MODÈLES DES COURBES ET MODÈLES DE NÉRON

Mémoire de Master 2

Présenté par : Cédric Pépin

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Directeur de mémoire : Qing Liu (Bordeaux 1)

Co-tutelle : Matthieu Romagny (Paris 6)

Année universitaire : 2007-2008

Modèles des courbes et Modèles de Néron

Table des matières

1	Modèles réguliers des courbes	6
1.1	Normalisation et éclatements	7
1.2	Désingularisation des surfaces fibrées	10
2	Modèles de Néron des variétés abéliennes	18
2.1	Le cas général	18
2.2	Le cas des jacobienes	23
2.2.1	Foncteur de Picard relatif	23
2.2.2	Intersection sur une surface fibrée régulière	24
2.2.3	Modèle de Néron d'une jacobienne	34
3	Le groupe des composantes du modèle de Néron d'une variété abélienne et le pairing de Grothendieck	41
3.1	Le groupe des composantes	41
3.2	Le pairing de Grothendieck	42
3.2.1	Le cas général des variétés abéliennes	46
3.2.2	Le cas des jacobienes	54
3.2.3	Exemples	70
3.2.4	Un contre-exemple	75

Soit S un schéma de Dedekind de dimension 1, de corps de fonctions K , de point générique η . Soit V une variété algébrique sur K . Un modèle de V sur S est un couple $(\mathcal{V}, f)$, où $\mathcal{V}$ est un S -schéma de type fini, plat, dont le morphisme structural est surjectif, et f un isomorphisme $\mathcal{V}_\eta \simeq V$. On dira que le modèle $(\mathcal{V}, f)$ vérifie la propriété (P) si $\mathcal{V} \rightarrow S$ vérifie (P) .

La propriété (P) que l'on demande pour $(\mathcal{V}, f)$ est en général une propriété vérifiée par V , et dont on veut qu'elle soit conservée par passage au schéma $\mathcal{V}$. Les deux cas qui vont nous intéresser sont les suivants :

1. (Modèle d'une courbe régulière) V est une courbe régulière, intègre, projective sur K , avec
(P) le modèle $(\mathcal{V}, f)$ est régulier, intègre et projectif ;
2. (Modèle de Néron) V est une variété abélienne sur K , avec
(P) le modèle $(\mathcal{V}, f)$ est un schéma en groupes commutatif, séparé, de type fini, lisse et vérifie la propriété universelle suivante : pour tout S -schéma lisse $\mathcal{X}$, l'application canonique

$$\mathrm{Mor}_S(\mathcal{X}, \mathcal{V}) \rightarrow \mathrm{Mor}_K(X_K, V)$$

est bijective.

Dans ce mémoire, nous donnerons les grandes étapes de la construction d'un modèle régulier d'une courbe connexe, projective et lisse sur K , lorsque la base S est locale ; nous suivrons l'exposition de [10], chap. 8. Nous indiquerons ensuite la construction de Raynaud du modèle de Néron J de la jacobienne J_K d'une courbe X_K , lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète R strictement hensélien. Il faut de plus supposer que le corps résiduel k de R est parfait, ou que la courbe X_K possède un point rationnel. On se référera à [2], sect. 9.5. En particulier, nous verrons que cette construction utilise un modèle régulier $X \rightarrow S$ de la courbe X_K , et que le groupe des composantes de J est entièrement déterminé par deux matrices M et Λ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, issues de la théorie de l'intersection sur X . Nous pourrions alors présenter l'article [1] de Bosch et Lorenzini. Cet article traite d'un accouplement introduit par Grothendieck dans [5], Exp. IX, entre le groupe des composantes du modèle de Néron d'une variété abélienne et celui du modèle de Néron de sa variété duale. Grothendieck a en particulier conjecturé que cet accouplement était non-dégénéré. Dans le cas des jacobienes, Bosch et Lorenzini donnent une formule explicite de ce pairing, uniquement à l'aide de M et de Λ . Lorsque la courbe X_K possède un point rationnel, les auteurs montrent alors que le pairing est non-dégénéré si k est parfait, et donnent un contre-exemple dans le cas d'un corps résiduel imparfait.

Chapitre 1

Modèles réguliers des courbes

Dans tout ce chapitre, nous suivons la présentation de [10], chapitre 8.

Par définition, un *schéma de Dedekind* est un schéma intègre noethérien qui est normal et de dimension 0 ou 1. Dans toute la suite de ce mémoire, lorsque la lettre S désignera un schéma de Dedekind, il sera toujours sous-entendu que celui-ci est *de dimension 1*.

Fixons un schéma de Dedekind affine $S := \text{Spec}(A)$, de corps de fonctions K , de point générique η .

Soit C une courbe normale (donc régulière), connexe (donc intègre) et propre (donc projective) sur K . Par définition de la projectivité, il existe un entier $n \geq 1$ et une immersion fermée $C \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$. La courbe C s'identifie alors à un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_K^n$, et par conséquent il existe $F_1, \dots, F_m \in K[T_0, \dots, T_n]$ homogènes tels que, sur K , on ait un isomorphisme

$$C \simeq \text{Proj} \left(\frac{K[T_0, \dots, T_n]}{(F_1, \dots, F_m)} \right).$$

Quitte à multiplier les F_i par des éléments de $A \setminus \{0\}$, on peut les supposer à coefficients dans A . Posons

$$\mathcal{C}_0 := \text{Proj} \left(\frac{A[T_0, \dots, T_n]}{(F_1, \dots, F_m)} \right).$$

C'est un S -schéma projectif, de fibre générique isomorphe à C . Considérons alors

$$\mathcal{C} := \text{adhérence de Zariski de } C \text{ dans } \mathcal{C}_0,$$

munie de son unique structure de sous-schéma réduit (donc intègre puisque C est déjà irréductible) de $\mathcal{C}_0$.

Alors $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ est une surface fibrée au sens suivant :

Définition 1.0.1 [Surface fibrée sur S] Soit S un schéma de Dedekind. Une surface fibrée sur S est un S -schéma $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ plat et projectif, avec $\mathcal{X}$ intègre et de dimension 2.

Ici, $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ est projectif car composé de l'immersion fermée (donc projective) $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_0$ et du morphisme projectif $\mathcal{C}_0 \rightarrow S$. Le schéma $\mathcal{C}$ est intègre par construction. Pour la platitude de π , on utilise le résultat suivant (cf. [10], 4.3.9) :

Proposition 1.0.2 *Soit S un schéma de Dedekind et $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme avec X intègre. Alors π est plat si et seulement si il est dominant.*

Dans notre situation, π est bien dominant, de fibre générique C (et même surjectif puisqu'il est projectif et donc propre). Enfin, pour voir que $\mathcal{C}$ est de dimension 2, on peut faire appel au résultat suivant (cf. [10], 4.4.16) :

Proposition 1.0.3 *Soit S un schéma de Dedekind et soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini dominant, avec X irréductible. Alors pour tout $s \in S$ tel que $X_s \neq \emptyset$, X_s est équidimensionnelle, de dimension $\dim X_\eta$.*

Par conséquent, si x est un point fermé de $\mathcal{C}$, et s son image par π (qui est donc un point fermé de S par propriété), alors $\mathcal{C}_s$ est une courbe sur $k(s)$, x est un point fermé de $\mathcal{C}_s$, et donc par platitude

$$\dim \mathcal{O}_{\mathcal{C},x} = \dim \mathcal{O}_{S,s} + \dim \mathcal{O}_{\mathcal{C}_s,x} = 1 + 1 = 2.$$

Ceci étant vrai pour tout point fermé, $\mathcal{C}$ est bien de dimension 2.

Ainsi, $\mathcal{C} \rightarrow S$ est bien une surface fibrée, de fibre générique isomorphe à C . C'est donc un modèle de la courbe C . On voit donc que toute courbe intègre projective sur K possède un modèle (l'hypothèse de normalité de C n'a pas été utilisée jusqu'ici). Maintenant, puisqu'on est parti d'une courbe normale, on voudrait trouver un modèle normal de cette courbe. Mieux, la courbe C est régulière (puisque normalité et régularité coïncident en dimension 1), et donc on voudrait même un modèle régulier de la courbe. Il s'agit d'un problème de désingularisation, que nous allons discuter maintenant.

1.1 Normalisation et éclatements

Normalisation

Rappelons que, de façon générale, on peut toujours « rendre normal » un schéma intègre.

Définition 1.1.1 [Normalisation d'un schéma intègre] *Soit X un schéma intègre. Un morphisme $f : X' \rightarrow X$ est appelé un morphisme de normalisation si X' est irréductible et normal, et si tout morphisme dominant $g : Y \rightarrow X$ avec Y irréductible et normal se factorise de façon unique par f :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & \nearrow f & \\ X' & & \end{array}$$

On a alors (cf. [10], 4.1.22) :

Proposition 1.1.2 *Soit X un schéma intègre. Il existe un morphisme de normalisation $f : X' \rightarrow X$, unique à isomorphisme unique près de X -schémas. De plus, $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de normalisation si et seulement si Y est irréductible et normal, et f est birationnel et entier.*

Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée, avec S affine. Soit $X' \rightarrow X$ la normalisation de X . X' est intègre, de dimension 2 (car entier dominant) et $X' \rightarrow S$ est dominant. Mais on ne sait pas si X' est projectif sur S . Un point-clé sera que, sous certaines hypothèses, le morphisme de normalisation $X' \rightarrow X$ est fini. On pourra alors conclure que $X' \rightarrow S$ est une surface fibrée (et donc un modèle normal de sa fibre générique) en utilisant le résultat général suivant (cf. [10], 8.3.47(b)) :

Proposition 1.1.3 *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme fini birationnel de schémas noethériens intègres. Si X est (quasi-)projectif sur un anneau noethérien, alors f est projectif.*

Dans le cas des variétés algébriques, la finitude du morphisme de normalisation est connue (cf. [10], 4.1.30). Nous appliquerons ce résultat aux fibres des surfaces fibrées, lors de l'étude du problème de désingularisation.

Proposition 1.1.4 *Soit X une variété intègre. Le morphisme de normalisation $X' \rightarrow X$ est fini, et l'ensemble des points normaux de X est un ouvert (non-vide) de X .*

Terminons ce paragraphe par une notion plus générale de normalisation.

Définition 1.1.5 [Normalisation généralisée] *Soit X un schéma ne possédant qu'un nombre fini de composantes irréductibles $X_1, \dots, X_n$. Munissons celles-ci de leur unique structure de sous-schéma réduit (donc intègre), et soit alors X'_i la normalisation de X_i , pour $i = 1 \dots, n$. La normalisation de X est définie par l'union disjointe*

$$X' := \coprod_{i=1, \dots, n} X'_i.$$

Par définition, on a $(X_{\text{red}})' = X'$, où X_{red} est le schéma réduit associé à X . De plus, le morphisme de projection $X' \rightarrow X$ est entier, surjectif, et birationnel au sens suivant.

Définition 1.1.6 [Morphisme birationnel généralisé] *Soit X un schéma réduit noethérien. Soient $\xi_1, \dots, \xi_n$ les points génériques de X . On dira qu'un morphisme $f : Z \rightarrow X$ est birationnel si Z admet exactement n points génériques $\xi'_1, \dots, \xi'_n$, et si*

$$f^{-1}(\xi_i) = \xi'_i \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{X, \xi_i} \rightarrow \mathcal{O}_{Z, \xi'_i} \text{ est un isomorphisme}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

Remarque 1.1.7 Avec ces définitions généralisées, l'énoncé 1.1.3 reste vrai pour des schémas réduits, pas nécessairement intègres (cf. la référence correspondante).

Éclatements

Pour désingulariser un schéma, un autre ingrédient essentiel est l'éclatement de ce schéma le long d'un sous-schéma fermé. Nous allons rappeler brièvement la définition des éclatements, ainsi que leur rôle essentiel en géométrie projective birationnelle (et donc en particulier pour la désingularisation des modèles).

Commençons par le cas affine.

Définition 1.1.8 [Éclatement d'un schéma affine noethérien]

Soient $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine noethérien, et I un idéal de A . Considérons la A -algèbre graduée

$$\tilde{A} := \bigoplus_{d \geq 0} I^d$$

où $I^0 := A$. Posons $\tilde{X} := \text{Proj } \tilde{A}$. Par définition, l'éclatement de X le long de I est le morphisme $\tilde{X} \rightarrow X$.

Par recollements, on peut définir l'éclatement d'un schéma localement noethérien X quelconque le long d'un faisceau d'idéaux cohérent de $\mathcal{O}_X$ (cf. [10], 8.1.8).

Définition-Proposition 1.1.9 [Éclatement d'un schéma localement noethérien] Soient X un schéma localement noethérien, et $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux cohérent de $\mathcal{O}_X$ ¹. Considérons la $\mathcal{O}_X$ -algèbre graduée

$$\mathcal{B} := \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

où $\mathcal{I}^0 := \mathcal{O}_X$. Il existe un unique X -schéma $f := \text{Proj } \mathcal{B} \rightarrow X$ tel que pour tout ouvert affine U de X , on ait un isomorphisme de U -schémas $f^{-1}(U) \simeq \text{Proj}(\mathcal{B}(U))$, de façon compatible avec les restrictions d'ouverts affines $V \subseteq U$. En particulier, f est propre. Le morphisme f est appelé l'éclatement de X le long de $\mathcal{I}$, et on notera $\tilde{X} := \text{Proj } \mathcal{B}$.

Remarque 1.1.10 En général, on a perdu la projectivité du cas affine. Cependant, on peut montrer que l'éclatement d'un schéma (quasi-)projectif sur un anneau noethérien est toujours projectif (cf. [10], 8.1.22).

¹On rappelle que sur un schéma localement noethérien, les notions de faisceaux d'idéaux cohérents et quasi-cohérents coïncident.

Les éclatements se comportent bien par changement de base plat. De plus, l'éclatement d'un schéma intègre est un morphisme birationnel. En effet, on a l'énoncé précis suivant (cf. [10], 8.1.12(c),(d)) :

Proposition 1.1.11 *Soient X un schéma localement noethérien, et $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux cohérent sur X . Soit $f : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de $\mathcal{I}$. Alors :*

(i) *Soit $Z \rightarrow X$ un morphisme plat, avec Z localement noethérien. Soit $\tilde{Z} \rightarrow Z$ l'éclatement de Z le long de $\mathcal{I}\mathcal{O}_Z$. Alors $\tilde{Z}$ et $\tilde{X} \times_X Z$ sont des Z -schémas isomorphes.*

(ii) *Le morphisme f induit un isomorphisme $f^{-1}(X \setminus V(\mathcal{I})) \rightarrow X \setminus V(\mathcal{I})$, où $V(\mathcal{I}) := \text{support de } \mathcal{O}_X / \mathcal{I}$. Si X est intègre (et $\mathcal{I} \neq 0$), alors $\tilde{X}$ est intègre et f birationnel.*

L'importance des éclatements vient, entre autres, du fait que tout morphisme birationnel entre schémas intègres projectifs sur un anneau noethérien est un éclatement. Pour démontrer le théorème que nous avons en vue sur la caractérisation des surfaces fibrées désingularisables, c'est un résultat analogue que l'on utilisera, mais qui concerne les morphismes birationnels *finis* au lieu des morphismes birationnels *projectifs* (cf. [10], 8.3.47(a)).

Proposition 1.1.12 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel fini de schémas noethériens réduits. Supposons qu'il existe un faisceau inversible $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}_Y$ tel que f soit un isomorphisme au-dessus de $Y \setminus V(\mathcal{L})$. Alors f est l'éclatement de Y le long d'un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}$, avec $V(\mathcal{I}) \subseteq V(\mathcal{L})$.*

1.2 Désingularisation des surfaces fibrées

Définition 1.2.1 [Désingularisation] *Soit X un schéma réduit noethérien. Un morphisme propre birationnel $f : Z \rightarrow X$ avec Z régulier est appelé une désingularisation de X . Si f est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier de X , on dira que $Z \rightarrow X$ est une désingularisation au sens fort.*

Soit X un schéma réduit noethérien de dimension 2. Considérons une suite de morphismes

$$\cdots \rightarrow X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X.$$

On dira que c'est une *suite de désingularisation* de X si

- $X_1 \rightarrow X$ est la normalisation de X , et c'est un morphisme fini;
- pour tout $i \geq 1$ le lieu singulier $\text{Sing}(X_i)$ de X_i est fermé, $X_{i+1} \rightarrow X_i$ est la composition de l'éclatement $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$ de X_i le long de $\text{Sing}(X_i)$, suivi de la normalisation $X_{i+1} \rightarrow \tilde{X}_i$, et cette dernière est un morphisme fini.

