact* ($fpqc$) si :
- f est surjectif et plat (fidèlement plat)
- l'image réciproque de tout ouvert affine de T est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines de T' (quasi-compact)

iii) On dit qu'un préfaisceau F sur Sch/S est un faisceau $fpqc$ si F est un faisceau pour la topologie de Zariski et si, pour tout S-morphisme $fpqc$ $f : T' \to T$, le diagramme canonique suivant est exact :

$$F(T) \longrightarrow F(T') \longrightarrow F(T' \times_T T')$$

b) *Quotient, représentabilité*

A présent, on plonge Sch/S dans $Hom((Sch/S)^\circ, Ens)$ et on identifie X dans Sch/S au foncteur $h_X : T \mapsto Hom_S(T, X)$.

Le théorème suivant permet finalement de plonger Sch/S dans la catégorie des faisceaux $fpqc$.

Théorème 1 *Pour tout X dans Sch/S, le préfaisceau h_X est un faisceau $fpqc$ sur Sch/S.*

La théorie générale des faisceaux sur Sch/S dit alors que le quotient existe dans la catégorie des faisceaux $fpqc$. Plus précisément, à tout préfaisceau F sur Sch/S on peut associer un faisceau $fpqc$, unique à unique isomorphisme près. Le faisceau quotient qu'on note $\widetilde{X/G}$ est alors le faisceau associé par ce procédé au préfaisceau $F : T \mapsto X(T)/G(T)$.

Enfin, le théorème qui suit ([Ray]) permet d'obtenir un quotient dans Sch/S, ayant des propriétés satisfaisantes :

Théorème 2 *Soit X dans Sch/S et G un S-schéma en groupes fini et plat sur S agissant sur X via un morphisme $\sigma : G \times X \to X$.*
On suppose :
i) G agit fortement librement sur X i.e. le morphisme $p_2 \times \sigma : G \times X \to X \times X$ est une immersion fermée.
ii) Toute orbite sous G est contenue dans un ouvert affine de X.
Alors, le faisceau quotient fpqc $\widetilde{X/G}$ est représentable par un S-schéma X/G.

De plus, si $S = \mathrm{Spec}(R)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $G = \mathrm{Spec}(B)$, alors $X/G = \mathrm{Spec}(A_0)$ où A_0 est le sous-anneau des éléments G-invariants de A.

En appliquant le lemme de Yoneda, on obtient que le S-schéma X/G ainsi obtenu est un quotient catégorique dans Sch/S.

1.3 Algèbres de Lie

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Soit X un schéma sur S. Le faisceau des différentielles $\Omega^1_{X/S}$ est alors un $\mathcal{O}_X$-module localement libre. Soit Y un X-schéma et u son morphisme de structure. On note $Y[\varepsilon]$ le schéma $Y[\varepsilon] := \mathrm{Spec}_Y(\mathcal{O}_Y[\varepsilon])$ et i l'immersion fermée $i : Y \to Y[\varepsilon]$ définie sur les faisceaux par $\varepsilon \mapsto 0$.

Lemme 1 *Soit TX le fibré tangent de X. TX est le X-foncteur défini par*

$$TX(Y) = \{f : Y[\varepsilon] \to X \mid f \circ i = u\}$$

Alors TX est représentable par le fibré vectoriel $\mathbb{V}(\Omega^1_{X/S})$.

Démonstration : Soit $f \in TX(Y)$. En se restreignant aux ouverts affines de Y, il est clair que i est un homéomorphisme donc la composante topologique de f est celle de u. Alors f est déterminé par le morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to u_*\mathcal{O}_{Y[\varepsilon]} = u_*\mathcal{O}_Y \oplus \varepsilon u_*\mathcal{O}_Y$. Ainsi $f^\sharp = u^\sharp \oplus \varepsilon\delta$ et la donnée de f est alors équivalente à celle de δ. Un calcul standard montre que δ est une dérivation. Donc

$$TX(Y) = Der(\mathcal{O}_X, u_*\mathcal{O}_Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-Mod}(\Omega^1_{X/S}, u_*\mathcal{O}_Y)$$

i.e.

$$TX(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X-Alg}(Sym(\Omega^1_{X/S}), u_*\mathcal{O}_Y) = \mathrm{Hom}_{X-Sch}(\mathrm{Spec}_X(u_*\mathcal{O}_Y), \mathrm{Spec}_X(Sym(\Omega^1_{X/S})))$$

Or tout morphisme de Y dans un spectre relatif sur X se factorise de façon unique à travers son enveloppe affine $Y^{aff} := \mathrm{Spec}_X(u_*\mathcal{O}_Y)$. Donc $TX(Y) = \mathrm{Hom}_{X-Sch}(Y, \mathbb{V}(\Omega^1_{X/S}))$. $\square$

Soit à présent G un schéma en groupes lisse sur S. On définit le S-foncteur en groupes $\mathrm{Lie}(G/S)$ par :

$$\mathrm{Lie}(G/S)(Y) = \ker(G(Y[\varepsilon]) \to G(Y))$$

Donc $\mathrm{Lie}(G/S)$ est représentable par le S-schéma $\mathrm{Lie}(G/S) = TG \times_{(G,e_G)} S$, tel que le diagramme suivant soit cartésien.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lie}(G/S) \arrow[r] \arrow[d] & TG \arrow[d] \\
S \arrow[r, "e_G"] & G
\end{tikzcd}$$

Comme G est lisse sur S, $\omega^1_{G/S} := e_G^*\Omega^1_{G/S}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre. Or on a $\mathrm{Lie}(G/S) = TG \times_{(G,e_G)} S = \mathbb{V}(e_G^*\Omega^1_{G/S})$. Donc $\mathrm{Lie}(G/S) = \mathbb{V}(\omega^1_{G/S})$ est un fibré vectoriel de rang $n = dim(G/S)$. On note $\mathscr{L}ie(G/S)$ le faisceau de ses sections. On a donc $\mathscr{L}ie(G/S) = {\omega^1_{G/S}}^\vee := \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_S}(\omega^1_{G/S}, \mathcal{O}_S)$.

Etudions la fonctorialité de la formation de l'algèbre de Lie.
Soit $f : G \to H$ un morphisme de Gr/S. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G(Y[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[d] & G(Y) \arrow[d] \\ H(Y[\varepsilon]) \arrow[r] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Donc f induit un morphisme de foncteurs, et donc de S-schémas $\mathrm{Lie}(f) : \mathrm{Lie}(G/S) \to \mathrm{Lie}(H/S)$. On en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules $\mathscr{L}ie(f) : \mathscr{L}ie(G/S) \to \mathscr{L}ie(H/S)$.

Pour finir ce paragraphe, montrons que la formation de l'algèbre de Lie commute au changement de base. Soit $f : S' \to S$ un morphisme, $G' := G \times_S S'$ et $p_1 : G' \to G$ la première projection. Alors, on a $\Omega^1_{G'/S'} = p_1^*\Omega^1_{G/S}$. En appliquant $e^*_{G'}$, on obtient $\omega^1_{G'/S'} = e^*_{G'}p_1^*\Omega^1_{G/S} = f^*e^*_G\Omega^1_{G/S} = f^*\omega^1_{G/S}$. Donc $\mathbb{V}(\omega^1_{G'/S'}) = \mathrm{Spec}_{S'}(\mathrm{Sym}(f^*\omega^1_{G/S})) = \mathrm{Spec}_S(\mathrm{Sym}(\omega^1_{G/S})) \times_S S'$. On a bien alors : $\mathrm{Lie}(G'/S') = \mathrm{Lie}(G/S) \times_S S'$.

Dans la suite, on note $\mathfrak{g}$ le schéma $\mathrm{Lie}(G/S)$ et par abus de notation, on note aussi $\mathfrak{g}$ le $\mathcal{O}_S$-module $\mathscr{L}ie(G/S)$. Le sens de $\mathfrak{g}$ sera parfois précisé, selon le contexte.
En particulier, si $S = Spec(A)$ alors $\mathfrak{g}$ est un schéma affine. Dans ce cas, la A-algèbre $\Gamma(\mathfrak{g}, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de polynômes qu'on note $A[\mathfrak{g}]$.