Théorème 1.2.2 (Lipman, [9], [8]) *Soit R un anneau de valuation discrète complet. Posons $S := \text{Spec}(R)$. Soit X un schéma réduit de dimension 2, de type fini sur S . Alors il existe une suite de désingularisation de X qui est finie. En particulier, X admet une désingularisation au sens fort.*

Lipman démontre en fait un résultat beaucoup plus général, où l'hypothèse « X de type fini sur un anneau de valuation discrète complet » est remplacée par « X schéma noethérien excellent ». C'est la bonne hypothèse pour assurer la finitude des morphismes de normalisation, et le fait que les lieux singuliers soient fermés. Cependant, nous avons énoncé le théorème avec ces hypothèses plus particulières, parce que c'est sous cette forme que nous allons l'utiliser pour caractériser les surfaces fibrées (sur une base locale) à fibre générique régulière qui admettent une désingularisation.

D'abord, lorsque le schéma de base S est local, le lieu singulier $\text{Sing}(X)$ de X est toujours fermé :

Proposition 1.2.3 *Soit S un schéma de Dedekind local. Soit X un schéma intègre de dimension 2, plat, surjectif et de type fini sur S . Alors $\text{Sing}(X)$ est fermé.*

Notation 1.2.4 *Soit X un schéma localement noethérien. Le lieu régulier de X sera noté $\text{Reg}(X)$ (i.e. $\text{Reg}(X) := X \setminus \text{Sing}(X)$).*

Pour démontrer la proposition, on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.2.5 *Soit X un schéma localement noethérien. Supposons que pour tout sous-schéma intègre Y de X , l'ensemble $\text{Reg}(X)$ contienne un ouvert non vide. Alors $\text{Reg}(X)$ est ouvert.*

Démonstration du lemme 1.2.5 (cf. [10], 8.2.37) Puisque la propriété est locale, on peut supposer X noethérien. Soit $x \in \text{Reg}(X)$. Alors $\mathcal{O}_{X,x}$ (noethérien local) est de dimension finie $d \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un ouvert U de X tel que $U \cap \overline{\{x\}} \subseteq \text{Reg}(X)$. Quitte à réduire X , on peut supposer $X = \text{Spec}(B)$ affine. Notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de B correspondant à x . Par choix de x , il existe $b_1, \dots, b_d \in \mathfrak{p}$ tels que

$$\mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}} = b_1 B_{\mathfrak{p}} + \dots + b_d B_{\mathfrak{p}}.$$

Puisque $\mathfrak{p}$ est fini sur B , il existe $s \in B \setminus \mathfrak{p}$ tel que

$$s \mathfrak{p} \in b_1 B + \dots + b_d B.$$

Donc, quitte à réduire X à l'ouvert principal $D(s)$, on peut supposer que $\mathfrak{p}$ est engendré par d éléments. Posons alors $Y = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{x\}} \subseteq X$. Par hypothèse, il existe un ouvert non vide U de X tel que $U \cap Y \subseteq \text{Reg}(Y)$, et alors nécessairement $x \in U \cap Y$. Soit $y \in U \cap Y$. Notons $\mathfrak{p}_y$ l'idéal premier de B correspondant à y , et posons $A = \mathcal{O}_{X,y}$ et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} A$. Alors

- $A_{\mathfrak{q}}$ est régulier de dimension d ($A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,x}$, puisque $\mathfrak{p}_y \supseteq \mathfrak{p}$ implique $(B_{\mathfrak{p}_y})_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}_y}} \simeq B_{\mathfrak{p}}$);
- $\mathfrak{q}$ est engendré par d éléments (puisque $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}_y}$);
- $A/\mathfrak{q}$ est régulier (puisque $A/\mathfrak{q} = (B/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}_y(B/\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{Y,y}$).

Par conséquent, A est régulier. En effet, soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de A . Alors $\mathfrak{n}/\mathfrak{q}$ est engendré par $\dim(A/\mathfrak{q})$ éléments, et donc $\mathfrak{n}$ est engendré par

$$\dim(A_{\mathfrak{q}}) + \dim(A/\mathfrak{q}) \quad (\leq \dim(A))$$

éléments. Donc $y \in \text{Reg}(X)$, et finalement $U \cap \overline{\{x\}} \subseteq \text{Reg}(X)$.

Soit maintenant F l'adhérence de $\text{Sing}(X)$. Soit ξ un point générique de F . Supposons que ξ soit un point régulier de X . Par ce qui précède, il existerait un voisinage ouvert V de ξ dans X tel que $V \cap \{\xi\} \subseteq \text{Reg}(X)$. Mais alors $\text{Sing}(X)$ et donc F seraient contenus dans le fermé $X \setminus V$, et $\xi \in F$ ne serait pas dans V . Absurde. Donc $\xi \in \text{Sing}(X)$. Soit alors x une spécialisation de ξ . L'anneau $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est un localisé de $\mathcal{O}_{X,x}$, donc ce dernier ne peut pas être régulier. Autrement dit, $x \in \text{Sing}(X)$, puis $\overline{\{\xi\}} \subseteq \text{Sing}(X)$. Conclusion $\text{Sing}(X) = F$ est fermé. $\square$

Démonstration de la proposition 1.2.3 (cf. [10], 8.2.38) Commençons par remarquer que, sous les hypothèses de la proposition, les fibres de $X \rightarrow S$ sont équidimensionnelles de dimension 1. En effet, d'abord $\mathcal{O}_S(S)$ est ici un anneau de valuation discrète, donc S n'a que deux points, le point générique η et le point fermé qu'on notera s . En particulier, η est un point ouvert, $X_{\eta} \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte et $X_s \hookrightarrow X$ une immersion fermée. Par platitude de $X \rightarrow S$, on a :

$$\forall x \in X_s \quad \dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{X_s,x} + \dim \mathcal{O}_{S,s}, \quad (1.1)$$

et on sait par 1.0.3 que X_{η} et X_s sont équidimensionnelles de même dimension d . Par (1), $d \neq 2$ (sinon, en prenant un point x de codimension 2 dans X_s , on obtiendrait que X est de dimension au moins 3), et $d \neq 0$ sinon X n'aurait que des points de codimension au plus 1. D'où $d = 1$.

Montrons maintenant que $\text{Reg}(X)$ contient un ouvert non vide. Pour cela, considérons la fibre générique X_{η} . Par ce qui précède, c'est une courbe sur $K(S)$, ouverte dans X intègre : c'est donc une courbe intègre sur un corps. Par 1.1.4, $\text{Reg}(X_{\eta})$ est un ouvert non vide de X_{η} . Il en résulte que $\text{Reg}(X_{\eta})$ est un ouvert non vide de X contenu dans $\text{Reg}(X)$.

Ensuite, soit Y un sous-schéma fermé intègre de X de dimension 1. Supposons Y contenu dans la fibre fermée X_s . Alors Y est une courbe intègre sur le corps $k(s)$, et donc $\text{Reg}(Y)$ est un ouvert non vide de Y (toujours par 1.1.4). Sinon, Y rencontre la fibre générique de X . Soit $\xi \in Y_{\eta} = Y \cap X_{\eta}$. Le point ξ , contenu dans la fibre ouverte X_{η} , est de codimension 0 ou 1 dans X . Puisqu'il ne peut pas être le point générique de X , c'est nécessairement

celui de Y , et $\mathcal{O}_{Y,\xi}$ est le corps des fonctions de Y . Ainsi l'ouvert Y_η de Y est un point régulier de Y .

Enfin si Y est un sous-schéma fermé intègre de dimension 0, c'est le spectre d'un corps (puisque son point générique est fermé), donc en particulier c'est un schéma régulier.

D'après le lemme précédent, il en résulte que $\text{Reg}(X)$ est ouvert. $\square$

Fixons maintenant un anneau de valuation discrète R , d'uniformisante t , de complété $\widehat{R}$. Notons aussi K le corps des fractions de R et $\widehat{K}$ celui de $\widehat{R}$. Pour étudier sous quelles conditions le résultat de Lipman « descend » de $\widehat{R}$ à R , nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 1.2.6 *Soit Y un R -schéma plat localement de type fini. Considérons l'éclatement $f : W \rightarrow \widehat{Y} := Y_{\widehat{R}}$ le long d'un idéal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{Y}}$, avec $V(\mathcal{I}) \subseteq V(t\mathcal{O}_{\widehat{Y}})$. Alors il existe un éclatement $g : X \rightarrow Y$ le long d'un idéal $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{O}_Y$, avec $V(\mathcal{I}_0) \subseteq V(t\mathcal{O}_Y)$, tel que f est obtenu à partir de g par le changement de base $\text{Spec}(\widehat{R}) \rightarrow \text{Spec}(R)$. Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & \widehat{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

où f est sur $\widehat{R}$, g sur R et π est la projection canonique.

Démonstration (cf. [10], 8.3.48) On a $\pi_* \mathcal{O}_{\widehat{Y}} = \mathcal{O}_Y \otimes_R \widehat{R}$, l'unique faisceau quasi-cohérent sur Y égal à $\mathcal{O}_Y(U) \otimes_R \widehat{R}$ sur chaque ouvert affine U de Y . Puisque Y est plat sur R , le morphisme canonique $\mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\widehat{Y}}$ est donc injectif. On peut ainsi considérer le faisceau d'idéaux quasi-cohérent sur Y : $\mathcal{I}_0 := \mathcal{O}_Y \cap \pi_* \mathcal{I}$. Maintenant, l'hypothèse $V(\mathcal{I}) \subseteq V(t\mathcal{O}_{\widehat{Y}})$ montre que localement, il existe $n \geq 1$ tel que $t^n \mathcal{O}_{\widehat{Y}} \subseteq \mathcal{I}$. On en tire que $V(\mathcal{I}_0) \subseteq V(t\mathcal{O}_Y)$ et que $\mathcal{I} = \pi^* \mathcal{I}_0 =: \mathcal{I}_0 \mathcal{O}_{\widehat{Y}}$. Soit $g : X \rightarrow Y$ l'éclatement de Y le long de $\mathcal{I}_0$. Puisque $R \rightarrow \widehat{R}$ est plat, $\widehat{Y} \rightarrow Y$ l'est aussi, et par 1.1.11(ii) on obtient donc $W \simeq X \times_Y \widehat{Y}$. $\square$

On peut maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre, à savoir la caractérisation des surfaces fibrées, sur une base locale, à fibre générique régulière, qui admettent une désingularisation.

Théorème 1.2.7 *Soit $X \rightarrow \text{Spec}(R)$ une surface fibrée. Appelons p la projection canonique $\widehat{X} := X_{\widehat{R}} \rightarrow X$. On a alors les propriétés suivantes :*

(a) *Le morphisme p induit un isomorphisme entre les fibres spéciales de $\widehat{X}$ et de X .*

(b) Pour tout $x \in X_s$ (la fibre fermée de X), on a un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{X}, p^{-1}(x)} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$$

entre les anneaux locaux complétés.

(c) Supposons que X_K soit régulière et que X admette une désingularisation. Alors $X_{\widehat{K}} (= \widehat{X}_{\widehat{K}})$ est régulière.

(d) Supposons $X_{\widehat{K}}$ régulière. Alors X admet une désingularisation au sens fort. Plus précisément, X admet une suite de désingularisation qui est finie.

Par conséquent, si X_K est régulière, alors X admet une désingularisation si et seulement si $X_{\widehat{K}}$ est régulière. De plus, si ces conditions sont vérifiées, X admet même une désingularisation $Z \rightarrow X$ au sens fort ; plus précisément, X admet une suite de désingularisation qui est finie. Enfin, $Z \rightarrow X$ est projectif.

Démonstration (cf. [10], 8.3.49) (a) L'anneau R et son complété $\widehat{R}$ ont tous les deux t pour uniformisante, et ont même corps résiduel. Par conséquent, les fibres fermées de $\widehat{X}$ et X s'identifient via p .

(b) Soit $x' = p^{-1}(x)$. Notons $\mathfrak{m}_x$ (resp. $\mathfrak{m}_{x'}$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ (resp. $\mathcal{O}_{\widehat{X},x'}$). Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\widehat{X} \times_{\text{Spec}(\widehat{R})} \text{Spec}(\widehat{R}/t^n \widehat{R}) = X \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R/t^n R)$$

puisque $\widehat{R}/t^n \widehat{R} = R/t^n R$. En particulier, on a l'égalité d'anneaux

$$\mathcal{O}_{\widehat{X},x'} / (t^n) = \mathcal{O}_{X,x} / (t^n),$$

et puisque $t \in \mathfrak{m}_x$ cela implique

$$(\mathcal{O}_{\widehat{X},x'} / (t^n)) / (\mathfrak{m}_{x'}^n / (t^n)) = (\mathcal{O}_{X,x} / (t^n)) / (\mathfrak{m}_x^n / (t^n))$$

c.-à-d.,

$$\mathcal{O}_{\widehat{X},x'} / \mathfrak{m}_{x'}^n = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x^n.$$

Pour $n = 1$, cela montre que $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{\widehat{X},x'} = \mathfrak{m}_{x'}$. En passant à la limite projective sur $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient bien l'isomorphisme (induit par p) annoncé.

(c) Soit $Z \rightarrow X$ une désingularisation. Par composition, $Z \rightarrow \text{Spec}(R)$ est propre, donc $\widehat{Z} := Z_{\widehat{R}} \rightarrow \text{Spec}(\widehat{R})$ l'est aussi par changement de base. Soit $z \in Z_{\widehat{K}}$. L'image de $\overline{\{z\}}$ dans $\text{Spec}(\widehat{R})$ ne peut pas être égale au point ouvert, c.-à-d. $\overline{\{z\}}$ rencontre la fibre fermée $\widehat{Z}_s$ de $\widehat{Z}$. Soit $z_s \in \overline{\{z\}} \cap \widehat{Z}_s$. Par (b), on a

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{Z}, z_s} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{Z, p(z_s)}.$$

Or un anneau (local noethérien) est régulier si et seulement si son complété l'est. Il en résulte que $\mathcal{O}_{\widehat{Z}, z_s}$ est régulier. Puisque $\mathcal{O}_{\widehat{Z}, z}$ est un localisé de ce dernier, il est lui aussi régulier. Mais $Z_{\widehat{K}} \hookrightarrow \widehat{Z}$ est une immersion ouverte, donc $\mathcal{O}_{Z_{\widehat{K}}, z} = \mathcal{O}_{\widehat{Z}, z}$ est régulier. Par l'arbitraire sur z , $Z_{\widehat{K}}$ est donc régulière.

D'autre part, $Z \rightarrow X$ induit un isomorphisme $Z_K \simeq X_K$ entre les fibres génériques. En effet, la désingularisation $Z \rightarrow X$ du schéma intègre X est birationnelle, donc Z est irréductible, puis intègre. Par composition, Z domine S c.-à-d., Z_K est un sous-schéma ouvert non vide de Z , donc est intègre. Le morphisme $Z_K \rightarrow X_K$ est donc birationnel. Par conséquent $Z_K \rightarrow X_K$ est un morphisme birationnel et propre entre deux courbes propres sur K . Il est donc fini. Puisque Z_K est régulière et donc normale, $Z_K \rightarrow X_K$ n'est autre que le morphisme de normalisation de X_K (cf. 1.1.2). Mais X_K est régulière par hypothèse, c'est donc un isomorphisme. D'où finalement

$$X_{\widehat{K}} = X_K \times_K \widehat{K} = Z_K \times_K \widehat{K} = Z_{\widehat{K}}$$

est régulière.

(d) Montrons que $\widehat{X}$ remplit les hypothèses de 1.2.2. Soit U un ouvert affine de X . On a

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_R \widehat{R} \subseteq K(X) \otimes_R \widehat{R} = K(X) \otimes_K K \otimes_R \widehat{R} = K(X) \otimes_K \widehat{K}.$$

Mais $X_{\widehat{K}}$ qui est régulière par hypothèse, est réduite, donc le dernier terme est réduit. Puisque $\widehat{X}$ est recouvert par les $\text{Spec}(\mathcal{O}_X(U) \otimes_R \widehat{R})$, $\widehat{X}$ est donc réduit. De plus, $\widehat{X}$ est de dimension 2. En effet, la fibre fermée est de dimension 1 par (a), donc par platitude, les points fermés de cette fibre sont de codimension 2 dans X . La fibre ouverte $X_{\widehat{K}} = X_K \times_K \widehat{K}$ est de dimension égale à celle de X_K c.-à-d., égale à 1. Ainsi $\widehat{X}$ est bien de dimension finie égale à 2. Et enfin $\widehat{X}$ est de type fini sur $\widehat{R}$ puisque X l'est sur R .

Le schéma $\widehat{X}$ admet donc une suite de désingularisation finie. Puisque la fibre ouverte de $\widehat{X}$ est régulière par hypothèse, donc normale, ses points sont normaux dans $\widehat{X}$, et par conséquent le morphisme de normalisation $\widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}$ est un isomorphisme au-dessus de $X_{\widehat{K}} = \widehat{X} \setminus V(t\mathcal{O}_{\widehat{X}})$. D'après 1.1.12, le morphisme $\widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}$ est donc l'éclatement de $\widehat{X}$ le long d'un sous-schéma fermé dont le support est contenu dans $V(t\mathcal{O}_{\widehat{X}})$. Le lemme 1.2.6 montre alors que ce morphisme provient par le changement de base $R \rightarrow \widehat{R}$ d'un éclatement $f : X_1 \rightarrow X$ de X le long d'un sous-schéma fermé à support dans $V(t\mathcal{O}_X)$. Le lieu exceptionnel de f est ainsi un sous-ensemble de $f^{-1}(V(t\mathcal{O}_X))$ c.-à-d., de la fibre fermée de X_1 . En particulier f induit un isomorphisme entre les fibres génériques de X_1 et de X . D'après (a), le morphisme induit par f entre les fibres fermées est quasi-fini puisque $\widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}$ l'est. Au total, f est quasi-fini. D'autre part, f est projectif (1.1.10). Donc f est fini. Mais maintenant, $\widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}$ est fidèlement plat (puisque $R \rightarrow \widehat{R}$ l'est), et $\widehat{X}_1$ est normal, d'où X_1 est normal. En conclusion (cf. 1.1.2), l'éclatement f est le morphisme (fini) de normalisation de X .

Passons au lieu singulier de X_1 . C'est un fermé d'après 1.2.3, et il est de cardinal fini puisqu'il ne contient aucun point de codimension 1 (X_1 étant normal). Il est donc contenu dans la fibre fermée de X_1 (propre sur R), et

par (b) son image inverse dans $\widehat{X}_1$ est donc $\text{Sing}(\widehat{X}_1)$. Mieux, munissons les lieux singuliers de leur structure de sous-schéma fermé réduit. $\text{Sing}(X_1)$ est alors un sous-schéma fermé de la fibre fermée de X_1 , donc par (b) on a un isomorphisme de schémas

$$\text{Sing}(X_1) = \text{Sing}(X_1) \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(\widehat{R}). \quad (\dagger)$$

Par unicité de la structure réduite d'un sous-schéma fermé, ce schéma coïncide avec $\text{Sing}(\widehat{X}_1)$.

Considérons maintenant l'éclatement $\widetilde{X}_1 \rightarrow \widehat{X}_1$ le long de $\text{Sing}(\widehat{X}_1)$. Par 1.2.6, celui-ci provient d'un éclatement $\widetilde{X}_1 \rightarrow X_1$ sur R , dont le centre est alors $\text{Sing}(X_1)$ d'après $(\dagger)$. On regarde ensuite le morphisme de normalisation $\widehat{X}_2 \rightarrow \widetilde{X}_1$, auquel on peut appliquer le même raisonnement que pour $\widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}$, et ainsi de suite. En conclusion, X admet une suite de désingularisation, et celle de $\widehat{X}$ s'en déduit par le changement de base $R \rightarrow \widehat{R}$. De plus

$$\text{Sing}(X_n) = \text{Sing}(\widehat{X}_n)$$

pour tout $n \geq 1$, donc la suite de X termine dès que celle de $\widehat{X}$ termine.

Conclusion : par (c) et (d), on obtient bien la condition nécessaire et suffisante de l'énoncé, et que si celle-ci est vérifiée, on peut même trouver une suite de désingularisation finie de X , et donc une désingularisation $Z \rightarrow X$ au sens fort. Enfin, un tel morphisme propre $Z \rightarrow X$ est en fait projectif. En effet, S étant affine, la normalisation finie $X_1 \rightarrow X$ est projective par 1.1.3. Et pour $n \geq 1$, le morphisme $X_{n+1} \rightarrow X_n$ se décompose en

$$X_{n+1} \rightarrow \widetilde{X}_n \rightarrow X_n,$$

où la première flèche est projective par le même argument, et la seconde l'est aussi par 1.1.10. Finalement, par composition, la désingularisation $Z \rightarrow X$ est bien projective. $\square$

Corollaire 1.2.8 *Soit S un schéma de Dedekind local, et soit $\pi : X \rightarrow S$ une surface fibrée de fibre générique lisse. Alors X admet une suite de désingularisation qui est finie, et donc est désingularisable au sens fort.*

Démonstration (cf. [10], 8.3.51) En effet, la fibre générique X_K étant lisse, $X_L := X_K \times_K L$ est régulière pour toute extension de corps L/K , donc en particulier pour $\widehat{K}/K$. $\square$

En conclusion, on a obtenu le théorème suivant concernant les modèles des courbes :

Théorème 1.2.9 [Existence d'un modèle régulier] *Soit S un schéma de Dedekind local, de corps de fonctions K . Soit C une courbe connexe, propre et lisse sur K . Alors il existe un modèle régulier, intègre et projectif de C sur S .*

Démonstration On a vu en début de chapitre comment construire une surface fibrée $X \rightarrow S$ de fibre générique isomorphe à C . D'après le corollaire précédent, il existe une désingularisation $Z \rightarrow X$. Par définition, Z est un schéma régulier. Le morphisme $Z \rightarrow X$ est birationnel et X est intègre, donc Z est intègre. Le morphisme $Z \rightarrow X$ est propre et birationnel, donc Z est de même dimension que X à savoir 2. De plus, le théorème 1.2.7 assure que Z est projectif sur X , et donc sur S par composition. Enfin, $Z \rightarrow X$ est dominant (car birationnel) et donc par composition Z domine S , ce qui revient à dire ici que Z est plat sur S (cf.1.0.2). Ainsi, Z est une surface régulière fibrée sur S . De plus, le morphisme birationnel $Z_K \rightarrow X_K$ induit par la désingularisation est un isomorphisme de courbes intègres sur K , puisque $X_K \simeq C$ est normale. La surface fibrée $Z \rightarrow S$ est donc un modèle sur S de la courbe C , qui satisfait aux conditions « régulier, intègre et projectif » (cf. introduction).□

Pour terminer ce chapitre sur les modèles réguliers des courbes, signalons le fait suivant. Soit C une courbe comme dans le théorème ci-dessus, et supposons de plus que **son genre arithmétique soit** ≥ 1 . Alors, dans la classe d'équivalence birationnelle des modèles réguliers de C sur S , il existe un représentant privilégié, appelé le *modèle régulier minimal* de C sur S . C'est l'unique modèle régulier $\mathcal{C}$ de C vérifiant la propriété suivante :

toute application birationnelle $X \dashrightarrow \mathcal{C}$ de S -modèles réguliers de C est un morphisme birationnel.

Le modèle $\mathcal{C}$ de C est alors le seul *modèle régulier relativement minimal* de C c.-à-d., vérifiant la propriété suivante :

tout morphisme birationnel $\mathcal{C} \rightarrow X$ de S -modèles réguliers de C est un isomorphisme.

Pour une preuve de l'existence du modèle régulier minimal, cf. [10], 10.1.8. L'existence d'un tel modèle sera utilisée en 2.1.5 pour décrire le modèle de Néron d'une courbe elliptique.

Chapitre 2

Modèles de Néron des variétés abéliennes

On s'intéresse maintenant aux modèles des variétés abéliennes. Après avoir introduit la notion de modèle de Néron d'une variété abélienne, on se concentre sur le cas où cette variété est une jacobienne, définie sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète. Le résultat principal est le théorème de Raynaud 2.2.32 qui, sous certaines hypothèses, donne une construction du modèle de Néron de la jacobienne d'une courbe à partir d'un modèle régulier quelconque de cette courbe. L'article original est [17]. Suivant l'exposition de [2] chap. 9, cette construction nécessite deux ingrédients. D'une part, l'étude du foncteur de Picard relatif, directement liée à celle du faisceau $\mathbb{G}_m$ (notamment de sa cohomologie); nous nous contenterons de quelques définitions et résultats. D'autre part, la théorie de l'intersection sur une surface fibrée régulière, telle que celle développée dans [10], sect. 9.1.

2.1 Le cas général

Soit, comme précédemment, un schéma de Dedekind S de corps des fonctions K . Soit A_K une variété abélienne sur K c.-à-d., un K -schéma en groupes de type fini, propre, lisse et connexe.

Définition 2.1.1 [Schéma abélien] *Un schéma abélien sur S est un S -schéma en groupes de type fini, propre et lisse, à fibres connexes.*

Idéalement, on voudrait étendre A_K en un schéma abélien $A \rightarrow S$. Ceci est impossible en général.

Définition 2.1.2 [Bonne (resp. Mauvaise) réduction] *Soit $s \in S$ un point fermé. On dit que la variété abélienne A_K a bonne réduction en s s'il existe un schéma abélien $A_{(s)}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ qui est un modèle de A_K . Dans le cas contraire, on dit que A_K a mauvaise réduction en s .*

De façon tautologique, une variété abélienne ne peut pas s'étendre en un schéma abélien sur S dès qu'elle a mauvaise réduction en un point de S . De façon plus pertinente, considérons par exemple le cas où la base est locale et A_K est une courbe elliptique E_K . Parmi les équations de Weierstrass de E_K à coefficients dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_S(S)$, choisissons-en une dont le discriminant est de valuation minimale ν . On peut alors montrer que la variété abélienne E_K a bonne réduction (au point fermé de S) si et seulement si $\nu = 0$ (cf. [10], 10.1.23 et [2], 1.4/2).

Ainsi, pour qu'une variété abélienne quelconque sur K possède un modèle sur S , il faut demander à ce modèle des propriétés plus faibles que celles vérifiées par un schéma abélien. En particulier, *on ne demande plus que le modèle soit propre*. Et par conséquent, un tel modèle est intéressant à introduire pour des variétés plus générales que les variétés abéliennes.

Définition 2.1.3 [Modèle de Néron de type fini] *Soit S un schéma de Dedekind de corps des fonctions K . Soit X_K un schéma de type fini, lisse et séparé sur K . Un modèle de Néron de X_K est un modèle $X \rightarrow S$ de type fini, lisse et séparé sur S , vérifiant la propriété universelle suivante :*

Pour tout S -schéma lisse Y , l'application canonique

$$\mathrm{Mor}_S(Y, X) \rightarrow \mathrm{Mor}_K(Y_K, X_K)$$

est bijective.

La propriété universelle vérifiée par un modèle de Néron, appelée la *propriété de Néron*, implique qu'un tel modèle est unique à isomorphisme près. De plus, elle entraîne que si le schéma de départ est un schéma en groupes, sa loi se prolonge à son modèle de Néron.

Dans le cas des variétés abéliennes, on peut montrer que la notion de modèle de Néron généralise bien celle de schéma abélien, au sens où un schéma abélien est toujours le modèle de Néron de sa fibre générique (cf. [2], 1.2/8). Mais maintenant, on a le résultat crucial suivant, qui montre que la notion de modèle de Néron permet de passer outre le problème de la mauvaise réduction (cf. [2], 1.4/3).

Théorème 2.1.4 [Existence du modèle de Néron] *Soit A_K une variété abélienne sur K . Alors A_K possède un modèle de Néron $A \rightarrow S$. De plus, soit S' le complémentaire dans S de l'ensemble des points de mauvaise réduction. Alors S' est un ouvert dense de S et $A \times_S S'$ est un schéma abélien sur S' .*

Dans le cas où la variété abélienne est une courbe elliptique E , on peut décrire son modèle de Néron à partir de son modèle régulier minimal $\mathcal{E}$, introduit à la fin du chapitre 1 (cf. [2] 1.5/1 ou [10] 10.2.14).

Proposition 2.1.5 *Soit E_K une courbe elliptique sur K . Soit $\mathcal{E}$ son modèle régulier minimal. Alors le modèle de Néron de E_K est réalisé par le sous-schéma ouvert de $\mathcal{E}$ formé des points lisses.*

Lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète de corps résiduel algébriquement clos k , Kodaira a classifié toutes les fibrées spéciales $\mathcal{E}_k$ que l'on pouvait obtenir. A chaque cas est associé son type de Kodaira

$$t \in \{I_n, n \geq 0, I_n^*, n \geq 0, II, II^*, III, III^*, IV, IV^*\}$$

(cf. par exemple [10], sous-section 10.2.1). La fibre spéciale du modèle de Néron de E_K est alors obtenue à partir de $\mathcal{E}_k$ en retirant son point singulier dans les cas I_1 et II , et dans les autres cas, en retirant ses composantes irréductibles de multiplicité > 1 (cf 2.2.11), ainsi que les points d'intersection de deux composantes irréductibles. Cette description sera utilisée en 3.2.3.

Dans le cas où la variété abélienne est la jacobienne J_K d'une courbe X_K , on peut donner une construction du modèle de Néron différente de la construction générale, à partir d'un modèle régulier (pas nécessairement minimal) de X_K ; ceci fera l'objet de la section suivante.

Par la suite (cf. 3.2.1), il nous faudra considérer des extensions commutatives de variétés abéliennes par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,K}$, et nous travaillerons avec leurs modèles de Néron. Or, $\mathbb{G}_{m,K}$ et les extensions en question n'ont pas de modèles de Néron au sens où nous les avons définis ci-dessus; plus précisément, elles ne possèdent pas de modèles de Néron de *type fini*.

Définition 2.1.6 [Modèle de Néron ltf] *Soit S un schéma de Dedekind de corps des fonctions K . Soit X_K un schéma localement de type fini (= :ltf), lisse et séparé sur K . Un modèle de Néron de X_K est un modèle ltf $X \rightarrow S$, lisse et séparé sur S , vérifiant la propriété universelle de Néron.*

La construction du modèle de Néron de $\mathbb{G}_{m,K}$ est donnée dans [2] 10.1/5. Nous allons la détailler dans la cas d'une base locale. Soit R un anneau de valuation discrète d'uniformisante π , de corps des fractions K , de corps résiduel k , et posons $S := \text{Spec}(R)$. Nous aurons besoin du résultat suivant (cf. [2] 10.1/2).

Proposition 2.1.7 *Soit R un anneau de valuation discrète, et G un schéma en groupes localement de type fini, lisse et séparé sur R . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *G est le modèle de Néron ltf de sa fibre générique.*
- (b) *Soit $R \rightarrow R'$ une extension locale d'anneaux de valuation discrète, avec R' essentiellement lisse sur R . Alors, si K' est le corps des fractions de R' , l'application canonique $G(R') \rightarrow G(K')$ est surjective.*

L'hypothèse « R' essentiellement lisse sur R » signifie que R' est un anneau local d'un R -schéma lisse. Cela équivaut à dire qu'une uniformisante de R a pour image une uniformisante de R' via $R \rightarrow R'$, que l'extension résiduelle

est séparable, et qu'on a l'égalité des degrés de transcendance $\text{degtr}_K K' = \text{degtr}_k k'$ (où k' est le corps résiduel de R').

Passons à la construction.

Considérons la famille de S -schémas en groupes

$$\{G^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

où chaque G^i est une copie du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,S}$. Pour tout $i \neq j$, on considère l'isomorphisme

$$\begin{aligned} G_K^j &\xrightarrow{\sim} G_K^i : f_{ij} \\ K[T_j, T_j^{-1}] &\xrightarrow{\sim} K[T_i, T_i^{-1}] \\ T_j &\mapsto \pi^{i-j} T_i \end{aligned}$$

et pour tout i ,

$$f_{ii} := \text{Id} : G^i = G^i.$$

Ces isomorphismes sont des données de recollement puisque pour tout i, j, k , on a

$$\pi^{k-i} = \pi^{k-j} \pi^{j-i}.$$

On appelle G le S -schéma obtenu par recollement le long des fibres génériques des G^i via les f_{ij} . On munit G d'une structure de S -schéma en groupes de la façon suivante. Pour tout i, j , on considère

$$\begin{aligned} G^{i+j} &\leftarrow G^i \times_S G^j : m_{ij} \\ R[T_{i+j}, T_{i+j}^{-1}] &\rightarrow R[T_i, T_i^{-1}] \otimes_R R[T_j, T_j^{-1}] \\ T_{i+j} &\mapsto T_i \otimes T_j \end{aligned}$$

et on vérifie facilement que ces morphismes se recollent en un morphisme

$$m : G \times_S G \rightarrow G.$$

De plus, on définit $\epsilon : S \rightarrow G$ comme le morphisme composé de la section unité de G^0 suivi de l'immersion ouverte $G^0 \hookrightarrow G$. Enfin, on définit un morphisme $\iota : G \rightarrow G$ par recollement des morphismes d'inversion des G^i . On vérifie alors que (G, m, ϵ, ι) est un S -schéma en groupes. Il est localement de type fini sur R car recouvert par les images des G^i dans G .

La fibre générique de G est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,K}$, et sa fibre spéciale est isomorphe à l'union disjointe sur $\mathbb{Z}$ de copies de $\mathbb{G}_{m,k}^1$. En particulier, G est lisse sur S . La composante neutre de G (cf. 2.2.2) est la réunion des composantes neutres de G_K et de G_k , c'est donc G^0 .

Montrons que G est séparé sur S , ce qui équivaut à dire que ϵ est une immersion fermée. Par construction, pour tout $s \in S$, le morphisme local

¹ donc G n'est pas de type fini sur R !