1.3.2 Action adjointe et quotient adjoint

Soit T un S-schéma. Alors $g \in G(T)$ définit $\mathrm{Int}(g)$ qui est la conjugaison par g dans $G(T[\varepsilon])$. Comme $\mathrm{Int}(g)$ préserve $\mathfrak{g}(T) \subset G(T[\varepsilon])$, on en déduit un morphisme de groupes $G(T) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}(T))$. On définit alors une représentation $G(T) \times \mathfrak{g}(T) \to \mathfrak{g}(T)$ puis par le lemme de Yoneda un morphisme $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Soit u le morphisme de structure $u : \mathfrak{g} \to S$. Une fonction f sur $\mathfrak{g}$ est une section globale de $u_*\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ ou encore un S-morphisme $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{A}^1_S$. On considère le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} G \times \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1_S \end{tikzcd}$$

Une fonction sur $\mathfrak{g}$ est G-invariante si le diagramme correspondant de faisceaux est commutatif. Dans la suite, on appelle quotient adjoint le schéma $\mathrm{Spec}_S(f_*\mathcal{O}^G_{\mathfrak{g}})$ où $\mathcal{O}^G_{\mathfrak{g}}$ est le faisceau des fonctions invariantes de $\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe. En particulier si $S = \mathrm{Spec}(A)$ alors le quotient adjoint est $\mathrm{Spec}(A[\mathfrak{g}]^G)$.

2 Groupes de Chevalley

Comme on le verra ci-dessous, un groupe de Chevalley G sur S est, par définition, affine sur S au sens où son morphisme de structure est affine. Décrivons alors les objets dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$:

G et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont des schémas affines : $G = \mathrm{Spec}(B)$. G peut être vu comme un foncteur *représentable* (covariant) de la catégorie des A-algèbres dans celle des groupes puisque $\mathrm{Hom}_S(T, \mathrm{Spec}(B)) = \mathrm{Hom}_{A-alg}(B, \Gamma(T, O_T))$.

2.1 Structure des groupes de Chevalley

Soit (V, Φ) un système de racines.
On note $Q(R)$ le réseau des racines i.e. le sous-$\mathbb{Z}$-module de V engendré par les racines et $P(R)$ le réseau des poids i.e. $P(R) := \{v \in V \mid \forall \alpha \in R, \langle \alpha^\vee, v\rangle \in \mathbb{Z}\}$.

2.1.1 Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos

Dans ce paragraphe, k désigne un corps algébriquement clos. Les groupes considérés sont affines sur k. On les voit comme des foncteurs covariants de $k - Alg$ dans Gr.
Lie(G) est alors le foncteur défini par : $\mathrm{Lie}(G)(R) = ker(\ G(R[\epsilon]) \xrightarrow{\epsilon \mapsto 0} G(R)\ )$. On note $\mathfrak{g}$ la k-algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G)(k)$ et on a alors $\mathrm{Lie}(G)(R) = \mathfrak{g} \otimes_k R$.

Un groupe affine lisse et connexe est dit réductif (resp. semi-simple) quand il ne possède pas de sous-groupe distingué lisse connexe et unipotent (resp. résoluble) non trivial.
Un groupe réductif est dit déployé s'il contient un tore maximal déployé i.e. isomorphe à un produit de $\mathbb{G}_m$ sur k. Les tores maximaux sont conjugués de sorte qu'on peut en fixer un, qu'on note T. Le groupe $X(T) = \mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{G}_m)$ est alors un $\mathbb{Z}$-module libre, indépendant de T.

Dans la suite de ce paragraphe, on fixe un groupe réductif déployé G sur k, T un tore maximal et Z son centre.
T agit sur $GL_{\mathfrak{g}}$ par restriction de l'action adjointe. Comme T est un groupe diagonalisable on a une décomposition : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$ où $\mathfrak{g}_0$ est le sous-espace sur lequel T agit trivialement et $\mathfrak{g}_\alpha$ celui sur lequel il agit par la caractère α.
Ainsi, $\mathfrak{g}_\alpha = \{v \in \mathfrak{g} \mid \forall R, t \in T(R), \mathrm{Ad}(t).(v \otimes 1) = \alpha(t).(v \otimes 1)\}$. Les caractères non nuls qui apparaissent dans cette décomposition sont appelés les *racines* de G relativement à T.

G est dit de plus simple s'il n'a pas de sous-groupe distingué de dimension strictement positive. Soit $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et Φ l'ensemble des racines de G relativement à T.

Si G est simple alors on montre que (V, Φ) est un système de racines irréductible et réduit.

2.1.2 Définitions sur une base quelconque

On rappelle que les fibres géométriques d'un S-schéma X sont les $X_{\bar{s}} := X \times_S \mathrm{Spec}(\overline{k(s)})$ où $\overline{k(s)}$ est une clotûre algébrique de $k(s)$.

Par définition, G est un groupe réductif sur S quelconque s'il vérifie les conditions suivantes :
- G est affine et lisse sur S.
- Pour tout $s \in S$ la fibre géométrique correspondante est un groupe connexe et réductif.

G est dit déployé s'il contient un tore maximal déployé i.e. isomorphe à un produit de $\mathbb{G}_m$.

Dans la suite, on considère un groupe de Chevalley G déployé simple (au sens où ses fibres géométriques sont simples) sur S. Soit T un tore maximal et $X(T) := \mathrm{Hom}_S(T, \mathbb{G}_m)$ son groupe des caractères.
On dit qu'un caractère $r \in X(T)$ est une racine de G relativement à T si et seulement si pour tout $s \in S$, $r_{\bar{s}} \in \mathrm{Hom}_{\overline{k(s)}}(T_{\bar{s}}, \mathbb{G}_{m,\bar{s}})$ est une racine de $G_{\bar{s}}$ relativement à $T_{\bar{s}}$.
On a encore que (V, Φ) est un système de racines irréductible et réduit, où $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et Φ l'ensemble de ces racines.

2.1.3 Théorème de rigidité

Comme la formation de l'algèbre de Lie est compatibilite au changement de base, le résultat qui suit permet de se ramener au cas où G est défini sur $\mathbb{Z}$.

Théorème 3 *Soit G un groupe de Chevalley déployé simple sur S. Alors il existe un unique groupe de Chevalley déployé simple G_0 sur $\mathbb{Z}$ tel que $G = G_0 \times_{\mathbb{Z}} S$.*

2.1.4 Classification

Le résultat qui précède montre aussi qu'il suffit de classifier les groupes de Chevalley déployés simples sur $\mathbb{Z}$. On a déjà :

Théorème 4 *Pour tout système de racines irréductible et réduit R, il existe un unique (à isomorphisme près) $\mathbb{Z}$-groupe de Chevalley déployé simple $\widetilde{G}(R)$, dont le système de racines est R et dont le centre $\widetilde{Z}$ a pour groupe de caractères $P(R)/Q(R)$.*

Pour chacun de ces systèmes de racines, on vérifie directement qu'un groupe connu convient. Par exemple pour A_n, SL_{n+1} convient.

Plus précisément, on peut décrire tous les groupes de Chevalley déployés simples sur $\mathbb{Z}$ de système de racines donné, de façon à obtenir une classification :
Soit G est un tel groupe et T un tore maximal. On lui associe alors son système de racines R et son groupe de caractères $M = X(T)$, qui est un réseau tel que $Q(R) \subset M \subset P(R)$.
Réciproquement, soit R un système de racines irréductible et réduit, et M un réseau tel que $Q(R) \subset M \subset P(R)$. On leur associe le groupe $G(R, M) := \widetilde{G}(R)/N$ où N est l'intersection des noyaux connexes des caractères $\widetilde{Z} \to \mathbb{G}_m$ qui sont dans $M/Q(R) \subset P(R)/Q(R)$.

On vérifie alors que ces flèches sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, les groupes de Chevalley déployés simples sont paramétrés par leur *type* : la donnée de leur système de racines et d'un réseau intermédiaire entre celui des racines et celui des poids.

2.2 Non-annulation des différentielles des racines pour $G \neq Sp_{2n}$

2.2.1 Un lemme combinatoire

Lemme 2 *Soit R un système de racines irréductible et réduit. On note $Q(R)$ le réseau des racines et $P(R)$ le réseau des poids. Supposons qu'il existe $\alpha \in R, \lambda \in P(R), l \in \mathbb{N}$ tels que*

$\alpha = l\lambda$ avec $l \geq 2$. Alors $l = 2$, et R est soit de type A_1, soit de type C_n et α est une racine longue.

Démonstration : Supposons que R soit un des systèmes de racine défini dans [BLie, Planches I à IX] dont on reprend les notations et les résultats. Notamment, on fixe une base (ϵ_i) orthonormée pour un produit scalaire $(\ |\ )$ invariant par le groupe de Weyl.
Si R est de type A_1 alors les racines sont $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$ et $-\alpha$. Comme $\epsilon_1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/2$ est un poids, α est bien le double d'un poids. Supposons à présent que R soit de rang supérieur strict à 1.
Comme λ est un poids, l'hypothèse entraîne que :

$$\forall \beta \in R, \langle \beta^\vee, \alpha \rangle = l \langle \beta^\vee, \lambda \rangle \in l\mathbb{Z} \qquad (1)$$

Soit β une racine.
Si α et β ont même longueur, l'étude de la position relative de deux racines montre que $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle \in \{-1, 0, 1\}$. Si on sait aussi que $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle \neq 0$ alors (1) est impossible car $l \geq 2$.
Sinon, on rappelle que toute racine est l'image par un élément du groupe de Weyl d'une racine simple. Donc (1) reste vraie pour une racine simple dans l'orbite de α et on peut supposer que α en est une. Alors comme $l \geq 2$, dans le diagramme de Dynkin de R, les arêtes contenant le sommet correspondant à α sont multiples.
Les seuls cas possibles sont donc : $B_n (n \geq 2)$, $C_n (n \geq 2)$, F_4 et G_2. Le cas F_4 est impossible.
Si R est de type B_n avec $n \geq 3$ alors α doit être égal à α_n. Or $\alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$, $\alpha_n = \epsilon_n$ donc $\langle \alpha_{n-1}^\vee, \alpha_n \rangle = 2\frac{(\alpha_{n-1}|\alpha_n)}{(\alpha_{n-1}|\alpha_{n-1})} = -1$, ce qui contredit (1) pour $\beta = \alpha_{n-1}$.
Si R est de type $C_n (n \geq 2)$ alors α doit encore être égal à α_n, qui est une racine longue dans ce cas. Or $\alpha_n = 2\epsilon_n$ donc α est bien le double d'un poids. Comme $B_2 = C_2$, le cas B_2 est traité.
Si R est de type G_2 alors $P(R) = Q(R)$. Mais comme R est supposé réduit, il est impossible qu'une racine soit multiple d'un poids. $\square$

2.2.2 Corollaire

Lemme 3 *Soit G un groupe de Chevalley déployé simple sur un corps k. Soit T un tore maximal, $M := X(T)$ son groupe des caractères et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. On suppose que $G \neq Sp_{2n} (n \geq 1)$ ou $p := car(k) \neq 2$.*
Alors il existe une extension finie K de k et un point $t \in \mathfrak{t}_K$ telle que $\forall \alpha \in R, d\alpha(t) \neq 0$.

Démonstration : On identifie $\mathfrak{t}$ à $\mathfrak{t}(k)$. Or l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{t}$ s'identifie à $M \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Donc la forme linéaire $d\alpha$ est nulle si et seulement si $\alpha \in pM$. Comme $G \neq Sp_{2n}$ ou $p \neq 2$, le lemme précédent implique que cela ne se produit pas. Donc $\forall \alpha \in R$, $d\alpha$ est non nulle. En prennant éventuellement une extension finie K/k, $\mathfrak{t}_K$ n'est pas union des hyperplans $\{d\alpha = 0\}$, qui sont en nombre fini. D'où le résultat. $\square$

2.3 Eléments réguliers

2.3.1 Définition et premières propriétés

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n sur un corps k. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ on note $\chi(x) = t^n + c_1(x)t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(x)t + c_n(x)$ le polynôme caractéristique de $\operatorname{ad} x$. Les coefficients de $\chi(x)$ sont des polynômes homogènes en les coordonnées de x dans une base de $\mathfrak{g}$.

Le rang de $\mathfrak{g}$ est le plus petit entier l tel que $c_{d-l} \neq 0$, et on pose $\delta := c_{n-l}$. Un élément $x \in \mathfrak{g}$ est dit régulier si le nilespace $\mathfrak{g}_0(\operatorname{ad} x) := \ker(\operatorname{ad} x)^n$ de $\mathfrak{g}$ relativement à x est de dimension minimale l. Un élément x est régulier si et seulement si $\delta(x) \neq 0$.

Exemple :
Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Un élément $x \in \mathfrak{g}$ s'écrit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Alors $\chi(x) = t^3 - 4(bc + a^2)t$. Ainsi si $car(k) \neq 2$, x est régulier si et seulement si $bc + a^2 \neq 0$.

Considérons à présent le cas d'une base quelconque.
On traite le cas affine $S = \operatorname{Spec}(A)$ où A est un anneau, le cas général s'en déduit par recollement. $\mathfrak{g}$ est donc l'algèbre de Lie d'un S-schéma en groupes connexe lisse G de dimension n. On identifie $\mathfrak{g}$ à $\mathscr{L}ie(G/S)(A)$ qui est un A-module libre de rang n. Comme dans le cas d'un corps, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} x$ définit un A-endomorphisme de $\mathfrak{g}$, de polynôme caractéristique $\chi(x)$. De même que précédemment, les coefficients de $\chi(x)$ sont des polynômes *homogènes* en les fonctions coordonnées X_i sur $\mathfrak{g}$. En particulier, δ définit un élément de $A[\mathfrak{g}] = A[X_i]$ qui est invariant sous l'action adjointe.

On note $\operatorname{Sing}(\mathfrak{g})$ le sous-schéma fermé de $\operatorname{Lie}(G/S)$ des éléments singuliers, défini par l'équation $\delta = 0$ et $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ son complémentaire, le sous-schéma ouvert des éléments réguliers. On note encore $\operatorname{Sing}(\mathfrak{t})$ et $\operatorname{Reg}(\mathfrak{t})$ les sous-schémas correspondants de $\mathfrak{t}$.

On appelle lieu singulier de $\mathfrak{g}$ le sous-schéma fermé $\operatorname{Sing}(\mathfrak{g})$.

2.3.2 Le lieu singulier est un diviseur de Cartier relatif

On appelle diviseur de Cartier relatif d'un S-schéma X un diviseur de Cartier effectif dans X qui est plat sur S.

Lemme 4 *Soit G un groupe de Chevalley déployé simple sur S, avec $G \neq Sp_{2n}, n \geq 1$.*
Soit $s : \operatorname{Sing}(\mathfrak{g}) \to S$ le morphisme de structure du lieu singulier de $\mathfrak{g}$. Alors $s_*\mathcal{O}_{\operatorname{Sing}(\mathfrak{g})}$ est un $\mathcal{O}_S$-module libre, et en particulier $\operatorname{Sing}(\mathfrak{g})$ est un diviseur de Cartier relatif de $\mathfrak{g}$ sur S.

Démonstration : On rappelle que $G = G_0 \times_S \mathbb{Z}$ où G_0 est défini sur $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Comme la formation de tous ces objets est compatible avec le changement de base, on peut supposer que $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

Alors $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}]$ est une algèbre de polynômes et $\operatorname{Sing}(\mathfrak{g}) : \delta = 0$ a pour anneau de fonctions $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}]/(\delta)$, dont il s'agit de montrer que c'est un $\mathbb{Z}$-module libre. Or δ est un polynôme homogène donc cet anneau est gradué. Il suffit alors de montrer qu'il est plat sur $\mathbb{Z}$ car alors ses composantes homogènes seront plates et comme elles sont de type fini, elles seront libres sur $\mathbb{Z}$ et par suite $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}]/(\delta)$ aussi. Il suffit donc de prouver que $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}]/(\delta)$ est plat sur $\mathbb{Z}$.
D'après le corollaire au théorème 22.6 de [Ma], il suffit de montrer que l'idéal engendré par les coefficients de δ contient 1 i.e. qu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble.
Il s'agit donc de voir que δ est une fonction non nulle modulo chaque nombre premier p. On peut donc supposer que $S = \operatorname{Spec}(k)$ où k est un corps de cractéristique p et aussi algébriquement clos. Soit T un tore maximal et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. D'après le corollaire au lemme combinatoire, il existe $t \in \mathfrak{t}_k$ tel que $\forall \alpha \in R, d\alpha(t) \neq 0$. Alors $\delta(t)$ est le produit des $d\alpha(t)$, au signe près. Donc δ n'est pas la fonction nulle. $\square$

3 Le morphisme de Chevalley

On se donne toujours un groupe de Chevalley simple déployé G sur S. T est un tore maximal. Leurs algèbres de Lie respectives sont notées $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$. On note W le groupe de Weyl.
Le morphisme canonique $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ induit un morphisme $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ appelé le morphisme de Chevalley.

Donnons un résultat préliminaire ; il s'agit du théorème 11.10.9. dans [EGA].

Théorème 5 *Soit X et Y des S-schémas avec X plat sur S et Y de présentation finie sur S. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas tel que pour tout $s \in S$ le $k(s)$-morphisme $f_s : X_s \to Y_s$ est schématiquement dominant.*
Alors f est universellement schématiquement dominant i.e. pour tout S-schéma S', le S'-morphisme $f_{S'} : X_{S'} \to Y_{S'}$ est schématiquement dominant.