$\mathcal{O}_{G,\epsilon(s)} \rightarrow \mathcal{O}_{S,s}$ est surjectif, et ϵ est un homéomorphisme sur son image $\epsilon(S)$. Il reste à voir que celle-ci est fermée dans G . Pour cela, on regarde son image réciproque I par la projection canonique

$$\coprod_{i \in \mathbb{Z}} G_i \rightarrow G.$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $I^i := I \cap G^i$. L'ensemble I^0 est la section unité de G^0 , qui est fermée dans G^0 . Si $i \neq 0$, I^i est le point fermé de G^i correspondant à l'idéal maximal de $R[T_i, T_i^{-1}]$ engendré par $\pi^i T_i - 1$ si $i > 0$, et par $T_i - \pi^i$ si $i < 0$. L'ensemble I est donc fermé dans l'union disjointe des G^i c.-à-d., $\epsilon(S)$ est un fermé de G , et G est bien séparé sur S .

Vérifions maintenant que l'application naturelle $G(R) \rightarrow G(K)$ est surjective. Soit $p_K \in G(K) = G_K(K)$. Dans la carte de G_K donnée par G_K^0 , p_K est de la forme

$$\begin{aligned} G_K^0 &\leftarrow \text{Spec}(K) \\ K[T_0, T_0^{-1}] &\rightarrow K \\ T_0 &\mapsto u\pi^i \end{aligned}$$

pour un $u \in R^*$ et un $i \in \mathbb{Z}$. Alors, dans la carte G_K^i , il se lit par

$$\begin{aligned} G_K^i &\leftarrow \text{Spec}(K) \\ K[T_i, T_i^{-1}] &\rightarrow K \\ T_i &\mapsto u \end{aligned}$$

puisque l'identification $K[T_0, T_0^{-1}] \xrightarrow{\sim} K[T_i, T_i^{-1}]$ envoie T_0 sur $\pi^i T_i$. Le point p_K se prolonge donc en $p_R : \text{Spec}(R) \rightarrow G$, composé de

$$\begin{aligned} G_K^i &\leftarrow \text{Spec}(R) \\ R[T_i, T_i^{-1}] &\rightarrow R \\ T_i &\mapsto u \end{aligned}$$

suivi de l'immersion ouverte de G^i dans G . Soit maintenant une extension locale d'anneaux de valuation discrète $R \rightarrow R'$, telle que l'image de π dans R' soit une uniformisante, et montrons que la flèche $G(R') \rightarrow G(K')$ est surjective. Cette flèche s'identifie à $G_{R'}(R') \rightarrow G_{R'}(K')$, où $G_{R'}$ est le produit fibré $G \times_R R'$. Le schéma $G_{R'}$ est alors le recollement de copies de $\mathbb{G}_{m,R'}$ indexées par $\mathbb{Z}$, via des morphismes analogues aux f_{ij} , en remplaçant π par son image dans R' . Or cette dernière étant une uniformisante de R' , on est ramené au cas $R = R'$. Finalement, d'après 2.1.7, G est bien le modèle de Néron ltf de $\mathbb{G}_{m,K}$.

2.2 Le cas des jacobiniennes

2.2.1 Foncteur de Picard relatif

Soit X un schéma. Le groupe de Picard absolu de X est le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X . On le note $\text{Pic}(X)$ et on a un isomorphisme canonique $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. On veut traiter la situation relative d'un S -schéma.

Définition 2.2.1 [Foncteur de Picard relatif] *Soit X un S -schéma. Le foncteur de Picard relatif $\text{Pic}_{X/S}$ de X sur S est le faisceau fppf (=fidèlement plat et de présentation finie) associé au préfaisceau*

$$\begin{aligned} (\text{Sch}/S)^\circ &\longrightarrow (\text{Ens}) \\ T &\longmapsto \text{Pic}(X \times_S T). \end{aligned}$$

On a donc $\text{Pic}_{X/S}(T) = H^0(T, R_{\text{fppf}}^1 f_T^* \mathbb{G}_m)$ pour tout S -schéma T , où $f_T : X_T \rightarrow T$ est induit par le changement de base $T \rightarrow S$.

Les deux cas qui vont nous intéresser sont les suivants :

1. $X_K \rightarrow \text{Spec}(K)$ est une courbe propre sur un corps K ,
2. $X \rightarrow \text{Spec}(R)$ est une surface fibrée régulière sur un anneau de valuation discrète R .

En particulier, nous allons étudier les *composantes neutres* des faisceaux de Picard associés (cf. [4], Exp. IV_A, 2.3, et Exp. VI_B, 3.1 et 3.4).

Définition 2.2.2 [Composante neutre d'un T -foncteur en groupes]

- Soient k un corps et G un k -schéma en groupes, localement de type fini. La composante connexe de l'élément neutre de G est un sous-schéma en groupes ouvert de G , que l'on note G^0 . Le schéma G^0 est de type fini sur k , géométriquement irréductible. On l'appelle la composante neutre de G .
- Soient T un schéma et G un T -foncteur en groupes, localement de type fini et à fibres représentables. On définit le sous-foncteur en groupes G^0 de G comme suit : pour tout T -schéma T' ,

$$G^0(T') := \{g \in G(T') \mid \forall t \in T', g_{k(t)} \in G_{k(t)}^0(k(t))\}.$$

On appelle G^0 la composante neutre de G .

Supposons de plus que G est un T -schéma. Soit $\underline{G}^0$ la réunion des composantes neutres des $G_{k(t)}$ pour t parcourant T . Si $\underline{G}^0$ est un ouvert de G , alors $\underline{G}^0$ représente G^0 .

Remarque 2.2.3 Avec les notations de la définition ci-dessus, une condition suffisante pour que $\underline{G}^0$ soit ouvert dans G est la suivante : T est localement noethérien et le morphisme structural localement de type fini $G \rightarrow T$ est lisse : cf. [6], 15.6.7.

Théorème 2.2.4 (Murre [13], Oort [16]) *Soit k un corps et Y un k -schéma propre. Alors $\text{Pic}_{Y/k}$ est un k -schéma en groupes, localement de type fini.*

Corollaire 2.2.5 [Jacobienne d'une courbe propre sur un corps] *Soit X_K une courbe propre sur un corps K . Alors $\text{Pic}_{X_K/K}$ est un K -schéma en groupes localement de type fini. Sa composante neutre $J_K := \text{Pic}_{X_K/K}^0$ est appelée la jacobienne de la courbe X_K .*

On a alors (cf. [2] 8.4/2 et 8.4/3) :

Théorème 2.2.6 *Soit X_K une courbe propre sur un corps K . Alors la jacobienne J_K de X_K est lisse. Si de plus, la courbe X_K est lisse, alors J_K est une variété abélienne.*

Le théorème de Murre montre aussi que la composante neutre $\text{Pic}_{X/S}^0$ est bien définie (i.e. les fibres de $\text{Pic}_{X/S}$ sont représentables) dans le cas d'une surface fibrée $X \rightarrow S$.

2.2.2 Intersection sur une surface fibrée régulière

Pour étudier les diviseurs sur une surface fibrée (qui est une courbe relative), commençons par les rappels utiles dans le cas des courbes projectives sur un corps.

Définition 2.2.7 [Degré d'un diviseur sur une courbe] *Soient X une courbe sur un corps k et D un diviseur de Cartier sur X . Le degré de D est l'entier relatif*

$$\deg_k D := \sum_{\substack{x \in X \\ x \text{ fermé}}} \text{mult}_x(D)[k(x) : k].$$

Pour définir le degré d'un faisceau inversible, de façon cohérente avec celui des diviseurs c.-à-d., compatible avec l'application qui à un diviseur de Cartier D associe le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$, on utilise le théorème de Riemann (cf. par exemple [10], 7.3.17) :

Théorème 2.2.8 (Riemann) *Soient X une courbe projective sur un corps k et D un diviseur de Cartier sur X . Alors on a la relation suivante entre les caractéristiques d'Euler de $\mathcal{O}_X(D)$ et de $\mathcal{O}_X$:*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \deg(D) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Définition 2.2.9 [Degré d'un faisceau inversible sur une courbe projective] *Soient X une courbe projective sur un corps k et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X . Le degré de $\mathcal{L}$ est l'entier relatif*

$$\deg_k \mathcal{L} := \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_X).$$

Si D est un diviseur de Cartier sur une k -courbe projective X , alors

$$\deg_k(D) = \deg_k(\mathcal{O}_X(D)).$$

Lorsque cela ne posera pas d'ambiguïté, on notera $\deg$ au lieu de $\deg_k$.

Nous allons comparer le degré d'un faisceau inversible aux degrés de ses restrictions aux composantes irréductibles de la courbe. Pour cela, on introduit une première notion de multiplicité d'une composante irréductible d'une courbe ².

Notation 2.2.10 Soient X une courbe projective sur un corps k et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X . Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ les composantes irréductibles de X , chacune munie de son unique structure de sous-schéma réduit (donc intègre) de X . Pour tout $i = 1, \dots, v$, on pose $\deg_i(\mathcal{L}) := \deg(\mathcal{L}|_{\Gamma_i})$; c'est le *degré partiel de $\mathcal{L}$ sur Γ_i* .

Définition 2.2.11 [Multiplicité d'une composante irréductible dans une courbe] Soit X une courbe sur un corps k . Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ ses composantes irréductibles, de points génériques respectifs $\xi_1, \dots, \xi_v$. Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X, \xi_1}, \dots, \mathcal{O}_{X, \xi_v}$ sont noethériens de dimension nulle, donc artiniens, et par conséquent sont de longueur finie. Pour $i \in \{1, \dots, v\}$, la multiplicité de la composante Γ_i dans X est définie par

$$d_i := \text{long}(\mathcal{O}_{X, \xi_i}).$$

En particulier, une composante irréductible est de multiplicité 1 dans la courbe si et seulement si l'anneau local de X au point générique de la composante est réduit (et alors c'est un corps).

Exemple 2.2.12 Soit p un nombre premier. Soit $k = \mathbb{F}_p(t)^{\text{sep}}$ la clôture séparable du corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{F}_p$. Considérons la k -courbe projective plane X_k définie ³ par le polynôme homogène

$$F_k(x, y, z) = (x^p + ty^p) \prod_{i=0}^{p-1} (x - iy).$$

Les composantes irréductibles de X_k sont $\Gamma := V_+(x^p + ty^p)$ de point générique

$$\xi = (x^p + ty^p) \in \text{Proj} \left(\frac{k[x, y, z]}{F_k(x, y, z)} \right)$$

²Bien qu'on ne s'intéresse ici qu'au cas des courbes, les diverses notions de multiplicité que l'on introduira sont définies de façon tout à fait analogue pour des variétés algébriques de dimension quelconque.

³Pour cet exemple, on pourrait très bien se placer sur $\mathbb{F}_p(t)$. Cependant, nous utiliserons cette courbe dans la sous-section 3.2.4, où là il sera préférable de la voir comme une courbe sur le corps *séparablement clos* $\mathbb{F}_p(t)^{\text{sep}}$.

et les $\Gamma_i := V_+(x - iy)$ pour $i = 0, \dots, p - 1$ de points génériques respectifs

$$\xi_i = (x - iy) \in \text{Proj} \left(\frac{k[x, y, z]}{F_k(x, y, z)} \right).$$

Tous ces points génériques sont contenus dans l'ouvert affine

$$D_+(z) = \text{Spec} \left(\frac{k[x, y]}{F_k(x, y, 1)} \right).$$

Puisque les polynômes définissant les composantes irréductibles sont deux à deux premiers entre eux, on a donc

$$\mathcal{O}_{X, \xi} = \frac{k[x, y]_{(x^p + ty^p)}}{(x^p + ty^p)}$$

et

$$\mathcal{O}_{X, \xi_i} = \frac{k[x, y]_{(x - iy)}}{(x - iy)}$$

pour tout $i = 0, \dots, p - 1$, qui sont tous des corps. Les $p + 1$ composantes irréductibles de X_k sont donc de multiplicité 1 dans X_k .

On a la proposition suivante, qui relie le degré d'un faisceau inversible à ses degrés partiels (cf. par exemple [10], 7.5.7).

Proposition 2.2.13 *Soit X une courbe projective sur un corps k . Soient $X_1, \dots, X_v$ ses composantes irréductibles, de points génériques respectifs $\xi_1, \dots, \xi_v$ et de multiplicités respectives $d_1, \dots, d_v$. On munit chaque X_i de son unique structure de sous-schéma fermé réduit de X . Alors, pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X , on a*

$$\deg(\mathcal{L}) = \sum_{1 \leq i \leq v} d_i \deg_i(\mathcal{L}).$$

Les notions de degré et de degré partiel permettent entre autres de décrire les faisceaux inversibles sur une courbe projective dont les classes d'isomorphisme définissent des points rationnels de la jacobienne de la courbe (cf. [2] 9.3/13).

Théorème 2.2.14 *Soit X_k une courbe projective sur un corps k , de jacobienne J_k . Si k est algébriquement clos et X_k irréductible, alors $J_k(k)$ est formé des classes de faisceaux inversibles sur X de degré zéro. Plus généralement, soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k . Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X_k . Alors l'image de la classe de $\mathcal{L}$ par l'application canonique*

$$\text{Pic}(X_k) \rightarrow \text{Pic}_{X_k/k}(k)$$

est dans $J_k(k)$ si et seulement si le degré partiel de $\mathcal{L}$ sur chaque composante irréductible de $X_{\bar{k}}$ est nul.

D'autres multiplicités peuvent être attachées aux composantes irréductibles d'une courbe.

Définition 2.2.15 [Multiplicités géométriques d'une composante irréductible dans une courbe] Soit X une courbe sur un corps k . Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ ses composantes irréductibles, et $\xi_1, \dots, \xi_v$ leurs points génériques respectifs. Fixons une clôture algébrique $\bar{k}$ de k , et pour chaque $i \in \{1, \dots, v\}$ choisissons un point $\bar{\xi}_i$ de $X_{\bar{k}}$ au-dessus de ξ_i .

La multiplicité géométrique de la composante Γ_i dans X est la longueur δ_i de l'anneau artinien local $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i}$:

$$\delta_i := \text{long}(\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i}).$$

La multiplicité géométrique de la composante Γ_i (dans Γ_i) est la longueur e_i de l'anneau artinien local $\mathcal{O}_{(\Gamma_i)_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i}$, où Γ_i est munie de sa structure de sous-schéma fermé réduit de X :

$$e_i := \text{long}(\mathcal{O}_{(\Gamma_i)_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i}).$$

On notera que les définitions des multiplicités géométriques sont indépendantes des choix des ξ_i , puisque si $\bar{\xi}_i$ et $\bar{\xi}_i'$ sont au-dessus de ξ_i , alors ils sont conjugués sous l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $X_{\bar{k}}$ (resp. $(\Gamma_i)_{\bar{k}}$).

Exemple 2.2.16 Reprenons la même courbe que dans l'exemple 2.2.12. La structure de sous-schéma fermé réduit de Γ est donnée par

$$\Gamma = \text{Proj} \left(\frac{k[x, y, z]}{(x^p + ty^p)} \right).$$

Sur $\bar{k}$, Γ est toujours irréductible, mais n'est plus réduite : en effet,

$$\Gamma_{\bar{k}} = \text{Proj} \left(\frac{\bar{k}[x, y, z]}{(x - \alpha y)^p} \right)$$

où α désigne la racine p -ième de $-t$ dans $\bar{k}$. En notant $\bar{\xi} = (x - \alpha y)$ le point générique de $\Gamma_{\bar{k}}$, on a alors

$$\mathcal{O}_{\Gamma_{\bar{k}}, \bar{\xi}} = \frac{\bar{k}[x, y]_{(x - \alpha y)}}{(x - \alpha y)^p}$$

qui est de longueur p , et Γ est donc de multiplicité géométrique p . Les autres composantes de X_k sont de multiplicité géométriques 1, puisque

$$\mathcal{O}_{(\Gamma_i)_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i} = \frac{\bar{k}[x, y]_{(x - iy)}}{(x - iy)}$$

est un corps. De plus, on a sur cet exemple $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}, \bar{\xi}} = \mathcal{O}_{\Gamma_{\bar{k}}, \bar{\xi}}$ et $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i} = \mathcal{O}_{(\Gamma_i)_{\bar{k}}, \bar{\xi}_i}$. Les multiplicités géométriques des composantes irréductibles dans la courbe X_k coïncident donc ici avec leurs propres multiplicités géométriques.

On peut vérifier sur cet exemple deux propriétés des multiplicités qui sont en fait toujours vraies. D'abord, la multiplicité géométrique d'une composante est toujours une puissance de la caractéristique du corps de base (dans l'exemple, on trouvait p ou 1). De plus, la multiplicité géométrique d'une composante dans la courbe est toujours égale au produit de sa multiplicité géométrique propre par sa multiplicité dans la courbe. En formules, cela donne le lemme suivant (cf. [2], 9.1/4).

Lemme 2.2.17 *En conservant les notations de 2.2.11 et 2.2.15, on a : pour tout $i = 1, \dots, v$*

- (i) e_i une puissance de la caractéristique de k , et $e_i = 1$ si k est parfait ;
- (ii) $\delta_i = e_i \cdot d_i$.

Concernant le lien entre degré partiel d'un faisceau inversible sur une composante, et multiplicité géométrique de cette composante, on a le résultat important suivant (cf. [2], 9.1/8).