3.1 Un isomorphisme fondamental

Théorème 6 *Soit S un schéma et G un groupe de Chevalley simple déployé sur S avec $G \neq Sp_{2n}$. L'action adjointe définit par restriction et quotient un morphisme $b : G/T \times \mathrm{Reg}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$ qui induit un morphisme $\bar{b} : (G/T \times Reg(\mathfrak{t}))/W \to \mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$. Alors $\bar{b}$ est un isomorphisme.*

Démonstration : Comme la formation de tous ces objets est compatible avec le changement de base, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

On procède en plusieurs étapes.

i) b est surjectif
Soit $c = \mathrm{Ad} : G \times \mathrm{Reg}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$. Si $x \in \mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$ alors son centralisateur $\mathfrak{z}(x)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Or celles-ci sont conjuguées sous G donc $\exists g \in G$ tel que $(\mathrm{Ad}\, g)(\mathfrak{t}) = \mathfrak{z}(x)$. Ainsi $\exists y \in \mathfrak{t}$ tel que $(\mathrm{Ad}\, g)(y) = x$ et $y \in \mathrm{Reg}(\mathfrak{t})$. Donc $c = \mathrm{Ad}$ est surjectif. Comme $b \circ (p \times id_{\mathrm{Reg}(\mathfrak{t})}) = c$, b est surjectif.

ii) b est étale
a) b est lisse
Soit $c = \mathrm{Ad} : G \times \mathrm{Reg}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$
Source et but de c sont lisses sur S, donc en particulier plats. Alors, le critère de lissité fibre à fibre s'applique et il suffit de montrer que pour tout $s \in S$, le morphisme $c_s = c \times id_{k(s)}$ est lisse. La lissité étant stable par changement de base, source et but de c_s sont encore lisses. Comme ce sont de plus des schémas sur le corps résiduel $k(s)$ de s, il suffit de montrer que la différentielle dc_s de c_s est surjective en chaque point.

Soit $s \in S$. On pose $k = k(s)$. Comme la formation de l'algèbre de Lie commute au changement de base, on a $\mathrm{Lie}(G_k) = (\mathrm{Lie}(G))_k$. On la note $\mathfrak{g}_k$. Par homogénéité, il suffit de montrer que la différentielle de c_s est surjective en un point $(1,t)$ avec $t \in \mathrm{Reg}(\mathfrak{t})$. Calculons alors $\psi = dc_{(1,t)} : \mathfrak{g}_k \times \mathfrak{t}_k \to \mathfrak{g}_k$.

Par définition, on a $\mathrm{Ad}(1+x) = \mathrm{Ad}(1) + \mathrm{ad}(x)$ à l'ordre 1. Donc $c(1+x, t+\tau) = (\mathrm{Ad}(1+x))(t+\tau) = \mathrm{Ad}(1)(t+\tau) + \mathrm{ad}(x)(t+\tau)$ et $c(1+x, t+\tau) = t+\tau+[x,t]+[x,\tau]$ (par définition du crochet).
Or, toujours à l'ordre 1, on a $c(1+x, t+\tau) = c(1,t) + dc_{(1,t)}(x,\tau)$ Comme $c(1,t) = \mathrm{Ad}(1)(t) = t$ et $[x,\tau]$ est d'ordre 2, on obtient : $\psi(x,\tau) = dc_{(1,t)}(x,\tau) = \tau + [x,t]$.

On rappelle que $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{t}_k \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\forall t \in \mathfrak{t}_k$ $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ on a $[t,x] = d\alpha(t)x$. D'après le corollaire au lemme combinatoire, on peut choisir $t \in \mathfrak{t}_k$ tel que $\forall \alpha \in R, d\alpha(t) \neq 0$. Pour un tel t on a alors $\psi(\mathfrak{g}_k \times \{0\}) = \bigoplus_\alpha [\mathfrak{g}_\alpha, t] = \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$. Clairement, on a $\psi(\{0\} \times \mathfrak{t}_k) = \mathfrak{t}_k$. Donc ψ est surjective.

b) Conclusion
On a $\dim(G/T) = \dim(G) - \dim(T)$ et $\dim(Reg(\mathfrak{g})) = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$ car $\mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$ est ouvert dans $\mathfrak{g}$ et G est lisse. De meme $\dim(\mathrm{Reg}(\mathfrak{t})) = \dim(T)$. Alors $\dim((G/T) \times \mathrm{Reg}(\mathfrak{t})) = \dim(G/T) + \dim(\mathrm{Reg}(\mathfrak{t})) = \dim(\mathfrak{g})$. Donc b étant lisse de dimension relative nulle, b est étale.

iii) W agit transitivement sur les fibres de b.
Soit $(\bar{g}, x)$ et $(\bar{h}, y)$ ayant même image par b avec $x, y \in G/T$ et $x, y \in Reg(\mathfrak{t})$.
Ainsi $(\mathrm{Ad}\, g)(x) = (\mathrm{Ad}\, h)(y)$, où g (resp.h) est un représentant de $\bar{g}$ (resp.$\bar{h}$), et si on pose $w = h^{-1}g$ alors $(\mathrm{Ad}\, w)(x) = y$. Or $(\mathrm{Ad}\, w)(\mathfrak{z}(x)) = \mathfrak{z}((\mathrm{Ad}\, w)(x))$ (car Ad est une représentation). Donc $(\mathrm{Ad}\, w)(\mathfrak{z}(x)) = \mathfrak{z}(y)$. Mais alors $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{z}(y) = \mathfrak{t}$ car x et y sont des éléments réguliers et finalement $(\mathrm{Ad}(w))(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$.

Comme T est l'unique tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, w normalise T. Par conséquent, w définit un élément du groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$.

iv) b est étale donc l'action de W sur ses fibres est libre. ([SGA1], ChV, §2, corollaire 2.4.) De plus cette action est transitive et b est surjectif donc $\bar{b} : (G/T \times Reg(\mathfrak{t}))/W \to Reg(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme. ([SGA1], ChV, §2, proposition 2.6.) □

3.2 Le morphisme de Chevalley est schématiquement dominant

Théorème 7 *Soit S un schéma et G un groupe de Chevalley simple déployé sur S avec $G \neq Sp_{2n}$.*
Alors le morphisme de Chevalley $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ est schématiquement dominant.

Démonstration : La question est locale sur S. Donc on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$. On doit alors montrer que le morphisme $\pi^* : A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{t}]^W$ est injectif.

Soit $\varphi : G \times \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ le morphisme obtenu par restriction de l'action adjointe.

On suppose d'abord que $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Les schémas $G \times \mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}$ sont plats sur $\mathbb{Z}$ (car lisses). De plus, d'après la preuve de l'isomorphisme fondamental, φ est lisse donc schématiquement dominant dans les fibres au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Donc le théorème 11.10.9. de [EGA] assure que φ est universellement schématiquement dominant.

Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ avec A quelconque. Comme dans la démonstration de l'isomorphisme fondamental, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Donc d'après le cas $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, φ est schématiquement dominant. Ainsi, le morphisme $\varphi^* : A[\mathfrak{g}] \to A[G] \otimes_A A[\mathfrak{t}]$ est injectif.

Soit $f \in A[\mathfrak{g}]^G$ tel que $f_{|\mathfrak{t}} = 0$. On fait agir G sur lui-même par translation à gauche, trivialement sur $\mathfrak{t}$ et par l'action adjointe sur $\mathfrak{g}$. Alors φ est G-équivariant (car $Ad : G \to \mathfrak{Gl}_{\mathfrak{g}}$ est un morphisme de groupes). Donc $\varphi^*(f) \in (A[G] \otimes_A A[\mathfrak{t}])^G = A[G]^G \otimes_A A[\mathfrak{t}] = A \otimes_A A[\mathfrak{t}] = A[\mathfrak{t}]$. Par conséquent, $\varphi^*(f) = 1 \otimes f_{|\mathfrak{t}} = 0$. Comme φ^* est injectif, on en déduit que $f = 0$. $\square$

3.3 Le morphisme de Chevalley est un isomorphisme

On veut montrer que $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ est un isomorphisme. On peut alors supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$: On veut montrer que toute fonction W-invariante sur $\mathfrak{t}$ se prolonge de façon unique en une fonction G-invariante sur $\mathfrak{g}$.
Le point clef de la preuve est de montrer que si $a \in A[\mathfrak{g}]^G$, alors $\delta_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ implique $\delta \mid a$ où δ est l'équation du lieu singulier dans $\mathfrak{g}$. Le lemme qui suit permet de réduire au cas où A est local et complet.

Lemme 5 *Soit k un corps et V un k-espace vectoriel. On fait agir G trivialement sur V et par l'action adjointe sur $k[\mathfrak{g}]$. On considère le $k[\mathfrak{g}]$-module $V[\mathfrak{g}] := V \bigotimes k[\mathfrak{g}]$ muni de l'action donnée par le produit tensoriel. Soit $d \in k[\mathfrak{g}]$ et $a \in V[\mathfrak{g}]$ tels que d est G-invariant et la classe de a modulo $dV[\mathfrak{g}]$ est G-invariante. Alors $d_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ implique $d \mid a$.*

Démonstration : On peut supposer que $V = k$ en considérant les coordonnées de a dans une base de V, puis que k est algébriquement clos. $\mathfrak{g}$ est un fibré vectoriel sur $\mathrm{Spec}(k)$; on l'identifie au k-espace vectoriel $\mathfrak{g}(k)$ et G au groupe $G(k)$. Précisons aussi que $k[\mathfrak{g}]$ est une k-algèbre de polynômes.

Montrons un résultat préliminaire : Si $x \in \mathfrak{g}(k)$ vérifie $d(x) = 0$ alors a est constante sur l'adhérence de l'orbite de x, (qu'on appellera l'orbite fermée de x), notée $\overline{G.x}$.
a est invariant modulo d donc $\forall g \in G, \exists r \in k[\mathfrak{g}] \mid g^{-1}a = a + dr$ i.e. $a(gx) = a(x) + d(x)r(x) = a(x)$. Ainsi, a est constante sur $G.x$ et donc sur $\overline{G.x}$ par continuité.

Dans la suite, on fixe une base du système de racines et on considère la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$.

a) Supposons d'abord que d est sans facteurs carrés.
Montrons que si $x \in \mathfrak{g}$ vérifie $d(x) = 0$, alors $a(x) = 0$. Le théorème des zéros de Hilbert et le fait que l'idéal (d) est radical assureront que $d \mid a$.
On peut supposer que $x \in \mathfrak{b}$. En effet, les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées et leur union est $\mathfrak{g}$ donc il existe $g \in G$ tel que $x' := gx$ est dans $\mathfrak{b}$. Or d est G-invariant donc $d(x') = d(x) = 0$. Alors $a(x') = a(x)$ d'après le résultat préliminaire.
Pour $x \in \mathfrak{b}$ on a $x = \tau + \sum_{\alpha>0} x_\alpha$ où $\tau \in \mathfrak{t}$ et $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. On va montrer que $\tau \in \overline{G.x}$ et en déduire que $a(x) = 0$. En effet, on peut choisir un élément $\omega^\vee$ dans le réseau des coracines tel que $n_\alpha := \langle \omega^\vee, \alpha \rangle$ est positif pour toute racine positive α . On lui associe un sous-groupe à un paramètre $X : \mathbb{G}_m \to T$ tel que $\alpha(X(t)) = t^{n_\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$.

Ainsi X agit par $X(t).x = \tau + \sum_{\alpha>0} t^{n_\alpha} x_\alpha$. On en déduit que τ est dans l'orbite fermée de x.

Alors $d(\tau) = d(x) = 0$ car d est G-invariante et continue. D'après le résultat préliminaire, $a(x) = a(\tau)$. Or $d_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ donc $d(\tau) = 0$ implique $a(\tau) = 0$ d'où $a(x) = 0$. Ainsi le lemme est démontré pour d sans facteurs carrés.

b) Supposons d quelconque.
On a $d = d_1 d_2$ où d_1 est le produit des facteurs premiers de d de multiplicité 1. Alors d_1 est sans facteurs carrés. Comme d est invariant, pour tout $g \in G$ on a $gd_1.gd_2 = d_1 d_2$ donc gd_1 est sans facteurs carrés. Or $k[\mathfrak{g}]$ est factoriel donc pour tout $g \in G$ on a $gd_1 = \lambda(g) d_1$ où λ est un caractère de G. Puisque G est connexe, $\lambda = 1$ donc d_1 est G-invariant.

Or $d_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ donc $(d_1)_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ et $d_1 \mid a$ d'après a) et il existe alors $a_2 \in k[\mathfrak{g}]$ tel que $a = d_1 a_2$.
Si $(d_1)_{|\mathfrak{t}} = 0$ alors $d_1 = 0$ par invariance et donc $a = 0$, ce qui prouve le lemme.
Sinon, on a $a_{|\mathfrak{t}} = d_{1|\mathfrak{t}} a_{2|\mathfrak{t}}$. Or il existe P tel que $a_{|\mathfrak{t}} = d_{|\mathfrak{t}} P = d_{1|\mathfrak{t}} d_{2|\mathfrak{t}} P$ donc $(d_2)_{|\mathfrak{t}} \mid a_{2|\mathfrak{t}}$ car $k[\mathfrak{g}]$ est intègre. Une récurrence sur le degré de d permet alors de conclure. $\square$

Lemme 6 *Soit A un anneau local complet et $a, d \in A[\mathfrak{g}]^G$. Alors $d_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ implique $d \mid a$.*

Démonstration : $\mathfrak{g}$ est un fibré vectoriel sur $S = \mathrm{Spec}(A)$ donc $A[\mathfrak{g}]$ est une algèbre de polynômes sur A. Soit M l'idéal maximal de A et $k = A/M$. Pour tout j on a $A[\mathfrak{g}]/M^j[\mathfrak{g}] = A/M^j[\mathfrak{g}]$ donc $\varprojlim A[\mathfrak{g}]/M^j[\mathfrak{g}] = A[\mathfrak{g}]$ car A est complet. On construit alors par récurrence un système projectif (b_j) tel que pour tout j, $a \equiv b_j d$ modulo $M^j[\mathfrak{g}]$ et $\deg(b_j) \leq \deg(a)$. Les (b_j) se définissent alors en $b \in A[\mathfrak{g}]$ tel que $a = bd$ car $a \equiv b_j d$ modulo $M^j[\mathfrak{g}]$ pour tout j.

Pour $a \in A[\mathfrak{g}]$ on note $\bar{a}$ son image dans $k[\mathfrak{g}]$. L'action de G sur $A[\mathfrak{g}]$ induit une action sur $k[\mathfrak{g}]$ puis sur $k[\mathfrak{g}]/\bar{d}k[\mathfrak{g}]$, commutant par définition aux passages aux quotients des coefficients $A[\mathfrak{g}] \to k[\mathfrak{g}] \to k[\mathfrak{g}]/\bar{d}k[\mathfrak{g}]$.

Construisons b_1 :
Puisque d et a sont G-invariants, $\bar{d} \in k[\mathfrak{g}]$ l'est aussi, ainsi que la classe de $\bar{a}$ modulo $\bar{d}k[\mathfrak{g}]$. Or par hypothèse, $d_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ donc $\bar{d}_{|\mathfrak{t}} \mid \bar{a}_{|\mathfrak{t}}$ car la restriction à $\mathfrak{t}$ commute au passage au quotient modulo M. Donc le lemme précédent appliqué à $V[\mathfrak{g}] = k[\mathfrak{g}]$ fournit b_1.

Supposons $b_j \in A[\mathfrak{g}]/M^j[\mathfrak{g}]$ construit :
On va appliquer le lemme précédent au k-espace vectoriel M^j/M^{j+1}. On note b'_j un représentant de b_j dans $A[\mathfrak{g}]$. Soit $\overline{a - b'_j d}$ la classe de $a - b'_j d \in M^j[\mathfrak{g}]$ dans le $k[\mathfrak{g}]$-module $M^j/M^{j+1}[\mathfrak{g}]$.

D'une part, la classe de $\overline{a - b'_j d}$ modulo $\bar{d}$ est G-invariante car a l'est.