Lemme 2.2.18 *Soit X une courbe projective sur un corps k . Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ ses composantes irréductibles, de multiplicités géométriques respectives $e_1, \dots, e_v$. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X . Alors pour tout $i = 1, \dots, v$, e_i divise le degré partiel $\deg_i(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ sur Γ_i .*

Passons maintenant à l'intersection sur une surface fibrée régulière. D'abord, en restreignant un faisceau inversible sur la surface aux fibres de celle-ci, on obtient des faisceaux inversibles sur des courbes. Or, sur une surface fibrée, la caractéristique d'Euler d'un faisceau cohérent restreint à une fibre ne dépend pas de cette fibre (cf. [10] 5.3.28). On peut donc bien définir le degré total d'un faisceau inversible sur une surface de la façon suivante.

Définition 2.2.19 [Degré total d'un faisceau inversible sur une surface fibrée] *Soient $X \rightarrow S$ une surface fibrée et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X . Notons η le point générique de S et soit s un point fermé de S . Le degré total de $\mathcal{L}$ est l'entier relatif*

$$\deg_S(\mathcal{L}) := \deg_{k(\eta)}(\mathcal{L}_\eta) = \deg_{k(s)}(\mathcal{L}_s).$$

Là encore, on omettra le S de $\deg_S$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Passons à la définition de l'intersection. Considérons d'abord le cas local (donc non relatif). Soit X un schéma noethérien connexe et régulier, de dimension 2. Notons :

- $\text{Div}(X)$ (resp. $\text{CaCl}(X)$) le groupe des diviseurs (resp. des classes de diviseurs) de Cartier sur X ,
- $Z^1(X)$ (resp. $\text{Cl}(X)$) le groupe des diviseurs (resp. des classes de diviseurs) de Weil sur X .

Si $D \in \text{Div}(X)$, on peut lui associer un faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ et un diviseur de Weil, encore noté D pour la raison suivante : sous nos hypothèses, les associations précédentes donnent lieu à des isomorphismes

$$\text{Pic}(X) \xleftarrow{\sim} \text{CaCl}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}(X).$$

De plus, si D est effectif, il définit un sous-schéma fermé de X , à savoir celui correspondant au faisceau d'idéaux $\mathcal{O}_X(-D) \subseteq \mathcal{O}_X$.

Soient D et E deux diviseurs effectifs (dont les schémas associés sont) sans composante commune. Soit $x \in X$ un point fermé. Au voisinage de x , l'intersection des supports de D et E est soit vide, soit égale à $\{x\}$. Dans le premier cas, l'un au moins des deux idéaux $\mathcal{O}_X(D)_x$ et $\mathcal{O}_X(E)_x$ est l'idéal unité, si bien que

$$\sqrt{\mathcal{O}_X(-D)_x + \mathcal{O}_X(-E)_x} = \mathcal{O}_{X,x}.$$

Dans le second cas, on a dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$:

$$V(\mathcal{O}_X(D)_x + \mathcal{O}_X(E)_x) = V(\mathcal{O}_X(D)_x) \cap V(\mathcal{O}_X(E)_x) = V(\mathfrak{m}_x),$$

où $\mathfrak{m}_x$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Autrement dit,

$$\mathfrak{m}_x \subseteq \sqrt{\mathcal{O}_X(D)_x + \mathcal{O}_X(E)_x}.$$

Par conséquent, l'anneau local noethérien

$$\mathcal{O}_{X,x} / (\mathcal{O}_X(-D)_x + \mathcal{O}_X(-E)_x)$$

est toujours artinien, et donc de longueur finie sur lui-même (ou encore comme $\mathcal{O}_{X,x}$ -module).

Définition 2.2.20 [Nombre d'intersection local] *Soient D et E deux diviseurs effectifs sans composante commune, et x un point fermé de X . Le nombre d'intersection (ou encore la multiplicité d'intersection) de D et E en x est l'entier naturel*

$$i_x(D, E) := \text{long}(\mathcal{O}_{X,x} / (\mathcal{O}_X(-D)_x + \mathcal{O}_X(-E)_x)).$$

Il est non nul si et seulement si x est dans $\text{Supp}(D) \cap \text{Supp}(E)$.

Si maintenant D et E sont deux diviseurs quelconques sans composante commune, on écrit $D = D_1 - D_2$ et $E = E_1 - E_2$ avec D_i et E_j effectifs et dans composante commune pour $i, j \in \{1, 2\}$, et on peut définir $i_x(D, E)$ par bilinéarité, pour tout point fermé $x \in X$. On vérifie en effet que l'entier obtenu ne dépend pas du choix des décompositions de D et E choisies.

Sur une surface fibrée, il y a deux types de diviseurs de Weil irréductibles : les diviseurs *horizontaux*, qui sont adhérence d'un point fermé de la fibre

générique, et les diviseurs *verticaux* qui coïncident avec une composante irréductible d'une fibre fermée. Plus généralement, un diviseur de Weil est dit *horizontal* (resp. *vertical*) si toutes ses composantes irréductibles le sont. On peut définir l'intersection globale d'un diviseur vertical et d'un diviseur quelconque sur X .

Notation 2.2.21 Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière. Soit s un point fermé de S . On note $\text{Div}_s(X)$ le sous-groupe de $\text{Div}(X)$ formé des diviseurs dont le support est contenu dans la fibre fermée X_s . C'est le groupe abélien libre sur l'ensemble des composantes irréductibles $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ de X_s .

Théorème 2.2.22 Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière. Soit $s \in S$ un point fermé. Alors il existe une unique forme $\mathbb{Z}$ -bilinéaire

$$i_s : \text{Div}(X) \times \text{Div}_s(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Si $D \in \text{Div}(X)$ et $E \in \text{Div}_s(X)$ n'ont pas de composante commune, alors

$$i_s(D, E) = \sum_{\substack{x \in X \\ x \text{ fermé}}} i_x(D, E)[k(x) : k(s)].$$

(b) La restriction de i_s à $\text{Div}_s(X) \times \text{Div}_s(X)$ est symétrique.

(c) $i_s(D, E) = i_s(D', E)$ si D est linéairement équivalent à D' .

(d) Si $0 < E \leq X_s$, alors

$$i_s(D, E) = \deg_{k(s)} \mathcal{O}_X(D)|_E.$$

Démonstration cf. [10], 9.1.12.□

Définition 2.2.23 [Nombre d'intersection] Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière et $s \in S$ un point fermé. Pour tout $D \in \text{Div}(X)$ et tout $E \in \text{Div}_s(X)$, l'entier relatif $i_s(D, E)$ est appelé le nombre d'intersection de D et E . On appelle $i_s(E, E)$ la self-intersection de E , et on la note E^2 .

Dans toute la suite, on considère une **surface fibrée régulière** $X \rightarrow S$, où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète de point générique η , de point fermé s , de fibre générique X_s . Les composantes irréductibles de la fibre spéciale X_s sont toujours notées $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$, et la multiplicité dans X_s (resp. multiplicité géométrique, resp. multiplicité géométrique dans X_s) de Γ_i est notée d_i (resp. e_i , resp. δ_i). On écrira aussi $D \cdot E$ pour $i_s(D, E)$.

Soit t une uniformisante de $\mathcal{O}_S(S)$. Notant encore t son image par l'injection $\mathcal{O}_S(S) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, la fibre X_s est alors le sous-schéma fermé de X défini par le faisceau d'idéaux inversible $t\mathcal{O}_X$, et s'identifie donc au diviseur de Cartier principal $\text{div}(t) \in \text{Div}_s(X)$. Si ξ_i est le point générique de la composante irréductible Γ_i de X_s , on a $\mathcal{O}_{X_s, \xi_i} = \mathcal{O}_{X, \xi_i} / (t)$. On obtient donc,

en prenant les longueurs, que la multiplicité d_i de Γ_i dans X_s est égale à la multiplicité du diviseur de Cartier X_s . Vue comme diviseur de Weil, la fibre fermée s'écrit donc

$$X_s = \sum_{i=1}^v d_i \Gamma_i$$

et est nulle dans $\text{Cl}(X)$.

Proposition 2.2.24 *Soit $\pi : X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière, et soit $s \in S$ un point fermé. Alors :*

(a) *Pour tout $E \in \text{Div}_s(X)$, on a $E \cdot X_s = 0$.*

(b) *Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ les composantes irréductibles de X_s , de multiplicités respectives $d_1, \dots, d_v$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, v$, on a*

$$\Gamma_i^2 = -\frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i} d_j \Gamma_j \cdot \Gamma_i.$$

Démonstration (cf. [10], 9.1.21) (a) Puisque $i_s(E, \cdot) : \text{Div}_s(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes, il résulte de 2.2.22(b) et (c) que

$$i_s(E, X_s) = E \cdot X_s = 0.$$

(b) Soit $i \in \{1, \dots, v\}$. Puisque $X_s = \sum_{i=1}^v d_i \Gamma_i$, on a

$$0 = \Gamma_i \cdot X_s = \sum_{j=1}^v d_j \Gamma_i \cdot \Gamma_j = d_i \Gamma_i^2 + \sum_{j \neq i} d_j \Gamma_j \cdot \Gamma_i,$$

d'où le résultat. $\square$

Définition 2.2.25 [Forme et matrice d'intersection de la fibre fermée] *Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière. Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ les composantes irréductibles de la fibre fermée X_s . La forme d'intersection de X_s est la forme bilinéaire symétrique*

$$i_s : \text{Div}_s(X) \times \text{Div}_s(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Sa matrice M dans la base $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_v\}$ est la matrice d'intersection de X_s . Le coefficient d'indice i, j de M est donc

$$M_{i,j} = \Gamma_i \cdot \Gamma_j.$$

Considérons maintenant les morphismes

$$\begin{aligned} \alpha : \text{Div}_s(X) &\rightarrow \mathbb{Z}^v \\ D &\mapsto (D \cdot \Gamma_i)_{i=1, \dots, v} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{Z}^v &\rightarrow \mathbb{Z}^v \\ (n_i)_{i=1,\dots,v} &\mapsto (e_i n_i)_{i=1,\dots,v}. \end{aligned}$$

On sait d'après 2.2.18 et 2.2.22(d) que e_i divise $D \cdot \Gamma_i$. En composant α et λ^{-1} , on obtient donc un morphisme $\alpha' : \text{Div}_s(X) \rightarrow \mathbb{Z}^v$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}_s(X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}^v \\ & \searrow \alpha' & \uparrow \lambda \\ & & \mathbb{Z}^v \end{array}$$

Théorème 2.2.26 *La forme intersection i_s de la fibre spéciale X_s est semi-définie négative. Supposons de plus la fibre générique X_η géométriquement connexe. Dans ce cas le noyau de i_s est engendré par*

$$\Delta := \frac{1}{d} \sum_{i=1}^v d_i \Gamma_i,$$

où d désigne le pgcd des d_i . L'image de α' est alors isomorphe à

$$\text{Div}_s(X) / \mathbb{Z} \Delta,$$

et c'est donc un $\mathbb{Z}$ -module de rang $v - 1$.

Démonstration (cf. [2], 9.5/10) En tensorisant par $\mathbb{Q}$, on peut étendre la forme d'intersection de X_s en une application $\mathbb{Q}$ -bilinéaire symétrique

$$\text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \times \text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Posons $Y_i = d_i \Gamma_i$ et $m_i = n_i/d_i$. On a alors $Y_i \cdot \sum_j Y_j = 0$ par 2.2.24(a), si bien que

$$Y_i \cdot \sum_j m_j Y_j = Y_i \cdot \left(\sum_j m_j Y_j - m_i \sum_j Y_j \right).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i n_i \Gamma_i\right)^2 &= \left(\sum_i m_i Y_i\right)^2 \\
&= \sum_i m_i (Y_i \cdot \sum_j m_j Y_j) \\
&= \sum_i m_i (Y_i \cdot (\sum_j m_j Y_j - m_i \sum_j Y_j)) \\
&= \sum_i m_i (Y_i \cdot \sum_{j \neq i} (m_j - m_i) Y_j) \\
&= \sum_{i \neq j} m_i (m_j - m_i) Y_i \cdot Y_j \\
&= \sum_{i < j} (m_i - m_j)(m_j - m_i) Y_i \cdot Y_j \\
&= -\sum_{i < j} (m_i - m_j)^2 Y_i \cdot Y_j \\
&= -\sum_{i < j} \frac{1}{d_i d_j} (n_i d_j - n_j d_i)^2 \Gamma_i \cdot \Gamma_j.
\end{aligned}$$

Cela montre que la forme d'intersection est semi-définie négative. D'autre part, on sait que le diviseur Δ de l'énoncé est dans le noyau de i_s d'après 2.2.24(a), et le calcul ci-dessus montre que

$$\left(\sum_i n_i \Gamma_i\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{n_i}{d_i} = \frac{n_j}{d_j}$$

si $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \neq 0$, donc si $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$ (par 2.2.22(a)). Or on peut montrer qu'une surface fibrée à fibre générique géométriquement connexe a toutes ses fibres géométriquement connexes, donc en particulier connexes. Dans ce cas, on en déduit que si $\sum_i n_i \Gamma_i$ est dans le cône isotrope de i_s , il existe $n \in \mathbb{Q}$ (égal à n_i/d_i pour tout i) tel que

$$\sum_i n_i \Gamma_i = \sum_i n d_i \Gamma_i = n d \Delta.$$

En écrivant par exemple une relation de Bézout entre d et les d_i , on voit que $n d \in \mathbb{Z}$. Le cône isotrope de i_s , et par suite son noyau, est donc $\mathbb{Z} \Delta$. Enfin, puisque λ^{-1} est injective, α' et α ont le même noyau. Or, dans les bases $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_v\}$ et $\{\Gamma_1^\vee, \dots, \Gamma_v^\vee\}$ (base duale), le morphisme

$$\alpha : \text{Div}_s(X) \rightarrow \mathbb{Z}^v \simeq \text{Div}_s(X)^\vee$$

a pour matrice la matrice d'intersection de X_s . Son noyau est donc $\mathbb{Z} \Delta$, et on a bien $\text{Div}_s(X)/\mathbb{Z} \Delta \simeq \text{Im } \alpha'$. $\square$

2.2.3 Modèle de Néron d'une jacobienne

Soit X_K une courbe propre et lisse sur le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète R . On a vu au théorème 2.2.6 que $J_K = \text{Pic}_{X_K/K}^0$ était une variété abélienne. On sait alors que J_K possède un modèle de Néron, que l'on notera J . Dans ce paragraphe nous allons donner, sous quelques hypothèses supplémentaires, une construction de J différente de la construction générale du modèle de Néron d'une variété abélienne, due à Raynaud. Pour cela, supposons que X_K soit connexe. D'après 1.2.9, il existe alors une surface fibrée régulière (non unique) $X \rightarrow S := \text{Spec}(R)$ de fibre générique X_K . Nous ferons les hypothèses supplémentaires suivantes : **X_K est géométriquement connexe, et R est strictement hensélien ; de plus, le corps résiduel k de R est parfait (donc algébriquement clos), ou $X_K(K)$ est non vide.** Alors J peut-être réalisé comme le plus grand quotient séparé du sous-faisceau de $\text{Pic}_{X/S}$ formé par les faisceaux inversibles de degré total zéro. Cette approche, moins «élémentaire» que la construction générale des modèles de Néron, a l'avantage de donner au passage une description complète du groupe des composantes de J au moyen de la matrice d'intersection de la fibre spéciale de $X \rightarrow S$, et des multiplicités géométriques des composantes irréductibles de celle-ci.

Supposons $\text{Pic}_{X/S}^0$ représentable par un schéma lisse et supposons connue l'existence du modèle de Néron J de J_K . Puisque $(\text{Pic}_{X/S}^0)_K = J_K$, on aurait un morphisme $\text{Pic}_{X/S}^0 \rightarrow J$. Celui-ci n'est en général pas surjectif, et c'est la raison pour laquelle on introduit un sous-faisceau de $\text{Pic}_{X/S}$ possédant plus de sections que $\text{Pic}_{X/S}^0$.

Soit T un S -schéma. Puisque X est une S -courbe relative, $X_T \rightarrow T$ est une T -courbe relative (si $t \in T$ est au-dessus de $u \in S$, alors $(X_T)_t = (X_u) \times_{\text{Spec}(k(u))} \text{Spec}(k(t))$). Or on sait définir le degré d'un faisceau inversible sur une courbe. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 2.2.27 [Faisceaux de degré total zéro] *Soit T un S -schéma. Le groupe des classes de faisceaux inversibles de degré total zéro sur X_T est*

$$P'(T) := \{(classe\ de\ \mathcal{L}) \in \text{Pic}(X_T) \mid \deg(\mathcal{L}|_{(X_T)_t}) = 0\ \text{pour\ tout}\ t \in T\}.$$

On notera P le faisceau fppf associé au préfaisceau P' .