D'autre part, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M^j[\mathfrak{g}] & \longrightarrow & M^j[\mathfrak{t}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^j/M^{j+1}[\mathfrak{g}] & \longrightarrow & M^j/M^{j+1}[\mathfrak{t}] \end{array}$$

Alors, $\overline{(a - b'_j d)_{|\mathfrak{t}}} = (\overline{a - b'_j d})_{|\mathfrak{t}}$. Or $d_{|\mathfrak{t}} \mid (a - b'_j d)_{|\mathfrak{t}}$ car $d_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$ par hypothèse. Donc $\overline{d_{|\mathfrak{t}}} \mid \overline{(a - b'_j d)_{|\mathfrak{t}}}$ i.e. $\bar{d}_{|\mathfrak{t}} \mid (\overline{a - b'_j d})_{|\mathfrak{t}}$

D'après le lemme précédent, il existe $\bar{c} \in M^j/M^{j+1}[\mathfrak{g}]$ tel que $\overline{a - b'_j d} = \bar{d}\bar{c}$ i.e.
$\overline{a - b'_j d} - \overline{dc} = 0$ dans $M^j/M^{j+1}[\mathfrak{g}]$ i.e. $a - b'_j d - cd \in M^{j+1}[\mathfrak{g}]$. On pose alors $b'_{j+1} := b'_j + c$

où $c \in M^j[\mathfrak{g}]$ est un représentant de c. Si on note b_{j+1} la classe de b'_{j+1} modulo $M^{j+1}[\mathfrak{g}]$, alors $a \equiv (b_{j+1})d$ modulo $M^{j+1}[\mathfrak{g}]$ et $b_{j+1} \mapsto b_j$ par $A/M^{j+1}[\mathfrak{g}] \to A/M^j[\mathfrak{g}]$ □

Lemme 7 *Soit A un anneau. Soit δ l'équation du lieu singulier dans $\mathfrak{g}$. Soit $a \in A[\mathfrak{g}]^G$ tel que $\delta_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}}$. Alors $\delta \mid a$.*

Démonstration : Soit $A_0 \subset A$ la $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini engendrée par les coefficients de a et δ. Il suffit de montrer le résultat pour A_0 donc on peut supposer que A est noethérien.

Soit $D = \mathrm{Sing}(\mathfrak{g}) = \{\delta = 0\}$ le lieu singulier et $p : D \to S = \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme de structure.
Montrons que la condition $\delta \mid a$ définit un sous-schéma fermé de S. D'après un lemme déjà vu, l'algèbre $p_* O_D$ est localement libre sur S. Comme le problème est local, on peut supposer qu'elle est libre. Soit a_i les composantes de $a_{|D}$ sur une base du A-module libre $\Gamma(D, O_D) = O_D(p^{-1}(S))$.
Soit $F : Sch/S \to Ens$ le foncteur tel que pour $T \in Sch/S$:
$F(T) = \{*\}$ si $a_{T|D_T} = 0$ où $\{*\}$ est l'ensemble à un élément et $F(T) = \varnothing$ sinon
On a noté a_T (resp.D_T) le pullback de a (resp.D) donnés par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} D_T \arrow[r] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ \mathfrak{g}_T \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Comme D est un diviseur de Cartier relatif, D_T l'est aussi et la formation des a_i commute au changement de base. Ainsi, $F(T) = \{*\} \Leftrightarrow \delta_T \mid a_T \Leftrightarrow \forall i, (a_i)_T = 0$ dans $B[\mathfrak{g}]/(\delta_T)$ où $B = \Gamma(T, O_T) \Leftrightarrow$ le morphisme $A \to B$ se factorise à travers B/I où I est l'idéal engendré par les a_i. Donc F est représentable par le sous-schéma fermé $S_0 = Spec(A/I)$.

Montrons que $S_0 = S$ i.e. que $I = 0$. Pour $s \in \mathrm{Spec}(A)$ on note a_s l'image de a dans $A_s[\mathfrak{g}]$. Comme la restriction à $\mathfrak{t}$ commute à la localisation des coefficients, $\delta_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}} \Rightarrow \delta_{s|\mathfrak{t}} \mid a_{s|\mathfrak{t}}$. De plus, $\forall s, \delta_s \mid a_s \Rightarrow \forall s, IA_s = 0 \Rightarrow I = 0$. Donc on peut supposer que A est local.
On note $\hat{a}$ l'image de a dans la complétion $\widehat{A}$ de A. Or $\delta_{|\mathfrak{t}} \mid a_{|\mathfrak{t}} \Rightarrow \hat{\delta}_{|\mathfrak{t}} \mid \hat{a}_{|\mathfrak{t}}$ dans $\widehat{A}[\mathfrak{g}]$. Donc on peut supposer que A est complet et local. Alors le lemme précédent permet de conclure que $\hat{\delta} \mid \hat{a}$.

On note $I(\delta, a)$ l'idéal I tel que $\mathrm{Spec}(A/I)$ est le sous-schéma fermé défini par la condition $\delta \mid a$. Alors $I(\hat{\delta}, \hat{a}) = 0$ car $\hat{\delta} \mid \hat{a}$. Or $I(\hat{\delta}, \hat{a}) = I(\delta, a)\widehat{A}$ -car la formation de $I(\delta, a)$ commute aux changements de base- i.e. $I(\delta, a) \otimes_A \widehat{A} = 0$. Donc $I(\delta, a) = 0$ car A étant supposé noethérien, $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A. Alors $\delta \mid a$. □

Théorème 8 *Soit S un schéma et G un groupe de Chevalley simple déployé sur S avec $G \neq Sp_{2n}$. Alors le morphisme de Chevalley $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ est un isomorphisme.*

Démonstration : La question est locale sur S. Donc on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$. On sait déjà que le morphisme $\pi^* : A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{t}]^W$ est injectif. Montrons qu'il est surjectif.

Soit $f \in A[\mathfrak{t}]^W$ et f_1 la fonction sur $G/T \times \mathfrak{t}$ définie par $f_1(g,x) = f(x)$. Le fait que f est W-invariante entraîne que f_1 l'est. Donc elle induit une fonction f_2 sur $(G/T \times \mathfrak{t})/W$.

On utilise l'isomorphisme fondamental $\bar{b} : (G/T \times \mathrm{Reg}(\mathfrak{t}))/W \to \mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$ pour prolonger f à $\mathfrak{g}$.

Soit $h := f_2 \circ \bar{b}^{-1}$. On a $h : \mathrm{Reg}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\bar{b}^{-1}} (G/T \times \mathrm{Reg}(\mathfrak{t}))/W \xrightarrow{f_2} \mathbb{A}^1_A$.

Or $\mathrm{Reg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Spec}(A[\mathfrak{g}]_\delta)$ donc $h = \frac{k}{\delta^m}$ où $k \in A[\mathfrak{g}]$ n'est pas divisible par δ et m est un entier.

Par définition de b, on a $h_{|\mathfrak{t}} = f$ et il suffit de prolonger h à $\mathfrak{g}$.
Supposons alors que $m \geqslant 1$. On remarque que k est G-invariante puisque h l'est et que $\mathrm{Reg}(\mathfrak{g})$ est un ouvert schématiquement dense de $\mathfrak{g}$.

De plus, on a $h_{|\mathfrak{t}} = f$ donc $k_{|\mathfrak{t}} = f.\delta^m_{|\mathfrak{t}}$. Comme f est définie sur $\mathfrak{t}$ on en déduit que $\delta_{|\mathfrak{t}} \mid k_{|\mathfrak{t}}$.

Le lemme précédent assure alors que $\delta \mid k$ ce qui contredit l'hypothèse $m \geqslant 1$. Ainsi $h \in A[\mathfrak{g}]^G$ et $\pi^*(h) = f$. □

4 Le groupe SO_{2n}

4.1 Définition de SO_{2n}

On définit SO_{2n} sur $\mathbb{Z}$.

Soit E le $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2n$. On définit la forme quadratique standard q de E :
Pour $v = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$,

$$q(v) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

Elle est non-dégénérée au sens où $\{q = 0\} \subset \mathbb{P}(E)$ est lisse sur $\mathbb{Z}$. La forme polaire de q est définie par

$$\langle v, v' \rangle = q(v + v') - q(v) - q(v') = x_1y_1' + x_1'y_1 + ... + x_ny_n' + x_n'y_n.$$

Le groupe orthogonal O_{2n} est l'ensemble des $P \in GL_{2n}$ tels que $\Psi(P) = 0$ où Ψ est le morphisme de GL_{2n} dans l'espace des formes quadratiques sur E défini par $\Psi(P) = q \circ P - P$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{o}_{2n}$ est le sous-schéma de $\mathfrak{gl}_{2n}$ formé des matrices M tels que $d\Psi_{Id}(M) = 0$ où $d\Psi_{Id}(M)(v) = \langle v, Mv \rangle$. On vérifie alors que O_{2n} est lisse sur $\mathbb{Z}$.

On montre qu'il existe un unique élément $\delta \in \mathbb{Z}[O_{2n}]$ tel que $\det = 1 + 2\delta$.
Soit $\mathcal{G}$ le groupe introduit dans les exemples de schémas en groupes : $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[u, \frac{1}{1+2u}])$.
Alors on a $\delta(P_1P_2) = \delta(P_1) + \delta(P_2) + 2\delta(P_1)\delta(P_2)$ car $\det(P_1P_2) = \det(P_1)\det(P_2)$.
Ainsi, δ définit un morphisme de schémas en groupes $\delta : O_{2n} \to \mathcal{G}$.

On définit alors SO_{2n} comme étant le noyau de δ ; il est lisse sur $\mathbb{Z}$.
Le sous-groupe des matrices diagonales dans SO_{2n} est un tore maximal dont on note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie et X_i les fonctions coordonnées sur $\mathfrak{t}$.

4.2 Invariants du groupe de Weyl

On note encore W l'image du groupe de Weyl dans le groupe des automorphismes de $A[\mathfrak{t}]$. Alors W est engendré par les permutations des coordonnées et les réflexions $\varepsilon_{i,j}$ qui envoient X_i et X_j sur leurs opposées et laisse les autres coordonées invariantes. On note σ_k les fonctions symétriques élémentaires en n variables.

On calcule alors l'anneau des invariants $A[\mathfrak{t}]^W$:

Lemme 8 *Soit A un anneau. Alors $A[\mathfrak{t}]^W$ est engendré par $X_1...X_n$, $\sigma_k({X_i}^2)$, et $x\sigma_k(X_i)$ où $k < n$ et x parcourt l'idéal de 2-torsion de A.*

Démonstration : Soit F un polynôme invariant. Un monôme sera dit bon si ses exposants en les X_i ont même parité : il s'agit d'un monôme en les ${X_i}^2$ ou d'un produit de $X_1...X_n$ par un monôme en les ${X_i}^2$. Il sera dit mauvais sinon.
F s'écrit de manière unique comme somme de sa bonne et de sa mauvaise partie :

$$F(X_1, ..., X_n) = F_1({X_i}^2, X_1...X_n) + F_2(X_i).$$

Or W préserve cette décomposition donc F_1 et F_2 sont aussi invariants. Ils sont donc invariants par permutations des coordonnées, d'où

$$F(X_1, ..., X_n) = G_1(\sigma_k({X_i}^2), X_1...X_n) + G_2(\sigma_k(X_i)).$$

En faisant agir les $\varepsilon_{i,j}$, on obtient que les coefficients de G_2 sont dans l'idéal de 2-torsion de A.

$\square$

4.3 Le quotient adjoint pour SO_{2n}

On rappelle qu'il existe une unique fonction sur $\mathfrak{so}_{2n}$, appelée le pfaffien telle que $\det(M) = (-1)^n(\mathrm{pf}(M))^2$. De plus, pf est une fonction invariante pour l'action adjointe.

Soit M la matrice universelle de $\mathfrak{so}_{2n}$, χ son polynôme caractéristique et pf son pfaffien. On montre alors que χ est un polynôme pair. On note $c_{2k}(1 \leq k \leq n)$ ses coefficients ; ce sont des fonctions invariantes sous l'action adjointe. En particulier, le coefficient constant est $c_{2n} = \det(M) = (-1)^n(\mathrm{pf}(M))^2$.

4.3.1 Des invariants issus de la caractéristique 2

Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. En caractéristique 2, la forme polaire est alternée donc les homothéties sont antisymétriques. On peut alors définir le polynôme caractéristique pfaffien :

$$\pi_{\mathbb{F}_2}(t) = \mathrm{pf}(t\,\mathrm{Id} - M_{\mathbb{F}_2})$$

On a : $\chi_{\mathbb{F}_2}(t) = (\pi_{\mathbb{F}_2}(t))^2$.

On considère un relèvement particulier de $\pi_{\mathbb{F}_2}$ à $\mathbb{Z}$.

Soit $\sigma : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}$ défini par $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$. Soit π le polynome de $\mathbb{Z}[\mathfrak{so}_{2n}][t]$ défini par

$$\pi(t) = t^n + \pi_1 t^{n-1} + ... + \pi_{n-1} t + \pi_n$$

où $\pi_n := \mathrm{pf}(M)$ et les $\pi_i (1 \leq i \leq n-1)$ sont les images via σ des coefficients correspondants de $\pi_{\mathbb{F}_2}$.

Soit A un anneau et x un élément de 2-torsion de A. On montre alors que tout monôme $x(\pi_1)^{\alpha_1}...(\pi_{n-1})^{\alpha_{n-1}}$ définit bien une fonction sur $\mathfrak{so}_{2n,A}$, indépendante du relèvement de $\pi_{\mathbb{F}_2}$ à $\mathbb{Z}$ choisi. De plus il s'agit d'une fonction invariante.

4.3.2 L'anneau des invariants

Théorème 9 *Soit A un anneau, $G = SO_{2n,A}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n,A}$. Alors*

$$A[\mathfrak{g}]^G = A[c_{2k}; \mathrm{pf}; x(\pi_1)^{\epsilon_1}...(\pi_{n-1})^{\epsilon_{n-1}}]$$

où $1 \leq k \leq n-1$, x parcourt l'idéal de 2-torsion de A et $\epsilon_i = O$ ou 1, non tous nuls.

Démonstration : Soit $B = A[c_{2k}; \mathrm{pf}; x(\pi_1)^{\epsilon_1}...(\pi_{n-1})^{\epsilon_{n-1}}]$.
$G \neq Sp_{2n}$ donc $\pi^*(A[\mathfrak{g}]^G) = A[\mathfrak{t}]^W = A[\sigma_k({X_i}^2), X_1...X_n, x\sigma_k(X_i)]$.
D'autre part c_{2k}, pf et $x\pi_k$ se restreignent respectivement en $\pm\sigma_k({X_i}^2)$, $X_1...X_n$ et $x\sigma_k(X_i)$.
De plus, comme $\pi_k^2 = c_{2k}$ en caractéristique 2, on a $x\pi_k^2 = xc_{2k}$.
Donc $\pi^*(B) = A[\mathfrak{t}]^W$ et finalement $A[\mathfrak{g}]^G = B$. □

5 Le groupe Sp_{2n}

5.1 Définition de Sp_{2n}

On définit Sp_{2n} sur $\mathbb{Z}$.

Soit E le $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2n$. On considère la forme alternée φ sur E définie par :
Pour $v = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n})$ et $v' = (y_1, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_{2n})$,

$$\varphi(v, v') = x_1 y_{n+1} - x_{n+1} y_1 + ... + x_n y_{2n} - x_{2n} y_n.$$

Sp_{2n} est le sous-groupe de GL_{2n} des matrices P qui préservent φ. Il est donc défini par les équations $P^t J P = J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}$.

En dérivant, on obtient que son algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$ est le sous-schéma de $\mathfrak{gl}_{2n}$ des matrices M telles que $M^t J + JM = 0$. On vérifie alors par un calcul de dimension que Sp_{2n} est lisse sur $\mathbb{Z}$.

5.2 Le morphisme de Chevalley est toujours schématiquement dominant

On donne quelques notations, suivis de deux lemmes préliminaires.
Soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{sl}_2$ la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures.
Soit L (resp.S) l'ensemble des racines longues (resp. courtes) de $\mathfrak{sp}_{2n}$.
Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_{2n}$ la somme $\mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in L} \mathfrak{sp}_{2n,\alpha}$.

Lemme 9 *Soit k un corps.*
Alors les morphismes $b_k : (SL_2)_k \times \mathfrak{b}_k \to (\mathfrak{sl}_2)_k$ et $c_k : (Sp_{2n})_k \times \mathfrak{h}_k \to (\mathfrak{sp}_{2n})_k$ obtenus par restriction de l'action adjointe sont schématiquement dominants.
De plus, $\mathfrak{h}$ est isomorphe en tant qu'algèbre de Lie à ${\mathfrak{sl}_2}^{\oplus n}$.

Démonstration : L'assertion sur b_k résulte du fait que sur un corps algébriquement clos, toute matrice est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure.

Pour la seconde assertion, on procède comme pour la démonstration de l'isomorphisme fondamental. Il suffit de voir que c est lisse et on peut supposer que k est algébriquement clos. Puis par homogénéité, il suffit de montrer que la différentielle de c_k en un point de la forme $(1, t)$ est surjective. $\psi = dc_{k(1,t)}$ est définie par $(x, \tau) \mapsto [x, t] + \tau$.
Or il résulte du lemme combinatoire que les racines courtes ne sont pas multiples entières d'un poids, donc on peut choisir $t \in \mathfrak{t}_k$ tel que $d\alpha(t) \neq 0$ pour toute racine courte α. Alors $\bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{sp}_{2n,\alpha} \subset \psi((\mathfrak{sp}_{2n})_k \times \{0\})$. Comme $\psi(\{0\} \times \mathfrak{h}_k) = \mathfrak{h}_k$, l'image de ψ contient $\mathfrak{h}_k \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{sp}_{2n,\alpha} = (\mathfrak{sp}_{2n})_k$. Ainsi ψ est surjective.