Montrons que $P(S) \supseteq \text{Pic}_{X/S}^0(S)$. Pour cela, conservons les notations introduites en 2.2.2, et considérons

$$\begin{aligned} \rho : \text{Pic}(X) &\rightarrow \mathbb{Z}^v \\ \text{classe de } \mathcal{L} &\mapsto (\deg_i(\mathcal{L}|_{X_s}))_{i=1, \dots, v}. \end{aligned}$$

Nous admettrons que l'hypothèse « R strictement hensélien » assure que l'application canonique $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}_{X/S}(S)$ est un isomorphisme (il faut

utiliser cette hypothèse en sachant que $\text{Pic}_{X/S}$ peut être défini à l'aide de la topologie étale lorsque X est propre sur S : cf par exemple [2], 8.1). D'après 2.2.19 et 2.2.13, on a donc $P(S) \supseteq \text{Ker } \rho$. Or $\text{Ker } \rho$ n'est autre que $\text{Pic}_{X/S}^0(S)$. En effet, par définition de la composante neutre du S -foncteur $\text{Pic}_{X/S}$, la classe d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X dans $\text{Pic}(X) = \text{Pic}_{X/S}(S)$ est dans $\text{Pic}_{X/S}^0(S)$ si et seulement si $\mathcal{L}_\eta \in J_K(K)$ et $\mathcal{L}_s \in J_k(k)$. Maintenant, le théorème 2.2.14 nous dit que $\mathcal{L}_\eta \in J_K(K)$ si et seulement si $\text{deg } \mathcal{L}_\eta = 0$ (X_K étant géométriquement irréductible) et que $\mathcal{L}_s \in J_k(k)$ si et seulement si $\mathcal{L} \in \text{Ker } \rho$ (R étant *strictement* hensélien). Par 2.2.19, on a donc bien $\text{Pic}_{X/S}^0(S) = \text{Ker } \rho$, puis $P(S) \supseteq \text{Pic}_{X/S}^0(S)$.

Nous admettrons le fait suivant : les fibres de P sont représentables par des schémas localement de type fini et lisses (cf. [2], 8.2/3 et 8.4/2). On remarquera cependant que par 2.2.14, $P_K = J_K$.

On veut maintenant rendre P séparé. On sait qu'un schéma en groupes est séparé sur sa base si et seulement si sa section unité est une immersion fermée. En particulier, $P_K = J_K$ est séparé sur K . Cependant, en étendant J_K à P , la section $\epsilon_K : \text{Spec}(K) \rightarrow J_K$ ne s'étend pas en général en une immersion fermée. On va donc quotienter P par l'adhérence schématique E de ϵ_K dans P . Puisque P n'est en général pas un schéma, il faudrait pour cela généraliser la définition de l'adhérence schématique d'un fermé de la fibre générique à la catégorie des S -faisceaux fppf. Puisque nous ne donnerons pas la preuve de la représentabilité de P/E , nous n'aurons pas besoin de la définition précise de E , que nous omettons donc. Enonçons néanmoins le résultat suivant (cf. [2] 9.5/3).

Théorème 2.2.28 *Soit $Q := P/E$ le quotient des faisceaux fppf P et E . Alors Q est représentable par un S -schéma en groupes localement de type fini, lisse et séparé sur S . De plus, la projection canonique $P \rightarrow Q$ est un isomorphisme sur les fibres génériques, et donc $Q_K = J_K$.*

Pour que Q soit le modèle de Néron J_K , il reste à voir que Q est de type fini, et qu'il satisfait à la propriété de Néron d'extension des morphismes. Nous nous bornerons à détailler les arguments essentiels qui montrent que Q est de type fini, tels qu'ils sont présentés dans [2], 9.5. C'est cette partie de la construction qui fait intervenir le groupe des composantes de Q , et le relie à la matrice intersection de X_s .

Nous commençons par énoncer un lemme, dont la preuve repose essentiellement sur l'étude de la cohomologie du faisceau $\mathbb{G}_m$.

Lemme 2.2.29 *Notons $\text{PDiv}_s(X)$ le sous-groupe de $\text{Div}_s(X)$ formé des diviseurs principaux. Alors l'application canonique*

$$\begin{aligned} \text{Div}_s(X)/\text{PDiv}_s(X) &\rightarrow E(S) \\ \text{classe de } D &\mapsto \mathcal{O}_{X_K}(D|_{X_K}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration cf. [17], 6.1 ou [2], 9.5/8.□

Soit

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{Z}^v &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n_i)_{i=1, \dots, v} &\mapsto \sum_{i=1}^v d_i n_i, \end{aligned}$$

et posons $\beta' = \beta \circ \lambda$ (autrement dit $\beta'(n_1, \dots, n_v) = \sum_{i=1}^v \delta_i n_i$ d'après 2.2.17(ii)). Le résultat central pour toutes les considérations à venir sur le groupe des composantes du modèle de Néron de J_K (et pour montrer que Q est de type fini sur S) est le suivant.

Théorème 2.2.30 *On a un complexe canonique*

$$0 \rightarrow \text{PDiv}_s(X) \hookrightarrow \text{Div}_s(X) \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{Z}^v \xrightarrow{\beta'} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Celui-ci induit un isomorphisme de groupes finis

$$\sigma : \text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha' \xrightarrow{\sim} Q(S) / Q^0(S).$$

Démonstration (cf. [2], 9.5/9) Si $D \in \text{Div}_s(X)$ est un diviseur principal, alors $D|_{\Gamma_i}$ en est un pour tout i , et donc

$$D \cdot \Gamma_i = \deg \mathcal{O}_X(D)|_{\Gamma_i} = \deg \mathcal{O}_{\Gamma_i}(D|_{\Gamma_i}) = 0$$

pour tout i . Autrement dit, $D \in \text{Ker } \alpha = \text{Ker } \alpha'$.

Soit maintenant $D \in \text{Div}_s(X)$. On a

$$\begin{aligned} \beta' \circ \alpha'(D) &= \beta \circ \alpha(D) \\ &= \sum_{i=1}^v d_i D \cdot \Gamma_i \\ &= \sum_{i=1}^v d_i \deg \mathcal{O}_X(D)|_{\Gamma_i} \\ &= \sum_{i=1}^v d_i \deg_i \mathcal{O}_{X_s}(D|_{X_s}) \\ &= \deg \mathcal{O}_{X_s}(D|_{X_s}) \\ &= \deg \mathcal{O}_X(D)|_{X_s} \\ &= \deg \mathcal{O}_X(D)|_{X_\eta} \\ &= \deg \mathcal{O}_{X_\eta}(D|_{X_\eta}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $D|_{X_\eta} \simeq \mathcal{O}_{X_\eta}$. On a donc bien le complexe annoncé.

Construisons maintenant l'application σ . Posons

$$\rho' := \lambda^{-1} \circ \rho : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}^v$$

(cf. 2.2.18). On peut montrer que ρ' est surjective (cf. [2], 9.1/10). Soit alors $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X . L'image par ρ' de la classe de $\mathcal{L}$ est dans le noyau de β' si et seulement si

$$0 = \beta' \circ \rho'(\mathcal{L}) = \beta \circ \rho(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^v d_i \deg_i(\mathcal{L}|_{X_s}) = \deg(\mathcal{L})$$

c.-à-d., si et seulement si $\mathcal{L} \in P(S)$. Puisque ρ' et ρ ont le même noyau, on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}_{X/S}^0(S) \rightarrow P(S) \rightarrow \text{Ker } \beta' \rightarrow 0.$$

De plus, par le lemme 2.2.29, on a

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}_s(X)/\text{PDiv}_s(X) & \xlongequal{\quad} & E(S) \\ & \searrow \alpha' & \downarrow \rho' \\ & & \mathbb{Z}^v \end{array}$$

d'où $\text{Im } \alpha' = \rho'(E(S))$. Il en résulte un isomorphisme

$$P(S)/(\text{Pic}_{X/S}^0(S) + E(S)) \xrightarrow{\sim} \text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha'.$$

On définit alors l'application σ par la projection naturelle

$$\sigma : \text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha' \simeq P(S)/(\text{Pic}_{X/S}^0(S) + E(S)) \rightarrow Q(S)/Q^0(S).$$

Il reste à voir que le morphisme σ est bijectif. Commençons par la surjectivité. Elle est équivalente à la surjectivité de

$$a : P(S)/P^0(S) \rightarrow Q(S)/Q^0(S).$$

Considérons le diagramme commutatif canonique

$$\begin{array}{ccc} P(S)/P^0(S) & \xrightarrow{a} & Q(S)/Q^0(S) \\ \downarrow d & & \downarrow b \\ P_k(k)/P_k^0(k) & \xrightarrow{c} & Q_k(k)/Q_k^0(k). \end{array}$$

La flèche c s'identifie à l'application

$$\Phi_{P_k} \rightarrow \Phi_{Q_k}$$

induite par $P_k \rightarrow Q_k$ entre les groupes des composantes de P_k et Q_k (cf. 3.1). Puisque $P_k \rightarrow Q_k$ est surjective, on en déduit que c est surjective. La flèche b est une bijection. En effet, le schéma local S est hensélien et Q est lisse sur S , donc l'application canonique $Q(S) \rightarrow Q_k(k)$ est surjective. De plus, $\zeta \in Q(S)$ a son image ζ_k dans $Q_k^0(k)$ si et seulement si $\zeta \in Q^0(S)$ ($\zeta_K \in Q_K^0(K)$ est automatique puisque $Q_K = J_K$ est connexe). On obtient de même que, si P est représentable par un S -schéma lisse, d est une bijection. Dans le cas général, d reste une bijection, mais l'argument utilise la notion de rigidificateur pour palier le défaut éventuel de représentabilité de P . En conclusion, a est bien surjective.

Montrons enfin l'injectivité de σ . Pour cela, il nous faut admettre le fait non trivial que l'hypothèse « k est algébriquement clos, ou $X_K(K) \neq \emptyset$ » entraîne la surjectivité de l'application canonique $\text{Pic}_{X/S}^0(S) \rightarrow Q^0(S)$: cf. [2], 9.6/1. L'injectivité de σ s'en déduit alors en considérant le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E(S) & \longrightarrow & P(S) & \longrightarrow & Q(S) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \text{Pic}_{X/S}^0(S) & \longrightarrow & Q^0(S) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Pour terminer, remarquons que $\text{Ker } \beta'$ est de rang $v - 1$ (puisque β' est une $\mathbb{Z}$ -forme linéaire) c.-à-d., de même rang que $\text{Im } \alpha'$ d'après 2.2.26. Le groupe $\text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha'$ est donc fini. $\square$

Corollaire 2.2.31 *Le S -schéma Q est de type fini.*

Démonstration On utilise le résultat général suivant sur les schémas en groupes (cf. [4], Exp. VI_B , 3.6) :

Soit S un schéma et G un S -schéma en groupes à fibres connexes et localement de type fini. Alors G est quasi-compact sur S .

Dans notre contexte, S est le spectre de l'anneau de valuation discrète strictement hensélien R . Soit c une composante connexe de la fibre spéciale Q_k de Q . Puisque Q est lisse sur S (cf. 2.2.28), et k séparablement clos, la composante c contient un k -point, disons p_k (cf. 3.1). Puisque R est hensélien, p_k s'étend en une section p_S de Q sur S , qui coupe c . La translation par p_S sur Q induit alors un isomorphisme de la composante neutre Q^0 de Q sur le sous-schéma ouvert de Q ayant pour ensemble sous-jacent la réunion de c et de la fibre générique Q_K de Q (cf. 2.2.3). Or, on a vu au cours de la démonstration du théorème précédent que l'ensemble $Q(S)/Q^0(S)$ était en bijection avec les composantes connexes de Q_k , et qu'il était fini. Il en résulte que le schéma Q est recouvert par un nombre fini de sous-schémas ouverts isomorphes à la composante neutre Q^0 de Q . D'après le résultat général rappelé ci-dessus, Q^0 est quasi-compact sur S c.-à-d., Q^0 est quasi-compact

(puisque S est affine). On en déduit finalement que le S -schéma localement de type fini Q est quasi-compact, donc de type fini. $\square$

En admettant que Q vérifie la propriété de Néron d'extension des morphismes (cf. [2], 9.5/4), on obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 2.2.32 (Raynaud) *Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement hensélien de corps des fractions K et de corps résiduel k . Soit X_K une courbe géométriquement connexe, propre et lisse sur K . Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière de fibre générique X_K . Supposons k parfait ou $X_K(K)$ non vide. Alors le modèle de Néron J de la jacobienne J_K de X_K est le plus grand quotient séparé du sous-faisceau de $\text{Pic}_{X/S}$ correspondant aux faisceaux inversibles de degré total zéro.*

De plus, avec les notations habituelles concernant les composantes irréductibles de la fibre fermée de $X \rightarrow S$, le groupe des composantes Φ_J de J (cf. 3.1) est canoniquement isomorphe à

$$\text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha',$$

où

$$\begin{aligned} \alpha' : \text{Div}_s(X) &\rightarrow \mathbb{Z}^v \\ D &\mapsto \left(\frac{D \cdot \Gamma_i}{e_i} \right)_{i=1, \dots, v} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta' : \mathbb{Z}^v &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (n_i)_{i=1, \dots, v} &\mapsto \sum_{i=1}^v \delta_i n_i. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.33 Le groupe $\text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha'$ est fini, c'est donc un sous-groupe de torsion du conoyau de α' . Inversement, si $C := {}^t(n_1, \dots, n_v) \in \mathbb{Z}^v$ vérifie $nC \in \text{Im } \alpha'$ pour un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors en particulier $nC \in \text{Ker } \beta'$, et puisque $\mathbb{Z}$ est intègre il en résulte que $C \in \text{Ker } \beta'$. Par conséquent, le **groupe des composantes de J** est égal à la partie de torsion du conoyau de α' . Il est donc **entièrement déterminé par la matrice intersection M de X_k et la matrice $\Lambda := \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$ des multiplicités géométriques de X_k** (qui n'est autre que la matrice de λ dans la base canonique de $\mathbb{Z}^v$).

Pour mémoire, écrivons concrètement comment s'obtient l'image d'un élément $a_K \in J_K(K)$ dans le groupe $\text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha'$, tel que cela a été décrit dans la démonstration du théorème 2.2.30. D'abord, en notant $\text{Cl}^0(X_K)$ le groupe des classes de diviseurs de Weil de degré zéro sur la courbe X_K , on

a le diagramme commutatif suivant, où les deux flèches verticales sont les flèches de restriction :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}^0(X_K) & \stackrel{=}{=} & J_K(K) \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ P(S) & \longrightarrow & Q(S) \end{array}$$

(on rappelle que, le modèle X étant régulier, $P(S)$ s'identifie au groupe des classes de diviseurs de Weil de degré zéro sur X). Ensuite, par construction de l'isomorphisme σ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} P(S) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & Q(S) & & \\ \downarrow \rho' & \searrow & \downarrow & & \\ & P(S)/(\mathrm{Pic}_{X/S}^0(S) + E(S)) & & & \\ & \downarrow & & & \\ \mathrm{Ker} \beta' & \xrightarrow{\hspace{5em}} & \mathrm{Ker} \beta' / \mathrm{Im} \alpha' & \xrightarrow{\sigma} & Q(S)/Q^0(S), \end{array}$$

où ρ' est induite par

$$\rho' := \lambda^{-1} \circ \rho : \mathrm{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}^v .$$

En recollant ces deux diagrammes le long de $P(S) \rightarrow Q(S)$, en supprimant l'intermédiaire $P(S)/(\mathrm{Pic}_{X/S}^0 + E(S))$ et en notant J à la place de Q , et R au lieu de $S = \mathrm{Spec}(R)$, on obtient

$$\begin{array}{ccccc} P(R) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Cl}^0(X_K) & \stackrel{=}{=} & J_K(K) & \xleftarrow{\sim} & J(R) \\ \downarrow \rho' & & & & & & \downarrow \\ \mathrm{Ker} \beta' & \longrightarrow & \mathrm{Ker} \beta' / \mathrm{Im} \alpha' & \xrightarrow{\sigma} & J(R)/J^0(R) & =: & \Phi_J. \end{array}$$

Ainsi, partant d'un élément $a_K \in J_K(K)$, on le représente par un diviseur de Weil D_K de degré zéro sur X_K . On étend D_K en un diviseur de Weil D sur le modèle X , par exemple en prenant l'adhérence schématique de D_K dans X . L'image par ρ' de la classe d'équivalence linéaire $[D]$ de D est alors un élément de $\mathrm{Ker} \beta'$, et l'image de a_K dans $\mathrm{Ker} \beta' / \mathrm{Im} \alpha'$ est la classe de $\rho'([D])$.

Chapitre 3

Le groupe des composantes du modèle de Néron d'une variété abélienne et le pairing de Grothendieck

Le but de ce chapitre est de présenter les principaux résultats de l'article [1] de Bosch et Lorenzini. Pour cela, définissons tout d'abord le groupe des composantes du modèle de Néron d'une variété abélienne.

3.1 Le groupe des composantes

Le groupe des composantes d'un groupe algébrique G sur un corps k est un schéma en groupes Φ fini étale sur k , en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de G , et dont la loi est induite par celle de G . Lorsque k est séparablement clos, Φ est entièrement déterminé par le groupe fini ordinaire $\Phi(k)$ de ses points rationnels. Puisque les résultats que nous allons présenter ont lieu dans ce cadre, nous avons choisi de ne pas développer la théorie générale du groupe des composantes, mais plutôt d'en donner une définition *ad hoc*.

Définition 3.1.1 [Groupe des composantes d'un groupe algébrique]
Soit G un schéma en groupes commutatif, localement de type fini et lisse sur un corps k séparablement clos. Notons G^0 sa composante neutre. Le groupe des composantes de G est le groupe abélien

$$\Phi := G(k)/G^0(k).$$

Les hypothèses « G lisse» et « k séparablement clos» assurent que Φ est en bijection naturelle avec l'ensemble des composantes connexes de G . En effet,

notons f le morphisme structural de G . L'étude locale des morphismes lisses (cf. [10], 6.2.11) montre que pour tout $x \in G$ il existe un voisinage U de x tel que $f|_U$ se décompose en

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & \mathbb{A}_k^n \\ & \searrow f|_U & \downarrow \\ & & \text{Spec}(k) \end{array}$$

pour un certain entier n , avec g étale (donc ouvert). Alors, puisque le corps k est infini, l'ouvert $g(U)$ de $\mathbb{A}_k^n$ possède au moins un point rationnel y (considérer un ouvert principal $D(F)$ contenu dans $g(U)$, et prendre un point de k^n qui n'annule pas F). Le morphisme g étant étale et k séparablement clos, il en résulte que tous les points de U au-dessus de y sont encore à valeurs dans k . On voit ainsi que $G(k)$ est dense dans G . Maintenant, les composantes connexes de G sont ouvertes puisque G est localement noethérien, et donc chacune d'entre elles possède un point rationnel. D'autre part, une translation par un point rationnel est un homéomorphisme, donc permute les composantes connexes. Par conséquent, deux points rationnels sont dans la même composante connexe si et seulement si leur différence est dans la composante neutre de G . On a donc bien obtenu que l'ensemble des composantes connexes de G est en bijection avec Φ .

On peut maintenant définir le groupe des composantes d'un modèle de Néron sur un anneau de valuation discrète à corps résiduel séparablement clos.

Définition 3.1.2 [Groupe des composantes d'un modèle de Néron]

Soit R un anneau de valuation discrète, de corps résiduel séparablement clos k . Posons $S := \text{Spec}(R)$. Soit $N \rightarrow S$ un schéma en groupes commutatif, qui est le modèle de Néron ltf de sa fibre générique. Par définition, le groupe des composantes Φ de N est le groupe des composantes de sa fibre spéciale N_k . On a donc

$$\Phi := N_k(k)/N_k^0(k).$$

Supposons maintenant que R est un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de sorte que $N(R) \rightarrow N(k) = N_k(k)$ est surjectif (cf. [2], 2.3/5). Alors, si la fibre générique de N est connexe, on a

$$\Phi = N(R)/N^0(R)$$

par définition de la composante neutre N^0 de N .

3.2 Le pairing de Grothendieck

Fixons un anneau de valuation discrète strictement hensélien R , de corps des fractions K , de corps résiduel k , et d'uniformisante π . Posons $S :=$

$\mathrm{Spec}(R)$ et $i : \mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow S$ l'immersion fermée canonique. Les résultats de Bosch et Lorenzini concernent le **pairing de Grothendieck**

$$\langle , \rangle : \Phi_A \times \Phi_{A'} \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

entre le groupe des composantes du modèle de Néron A d'une variété abélienne A_K sur K et celui du modèle de Néron A' de sa variété abélienne duale $A'_K := \mathrm{Pic}_{A_K/K}^0$. Nous voulons d'abord voir où apparaît cet accouplement dans la théorie des modèles de Néron. Il faut pour cela introduire un peu de formalisme, même si celui-ci n'est pas indispensable pour la suite. Nous nous bornerons néanmoins à ne donner que les définitions et résultats strictement nécessaires pour définir l'accouplement. De plus, nous resterons dans le cadre de l'article de Bosch et Lorenzini, où l'anneau de base R est strictement hensélien, bien que le pairing de Grothendieck soit défini sur une base plus générale. Pour ce qui va suivre, des références précises à [5], Exp. VII, sont données dans [1], sect. 3.

Remarque 3.2.1 Dans la suite, il sera question de suites exactes (ou encore d'extensions) de schémas en groupes commutatifs localement de type fini sur un schéma de base localement noethérien. Dans notre contexte, qui est celui de [5], Exp. VII, §1.1, si T est une telle base, et F, G et H de tels T -schémas en groupes, alors on dira que

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \rightarrow 0$$

est une *suite exacte* (fppf) ou encore une *extension* (fppf) de H par F , si f et g sont des morphismes de T -schémas en groupes, f induit un isomorphisme de F sur $\mathrm{Ker} g$, et g est un épimorphisme (de faisceaux) fppf. Autrement dit, il s'agit d'une suite exacte dans la catégorie abélienne des T -faisceaux fppf. Si

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} H \rightarrow 0$$

est une autre extension de H par F , elle sera dite *isomorphe* à la précédente s'il existe un morphisme de T -schémas en groupes $G \rightarrow G'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

($G \rightarrow G'$ est alors automatiquement un isomorphisme par lemme des cinq dans la catégorie abélienne des T -faisceaux fppf). On notera $\mathrm{Ext}^1(H, F)$ le groupe des classes d'isomorphismes des extensions de H par F (en sous-entendant le schéma de base T).

Pour définir le pairing de Grothendieck, il faut commencer par définir la notion de *biextension*. Pour cela, nous suivons la présentation de [12], Chap. 3, app. C.

Définition 3.2.2 [Biextensions (fppf)] Soit T un schéma localement noethérien. Soient A, B et G des T -schémas en groupes commutatifs, localement de type fini. Une biextension (fppf) de (A, B) par G est la donnée d'un schéma W et d'un morphisme surjectif $\pi : W \rightarrow A \times_T B$, munis des structures suivantes :

(a) une action $\cdot : G_{A \times_T B} \times_{A \times_T B} W \rightarrow W$ de $G_{A \times_T B}$ sur W faisant de W un $G_{A \times_T B}$ -torseur (fppf) ;

(b) un A -morphisme $m_A : W \times_A W \rightarrow W$ et une section e_A de W sur A faisant de W un A -schéma en groupes commutatifs ;

(c) un B -morphisme $m_B : W \times_B W \rightarrow W$ et une section e_B de W sur B faisant de W un B -schéma en groupes commutatifs.

De plus, ces structures doivent vérifier les conditions suivantes :

(i) si $G_A \rightarrow W$ est le A -morphisme $g \mapsto g \cdot e_A$, alors

$$0 \rightarrow G_A \rightarrow W \xrightarrow{\pi} B_A \rightarrow 0$$

est une suite exacte (fppf) de A -schémas en groupes ;

(ii) si $G_B \rightarrow W$ est le B -morphisme $g \mapsto g \cdot e_B$, alors

$$0 \rightarrow G_B \rightarrow W \xrightarrow{\pi} A_B \rightarrow 0$$

est une suite exacte (fppf) de B -schémas en groupes ;

(iii) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} (W \times_A W) \times_{B \times_T B} (W \times_A W) & \xrightarrow{m_A \times m_A} & W \times_B W \\ \parallel & & \searrow m_B \\ (W \times_B W) \times_{A \times_T A} (W \times_B W) & \xrightarrow{m_B \times m_B} & W \times_A W \\ & & \nearrow m_A \\ & & W \end{array}$$

(l'«égalité» verticale correspondant à $(w_1, w_2; w_3, w_4) \leftrightarrow (w_1, w_3; w_2, w_4)$).

Lorsque T est le spectre de K , et A, B et G sont respectivement A_K, A'_K et $\mathbb{G}_{m,K}$, un exemple de biextension est donné par le faisceau de Poincaré $\mathcal{P}_K$ sur $A_K \times_K A'_K$. D'abord, en retirant la section nulle du fibré en droites $\text{Spec}(\text{Sym}(\mathcal{P}_K))$ associé à $\mathcal{P}_K$, on obtient un $\mathbb{G}_{m, A_K \times_K A'_K}$ -torseur pour la topologie de Zariski (donc pour la topologie fppf) sur $A_K \times_K A'_K$, que l'on note encore $\mathcal{P}_K$. Cela donne (a). Ensuite, on a l'énoncé suivant (cf. [15], Th. 18.1, pour le cas fpqc, puis [5], Exp. VIII, §0.2, pour passer au cas fppf).

Théorème 3.2.3 *Soit T un schéma localement noethérien. Soit $Z \rightarrow T$ un schéma abélien projectif. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$Z'(T) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(Z, \mathbb{G}_{m,T}),$$

où Z' désigne le schéma abélien dual $\text{Pic}_{Z/T}^0$ de Z .

Appliquons ce théorème avec $Z \rightarrow T := (A_K)_{A'_K} \rightarrow A'_K$. Le faisceau de Poincaré $\mathcal{P}_K$ est un A'_K -point du dual de $(A_K)_{A'_K}$: en effet

$$\begin{aligned} ((A_K)_{A'_K})'(A'_K) &= \text{Pic}_{(A_K)_{A'_K}/A'_K}^0(A'_K) \\ &= \text{Pic}_{A_K/K}^0(A'_K), \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}_K \in \text{Pic}_{A_K/K}^0(A'_K)$ est l'image canonique de l'identité de A'_K dans ce groupe. Ceci donne (c) et (ii). Les points (b) et (i) s'obtiennent de même, en utilisant la bidualité de A_K , à savoir que $\mathcal{P}_K$ est aussi le faisceau de Poincaré associé à la variété abélienne A'_K et sa duale A_K . Enfin, en explicitant la flèche du théorème précédent, on peut vérifier le point (iii).

Ceci étant, il est possible de munir les classes d'isomorphismes de biextensions de (A, B) par G d'une loi de groupe commutative, et ainsi de définir le groupe $\text{Biext}^1(A, B; G)$. La théorie des biextensions mène alors à une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Biext}^1(A, A'; \mathbb{G}_{m,R}) &\rightarrow \text{Biext}^1(A_K, A'_K; \mathbb{G}_{m,K}) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_A \otimes \Phi_{A'}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par définition, le *pairing de Grothendieck* $\langle, \rangle$ est l'image de

$$\mathcal{P}_K \in \text{Biext}^1(A_K, A'_K; \mathbb{G}_{m,K})$$

dans

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_A \otimes \Phi_{A'}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Bil}_{\mathbb{Z}}(\Phi_A \times \Phi_{A'}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Autrement dit, $\langle, \rangle$ mesure l'obstruction pour étendre le faisceau de Poincaré $\mathcal{P}_K$ sur $A_K \times_K A'_K$ en une biextension des modèles de Néron (A, A') par $\mathbb{G}_{m,R}$. En particulier, dès que la fibre spéciale A_k est connexe, par exemple si A_K a bonne réduction au point fermé de S , ou si A_K est une courbe elliptique de type de Kodaira I_1 , II ou II^* , alors $\mathcal{P}_K$ s'étend toujours en une biextension de (A, A') par $\mathbb{G}_{m,R}$. En revanche, dès que Φ_A et $\Phi_{A'}$ ne sont pas triviaux, il peut y avoir une obstruction, correspondant à $\langle, \rangle \neq 0$. Grothendieck a même conjecturé que $\langle, \rangle$ était un accouplement *non-dégénéré*, ce qui est par exemple démontré dans [1] pour les jacobiniennes de courbes possédant un point rationnel, si k est parfait (cf. 3.2.2). Dans ce cas ($\Phi_A, \Phi_{A'}$ et $\langle, \rangle$ non nuls), la dualité décrite par $\mathcal{P}_K$ ne s'étend pas en une biextension au niveau des modèles de Néron.

3.2.1 Le cas général des variétés abéliennes

Dans le contexte général des variétés abéliennes, Bosch et Lorenzini démontrent «l'ingrédient-clé» de leur article. Celui-ci consiste à exprimer l'image d'un élément x de $\Phi_{A'}$ par le pairing de Grothendieck

$$\Phi_{A'} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

en termes des ordres d'annulation sur les composantes irréductibles de A_k d'une certaine fonction rationnelle sur A_K .

Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A'_K(K) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K}) & & \\
 \uparrow 8 \wr & & \uparrow 10 \wr & & \\
 A'(R) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^1(A, G) & & \\
 \downarrow 5 & & \downarrow 7 & & \\
 \Phi_{A'} & \xrightarrow{3} & \mathrm{Ext}^1(\Phi_A, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^2(\Phi_A, \mathbb{Z})_s \\
 \parallel & & \uparrow 2 \wr & & \\
 \Phi_{A'} & \xrightarrow{1} & \mathrm{Hom}(\Phi_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & &
 \end{array}$$

1. Pairing de Grothendieck.
2. A un homomorphisme de groupes $\varphi : \Phi_A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on associe le pull-back de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

par φ (cf. [18], Chap. VII, §1.1). Cette opération définit un isomorphisme du groupe $\mathrm{Hom}(\Phi_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des homomorphismes de groupes de Φ_A dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, sur le groupe $\mathrm{Ext}^1(\Phi_A, \mathbb{Z})$ des extensions commutatives de Φ_A par $\mathbb{Z}$. En effet, en écrivant la suite exacte longue des $\mathrm{Hom}(\Phi_A, \bullet)$ et $\mathrm{Ext}^1(\Phi_A, \bullet)$ associée à la suite exacte courte ci-dessus (cf. [18], §1.3), il suffit de voir que $\mathrm{Hom}(\Phi_A, \mathbb{Q})$ et $\mathrm{Ext}^1(\Phi_A, \mathbb{Q})$ sont tous les deux nuls. Or cela se vérifie en utilisant que Φ_A est de torsion (car fini!) et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la multiplication par n est un automorphisme du groupe additif $\mathbb{Q}$.

3. Flèche composée $2 \circ 1$.
4. Par définition, $H^2(\Phi_A, \mathbb{Z})_s$ est le groupe des classes de systèmes de facteurs symétriques $\Phi_A \times \Phi_A \rightarrow \mathbb{Z}$ (l'indice « s » est ici l'abréviation de « symétriques »), cf. [18], §1.4. A une extension commutative

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Phi \xrightarrow{a} \Phi_A \rightarrow 0$$

de Φ_A par $\mathbb{Z}$, on associe la classe du système de facteurs symétrique γ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ défini comme suit. Soit s une section ensembliste quelconque de q . Alors pour tout $a, b \in \Phi_A$,

$$\gamma(a, b) := s(a + b) - s(a) - s(b).$$

La flèche 4 ainsi définie est un isomorphisme de groupes.

5. Projection canonique, surjective puisque R est supposé strictement hensélien (cf. 3.1).
6. Se définit par commutativité avec 8, 9 et 10. En particulier, c'est un isomorphisme.
7. Opération d'image directe de $\text{Ext}^1(A, G)$ dans $\text{Ext}^1(A, i_* \mathbb{Z})$ par le morphisme $G \rightarrow i_* \mathbb{Z}$, suivi de l'identification $\text{Ext}^1(A, i_* \mathbb{Z}) \simeq \text{Ext}^1(\Phi_A, \mathbb{Z})$ (cf. [5], VIII, 5.5 et 5.9).
8. Morphisme canonique, qui est un isomorphisme d'après la propriété universelle de Néron vérifiée par A' .
9. Isomorphisme de 3.2.3, appliqué à la variété abélienne $A_K \rightarrow \text{Spec}(K)$.
10. Restriction aux fibres génériques. C'est un isomorphisme (cf. [5], VIII, 6.6).

Pour la commutativité du carré 3 – 5 – 6 – 7, cf [5], VIII, 7.3.4.

La méthode est alors la suivante. Partant d'un élément $x \in \Phi_{A'}$, on calcule son image Φ_x par 3 en commençant par relever x en un élément $L_K \in \text{Ext}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K})$, que l'on étend ensuite en un élément $L \in \text{Ext}^1(A, G)$, puis on prend son image $\Phi_L =: \Phi_x$ dans $\text{Ext}^1(\Phi_A, \mathbb{Z})$. Grâce à cette construction, on peut alors donner une formulation *géométrique* de l'élément (classe de) γ_x de $H^2(\Phi_A, \mathbb{Z})_s$ défini par Φ_x . En trouvant l'image inverse par 2 de Φ_x , on peut alors exprimer l'image φ_x de x dans $\text{Hom}(\Phi_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ en fonction de γ_x (cette partie est de nature purement *homologique*), et donc donner une description géométrique de l'image de x par l'accouplement de Grothendieck.

Nous allons traiter la partie homologique, puis la partie géométrique.

Partie homologique

Soit Φ une extension commutative de Φ_A par $\mathbb{Z}$,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Phi \rightarrow \Phi_A \xrightarrow{q} 0.$$

Soit s une section ensembliste de q . Soit φ l'antécédent de Φ par la flèche 2. Le lemme suivant exprime φ en fonction de s .