La dernière assertion résulte d'un calcul explicite dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}$. □

Lemme 10 *Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Alors le morphisme de restriction $A[\mathfrak{b}]^T \to A[\mathfrak{t}]^W$ est injectif.*

Démonstration : On fait un calcul explicite pour voir qu'un élément T-invariant de $A[\mathfrak{b}]$ s'identifie à sa restriction à $\mathfrak{t}$. □

On peut alors démontrer le théorème :

Théorème 10 *Soit S un schéma. Soit $G = SL_2$ ou $G = Sp_{2n} (n > 1)$. Alors le morphisme $\pi : \mathfrak{g}/G \to \mathfrak{t}/W$ est encore schématiquement dominant.*

Démonstration : La question est locale sur S donc on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $\pi^* : A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{t}]^W$ le morphisme induit par π. On pose $H = {SL_2}^n$, qui agit sur $\mathfrak{h} = {\mathfrak{sl}_2}^{\oplus n}$.

Pour SL_2, π^* se décompose en deux morphismes de restriction : $A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{b}]^T \to A[\mathfrak{t}]^W$.
Pour $Sp_{2n}(n > 1)$, π^* se décompose en : $A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{h}]^H \to A[\mathfrak{t}]^W$.

Les morphismes b_k et c_k ci-dessus étant schématiquement dominants, on raisonne comme dans la preuve du théorème pour $G \neq Sp_{2n}$ pour montrer que les morphismes $A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{h}]^H$ et $A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{b}]^T$ sont injectifs.
Le lemme précédent permet alors de conclure pour SL_2.
Pour $Sp_{2n}(n > 1)$, on a $\mathfrak{h} = {\mathfrak{sl}_2}^{\oplus n}$ par le premier lemme ci-dessus. Puisque $H = {SL_2}^n$ et que le théorème est démontré pour SL_2, il l'est aussi pour Sp_{2n}.

□

5.3 Le quotient adjoint pour SL_2

On commence par SL_2, pour lequel on va voir que le morphisme de Chevalley n'est pas un isomorphisme. Soit $\pi^* : A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{t}]^W$ le morphisme de restriction.

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ la matrice universelle de $\mathfrak{sl}_2$. Alors $A[a]$ est l'anneau des fonctions sur $\mathfrak{t}$ sur A. Le calcul de $A[\mathfrak{t}]^W$ est analogue à celui qui précède.

Lemme 11 *Soit A un anneau. Alors $A[\mathfrak{t}]^W = A[a^2] \oplus aA[2][a^2]$ où $A[2]$ désigne l'idéal de 2-torsion de A.*

On pose $\det(a, b, c) = -a^2 - bc$.

Lemme 12 *Soit A un anneau. Alors $A[\mathfrak{sl}_2]^{SL_2} = A[\det]$.*

Démonstration : La matrice $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}^{-1}$ agit sur les fonctions coordonées comme suit : $a \mapsto a$, $b \mapsto u^2 b$ et $c \mapsto u^{-2}c$. Donc un polynôme invariant est un polynôme en a et bc.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit comme suit : $a \mapsto a + tc$, $b \mapsto b - 2ta - t^2c$ et $c \mapsto c$.

Montrons q'il ne peut exister de polynôme homogène invariant non nul de degré impair $2n + 1$. Un tel polynôme s'écrit $af(a^2, bc)$ où f est homogène de degré n.
Comme f est invariant, on a l'identité

$$af(a^2, bc) = (a + tc)f((a + tc)^2, (b - 2ta - t^2c)c).$$

Pour $a = 0$ on tire $tcf(t^2c^2, bc - t^2c^2) = 0$ soit $f(t^2c^2, bc - t^2c^2) = 0$. Après le changement de coordonnées $d = b - t^2c$, on a $f(t^2c^2, cd) = 0 = c^n f(t^2c, d)$ par homogénéité. Donc $f = 0$.

Donc $\pi^*(A[\mathfrak{sl}_2]^{SL_2}) \subset A[a^2]$.
Comme det est invariant et se restreint en $-a^2$, on a $\pi^*(A[\det]) = A[a^2]$.
L'injectivité de π^* permet finalement de conclure que $A[\mathfrak{sl}_2]^{SL_2} = A[\det]$. □

5.4 Le quotient adjoint pour Sp_{2n}

Le sous-groupe de Sp_{2n} formé des matrices diagonales de la forme $\mathrm{diag}(t_1, ..., t_n, {t_1}^{-1}, ..., {t_n}^{-1})$ est un tore maximal T. On note $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie et X_i les coordonnées sur $\mathfrak{t}$.

On note encore W l'image du groupe de Weyl dans le groupe des automorphismes de $A[\mathfrak{t}]$. Alors W est engendré par les permutations des X_i et par les réflexions ε_i qui envoient les X_i sur leurs opposées et laisse invariantes les autres coordonnées.

Le calcul de $A[\mathfrak{t}]^W$ est analogue à ceux qui précèdent.

Lemme 13 *Soit A un anneau. Alors $A[\mathfrak{t}]^W$ est engendrée par les $\sigma_k(X_i^2)$ et les $x\sigma_k(X_i)$, où $k < n$ et x parcourt l'idéal de 2-torsion de A.*

Soit E la représentation naturelle de Sp_{2n}. On a donc un morphisme $Sp_{2n} \to GL_E$, qui induit un morphisme $\mathfrak{sp}_{2n} \to \mathfrak{gl}(E)$. Soit M la matrice universelle sur $\mathfrak{gl}(E)$, et χ son polynôme caractéristique. Les coefficients de χ sont des fonctions invariantes sous l'action adjointe.

Théorème 11 *Soit A un anneau et $G = Sp_{2n,A}$. Alors le morphisme de Chevalley $\pi : \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/G$ est un isomorphisme si et seulement si A n'a pas de 2-torsion. De plus, $A[\mathfrak{g}]^G = A[c_2, c_4, ..., c_{2n}]$ où les c_{2k} sont les coefficients de χ.*

Démonstration : Soit $G = Sp_{2n,A}$ et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Soit $\pi^* : A[\mathfrak{g}]^G \to A[\mathfrak{t}]^W$ le morphisme induit par π. Comme π est schématiquement dominant, $A[\mathfrak{g}]^G$ est un sous-anneau de $A[\mathfrak{t}]^W$ et $A[\mathfrak{t}]^W = A[\sigma_k(X_i^2); x\sigma_k(X_i)]$ d'après le lemme précédent. On sait de plus que $A[\mathfrak{g}]^G$ est aussi un sous-anneau de l'image de $A[\mathfrak{h}]^H$ dans $A[\sigma_k(X_i^2); x\sigma_k(X_i)] = A[\mathfrak{t}]^W$. Or cette image est $A[\sigma_k(X_i^2)]$. Donc $\pi^*(A[\mathfrak{g}]^G) \subset A[\sigma_k(X_i^2)]$.
Mais $c_{2k} \in A[\mathfrak{g}]^G$ s'envoie par π^* sur $\pm\sigma_k(X_i^2)$. Ainsi, $\pi^*(A[c_{2k}]) = A[\sigma_k(X_i^2)]$ et l'injectivité de π^* permet de conclure que $A[\mathfrak{g}]^G = A[c_{2k}]$. □

Références

[BLie] BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5,6*, Hermann.

[EGA] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHÉS 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1961–1967).

[Fa] R. FARNSTEINER, *Varieties of tori and Cartan subalgebras of restricted Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 10, 4181–4236.

[Hu] J. HUMPHREYS, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Ma] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, 1989.

[Ray] M. RAYNAUD, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, Berlin, 1967, pp. 78-85.

[Se] J.P. SERRE, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, New York-Amsterdam, 1966.

[SGA 1] A. GROTHENDIECK *et al.*, *"SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental"*, Springer Lecture Notes in math. 224, 1971.

[SGA 3] M. DEMAZURE, A. GROTHENDIECK, *Schémas en groupes. III : Structure des schémas en groupes réductifs*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Lecture Notes in Mathematics 153.

[SS] T. A. SPRINGER, R. STEINBERG, *Conjugacy classes*, in : BOREL et al., *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups* (IAS, Princeton, 1968/69) pp. 167–266, Lecture Notes in Mathematics 131, Springer, 1970.