Lemme 3.2.4 Soit $\tilde{\Phi}$ l'image directe de Φ par $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ c.-à-d., l'unique extension de Φ_A par $\mathbb{Q}$ telle qu'il existe un morphisme $\iota : \Phi \rightarrow \tilde{\Phi}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Phi & \xrightarrow{q} & \Phi_A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \iota & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \tilde{\Phi} & \xrightarrow{\tilde{q}} & \Phi_A \longrightarrow 0. \end{array}$$

Alors :

(i) La suite exacte du bas est scindée via une unique section additive $\tilde{s}$ de $\tilde{q}$. On note $\tilde{p} := \text{Id} - \tilde{s} \circ \tilde{q} : \tilde{\Phi} \rightarrow \mathbb{Q}$ la projection correspondante.

(ii) Soit n un entier > 0 tel que $n \cdot \Phi_A = 0$. Alors, pour tout $a \in \Phi_A$, $(n \cdot (\iota \circ s)(a))$ appartient à $\mathbb{Q}$, et on a la formule :

$$\tilde{s}(a) = (\iota \circ s)(a) - \frac{1}{n}(n \cdot (\iota \circ s)(a)), \quad a \in \Phi_A.$$

De plus $n \cdot s(a)$ est dans $\mathbb{Z}$ pour tout $a \in \Phi_A$.

(iii) L'extension $\tilde{\Phi}$ de Φ_A par $\mathbb{Z}$ est le pull-back de

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

par le morphisme

$$\varphi : \Phi_A \xrightarrow{s} \Phi \xrightarrow{\iota} \tilde{\Phi} \xrightarrow{\tilde{p}} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le morphisme φ est donc l'antécédent de $\tilde{\Phi}$ par 2, et l'on a, pour tout $a \in \Phi_A$,

$$\varphi(a) = \frac{1}{n}(n \cdot (\iota \circ s)(a)) \pmod{\mathbb{Z}} = \frac{1}{n}(n \cdot s(a)) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Démonstration (cf. [1], 3.5) (i) L'existence de la section additive $\tilde{s}$ provient de $\text{Ext}^1(\Phi_A, \mathbb{Q}) = 0$, et son unicité est due à $\text{Hom}(\Phi_A, \mathbb{Q}) = 0$.

(ii) Pour tout $a \in \Phi_A$, l'image de $(n \cdot (\iota \circ s)(a))$ par $\tilde{q}$ est nulle, donc $(n \cdot (\iota \circ s)(a)) \in \mathbb{Q}$ et on peut considérer l'élément $\frac{1}{n}(n \cdot (\iota \circ s)(a))$ de $\mathbb{Q}$. Posons $t := \iota \circ s$ et $t' := t - (1/n)(n \cdot t)$. Les applications t et t' sont des sections de $\tilde{q}$, et t' est même additive. En effet, si $a, b \in \Phi_A$ et $f(a, b) := t'(a+b) - t'(a) - t'(b)$, alors $f(a, b) \in \mathbb{Q}$ et $n \cdot f(a, b) = 0$. Par l'unicité vue en (i), on a donc $\tilde{s} = t'$. De plus, $n \cdot s$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ car $q \circ (n \cdot s) = 0$.

(iii) Par définition, l'application φ vérifie, pour tout $a \in \Phi_A$,

$$\varphi(a) = \frac{1}{n}(n \cdot (\iota \circ s)(a)) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

De plus, par commutativité, l'élément $n \cdot s(a)$ de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \hookrightarrow \tilde{\Phi}$ coïncide avec $\iota(n \cdot s(a)) = n \cdot (\iota \circ s)(a)$. On en déduit que φ est un homomorphisme. En

effet, si $a, b \in \Phi_A$ et $f(a, b) := s(a + b) - s(a) - s(b)$, alors $f(a, b) \in \mathbb{Z}$, d'où $(1/n)(n \cdot f(a, b))$ est nul dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Phi & \xrightarrow{q} & \Phi_A & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \tilde{p} \circ \iota & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Il est commutatif. Par définition, la ligne du haut est donc le pull-back de celle du bas par le morphisme φ . $\square$

On peut maintenant donner une formule de φ en fonction du système de facteurs symétrique γ défini par s .

Lemme 3.2.5 *Soit $n > 1$ tel que $n \cdot \Phi_A = 0$. Alors, pour tout $a \in \Phi_A$, on a :*

$$\varphi(a) = -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(a, i \cdot a) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Démonstration (cf. [1], 3.6) Par définition de γ , on a, pour tout $a, b \in \Phi_A$,

$$s(a + b) = s(a) + s(b) + \gamma(a, b).$$

En particulier, pour tout entier $i > 1$, on a

$$s(i \cdot a) = s(a) + s((i - 1) \cdot a) + \gamma(a, (i - 1) \cdot a).$$

D'où, de proche en proche,

$$s(0) = s(n \cdot a) = n \cdot s(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(a, i \cdot a),$$

ou encore,

$$n \cdot s(a) = -\sum_{i=0}^{n-1} \gamma(a, i \cdot a)$$

puisque $s(0) = -\gamma(a, 0)$. La formule annoncée se déduit donc de 3.2.4 (iii). $\square$

Partie géométrique

Il reste donc à donner à γ une interprétation géométrique lorsque Φ est l'image Φ_x par $\mathfrak{z}$ d'un élément $x \in \Phi_{A'}$. Soit donc $x \in \Phi_{A'}$. Soit $L_K \in \text{Ext}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K})$ représentant x , et soit $L \in \text{Ext}^1(A, G)$ l'antécédent par 10 de L_K . Voyons comment L est obtenu à partir de L_K c.-à-d., explicitons la flèche inverse de 10, d'après les indications de [5], Exp. VIII, 6.6.

D'après [18], Chap VII, Th. 5, l'extension L_K est localement triviale pour la topologie de Zariski classique sur A_K , et définit donc un cocycle de Čech η_K à valeurs dans $\mathcal{O}_{A_K}^*$ (ou encore dans le faisceau $\mathbb{G}_{m,K}$ restreint aux K -schémas qui sont des ouverts de Zariski de A_K). De plus, la classe de cohomologie $[\eta_K]$ correspondante est *primitive* c.-à-d.,

$$\mu_K^*[\eta_K] = p_{1,K}^*[\eta_K] \cdot p_{2,K}^*[\eta_K],$$

où

$$\mu_K, p_{1,K}, p_{2,K} : A_K \times_K A_K \rightarrow A_K$$

sont respectivement la multiplication sur A_K , la première et la seconde projection. En notations,

$$[\eta_K] \in \mathbf{H}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K} |_{A_K})_{\text{prim}} \subset \mathbf{H}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K} |_{A_K}).$$

Maintenant, le groupe $\mathbf{H}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K} |_{A_K})$ classe, à isomorphisme près, les faisceaux inversibles sur A_K , et donc, à équivalence linéaire près, les diviseurs de Weil sur A_K , puisque A_K est régulier. Choisissons un diviseur D_K représentant $[\eta_K]$, et soit D son adhérence schématique dans A . Puisque A est régulier, D définit à son tour un élément

$$[\bar{\eta}] \in \mathbf{H}^1(A, \mathbb{G}_{m,R} |_A)$$

(qui n'est pas primitif en général). On utilise alors l'immersion ouverte $\mathbb{G}_{m,R} \rightarrow G$ définie lors de la construction de G : elle induit un morphisme de groupes

$$\mathbf{H}^1(A, \mathbb{G}_{m,R} |_A) \rightarrow \mathbf{H}^1(A, G|_A),$$

et on peut considérer l'image $[\eta]$ de $[\bar{\eta}]$ par ce morphisme. On a alors

$$[\eta] \in \mathbf{H}^1(A, G|_A)_{\text{prim}}.$$

Pour voir que la classe $[\eta]$ est bien primitive, nous allons utiliser que les groupes $\mathbf{H}^1$ considérés classifient également les torseurs (pour la topologie de Zariski classique sur la base correspondante) sous le groupe structural correspondant. Notons encore L_K le $\mathbb{G}_{m,K}$ -torseur défini par L_K , et soient $\bar{L}$ le $\mathbb{G}_{m,R}$ -torseur défini par D et L un G -torseur représentant $[\eta]$. Alors la construction

$$L_K \rightsquigarrow \bar{L} \rightsquigarrow L$$

est exactement la construction d'un antécédent essentiel de L_K par l'équivalence de catégorie entre les G -torseurs sur A et les $\mathbb{G}_{m,K}$ torseurs sur A_K , donnée par restriction à la fibre générique : cf. [5], Exp. VIII, Th. 6.5. Par cette équivalence, un isomorphisme

$$\mu_K^* L_K \simeq p_{1,K}^* L_K \cdot p_{2,K}^* L_K$$

correspond à un isomorphisme

$$\mu^*L \simeq p_1^*L \cdot p_2^*L,$$

et par conséquent $[\eta]$ est bien une classe de cohomologie primitive. Enfin, un tel G -torseur *primitif* possède une unique structure de S -schéma en groupes qui en fait une extension commutative de A par G : cf. [5], Exp. VII, §1.1.5. La classe d'isomorphie de l'extension L est l'antécédent par la flèche 10 (définie par restriction à la fibre générique) de la classe d'isomorphie de l'extension L_K .

On a alors le lemme suivant, qui utilise de façon cruciale la construction de G vue en 2.1. On en conserve d'ailleurs les notations.

Lemme 3.2.6 *Soit comme ci-dessus un $\mathbb{G}_{m,R}$ -torseur $\bar{L}$ sur A . Notons L_K sa fibre générique et L son image par $\mathbb{G}_{m,R} \rightarrow G$. Alors :*

(i) *L'espace total de L est obtenu par recollement de copies de celui de $\bar{L}$ paramétrées par $i \in \mathbb{Z}$, par multiplication par les $\pi^{j-i} \in \mathbb{G}_{m,K}(K)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, le long des fibres génériques. En particulier, on a une immersion ouverte canonique $\bar{L} \hookrightarrow L$ au-dessus de A .*

(ii) *Sur les ensembles des composantes connexes des fibres fermées, $\bar{L} \hookrightarrow L$ induit une injection $\Phi_{\bar{L}} \hookrightarrow \Phi_L$ au-dessus du groupe des composantes Φ_A .*

(iii) *La projection $\Phi_{\bar{L}} \rightarrow \Phi_A$ est bijective ; donc, en composant son inverse avec l'application de (ii), on obtient une section $s : \Phi_A \rightarrow \Phi_L$ de la projection $q : \Phi_L \rightarrow \Phi_A$.*

Démonstration (cf. [1], 3.1) (i) Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de A qui trivialise $\bar{L}$, et soit $\bar{\eta}$ le cocycle à valeurs dans $\mathbb{G}_{m,R}$ associé. Fixons $i \in \mathbb{Z}$. Considérons la famille

$$\{G^i \times_R U\}_{U \in \mathcal{U}},$$

et notons $\bar{L}^i$ la copie de $\bar{L}$ obtenue par recollement de cette famille à l'aide du cocycle $\bar{\eta}$. Par construction de G , l'image du $\mathbb{G}_{m,R}$ -torseur $\bar{L}$ par le morphisme $\mathbb{G}_{m,R} = G^0 \hookrightarrow G$ est le G -torseur obtenu par recollement des $\bar{L}^i$, par multiplication par les $\pi^{j-i} \in \mathbb{G}_{m,K}(K)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, le long des fibres génériques. En particulier,

$$L = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bar{L}^i$$

et on a une immersion ouverte canonique $\bar{L} = \bar{L}^0 \hookrightarrow L$.

(ii) Puisque les $\bar{L}^i$ ne sont recollés que le long des fibres génériques, la fibre spéciale de L est topologiquement égale à la réunion disjointe des $\bar{L}_k^i$:

$$L_k = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \bar{L}_k^i.$$

Par conséquent, pour chaque i , les composantes connexes de $\bar{L}_k^i$ coïncident avec ses composantes connexes comme sous-espace de L_k . En particulier, pour $i = 0$, l'immersion ouverte $\bar{L} \hookrightarrow L$ induit une injection $\Phi_{\bar{L}} \hookrightarrow \Phi_L$ au-dessus de Φ_A .

(iii) Rappelons le fait suivant : puisque k est séparablement clos, le produit fibré sur k de deux k -schémas irréductibles est encore irréductible. Soit alors $c \in \Phi_A$ une composante irréductible de A_k . Soit V_k un ouvert non vide de c (donc de A_k) sur lequel $\bar{L}_k$ est trivial. D'après le fait rappelé précédemment, $\bar{L}_k|_{V_k} \simeq \mathbb{G}_{m,k} \times_k V_k$ est un ouvert (non vide) irréductible de $\bar{L}_k$. Il est donc contenu dans une composante connexe $c(V_k)$ de $\bar{L}_k$. Si W_k est un autre ouvert non vide de c qui trivialise $\bar{L}_k$, alors il en est de même pour $V_k \cap W_k$. L'ouvert non vide $\bar{L}_k|_{V_k \cap W_k}$ de $\bar{L}_k$ est alors contenu dans $c(V_k)$ et dans $c(W_k)$. Par conséquent, $c(V_k) = c(W_k)$. En recouvrant c par des ouverts trivialisant $\bar{L}_k$, on en déduit que l'image réciproque de c par $\bar{L}_k \rightarrow A_k$ est contenue dans (puis égale à) $c(V_k)$. Ainsi, tout élément de Φ_A a un et un seul antécédent par $\Phi_{\bar{L}} \rightarrow \Phi_A$. $\square$

Revenons à notre $x \in \Phi_{A'}$. Soit $L_K \in \text{Ext}^1(A_K, \mathbb{G}_{m,K})$ un relèvement de x , $\bar{L}$ un $\mathbb{G}_{m,R}$ -torseur sur A étendant L_K , et L son image par $\mathbb{G}_{m,R} \rightarrow G$. Le G -torseur L définit une extension

$$0 \rightarrow G \rightarrow L \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (**)$$

qui est l'antécédent de L_K par la flèche 10. On vérifie alors que l'extension

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Phi_x \xrightarrow{q} \Phi_A \rightarrow 0,$$

image de $(**)$ par la flèche 7 (et donc image de x par la flèche 3), n'est autre que la suite exacte de groupes des composantes déduite de $(**)$ par passage aux fibres spéciales (cf. [1], 3.2(ii)). En particulier, Φ_x est égal au Φ_L du lemme ci-dessus, et $\bar{L}$ nous donne une section s de q , et donc un système de facteurs symétrique $\gamma : \Phi_A \times \Phi_A \rightarrow \mathbb{Z}$. On veut voir quelle information géométrique contient ce γ .

Soient donc $a, b \in \Phi_A$. Relevons a en un élément $a_K \in A(K)(= A(R))$. Soit D_K le diviseur de Weil défini par L_K . Puisque D_K représente un élément de $A'_K(K)$, on sait ¹ qu'on peut trouver une fonction $f_a \in K(A_K) \setminus \{0\}$, telle que

$$T_{a_K}^{-1}(D_K) - D_K = \text{div}(f_a),$$

où T_{a_K} désigne la translation par a_K sur A_K . On peut alors considérer l'ordre d'annulation de f_a sur une composante irréductible c de A_k (par exemple sur b , ou sur la composante neutre 0). Par définition, cet ordre $\text{ord}_c f_a$ est la

¹Cela se déduit par exemple formellement du fait que D_K est primitif.

valuation de $f_a \in K(A_K) = K(A)$ pour la valuation discrète définie par $\mathcal{O}_{A,\zeta}$, ζ désignant le point générique de c . Bosch et Lorenzini obtiennent alors la description suivante du système de facteurs symétrique γ (cf. [1], 3.3).

Théorème 3.2.7 *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$-\gamma(a, b) = s(a) + s(b) - s(a + b) = \text{ord}_b f_a - \text{ord}_0 f_a + s(0).$$

Conclusion

En combinant les parties géométrique et homologique, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.2.8 (Bosch, Lorenzini) *Considérons le pairing de Grothendieck*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Phi_A \times \Phi_{A'} \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

associé à une variété abélienne A_K et sa duale A'_K . Soit $n > 0$ un entier vérifiant $n \cdot \Phi_A = 0$.

Pour $a \in \Phi_A$ et $x \in \Phi_{A'}$, fixons des représentants $a_K \in A_K(K)$ et $[D_K] \in A'_K(K)$, où D_K est un diviseur sur A_K . Soit $f_a \in K(A_K)$ une fonction rationnelle de diviseur $\text{div}(f_a) = T_{a_K}^{-1}(D_K) - D_K$, où T_{a_K} est la translation par a_K sur A_K . Alors

$$\langle a, x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ord}_{i \cdot a} f_a \pmod{\mathbb{Z}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (\text{ord}_{i \cdot a} f_a - \text{ord}_0 f_a) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Démonstration (cf. [1], 3.7) Soit s la section considérée dans le théorème 3.2.7. D'après 3.2.5, et puisque $s(0)$ et $\text{ord}_0 f_a$ sont dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle a, x \rangle = \varphi_x(a) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma(a, i \cdot a) \pmod{\mathbb{Z}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\text{ord}_{i \cdot a} f_a - \text{ord}_0 f_a + s(0)) \pmod{\mathbb{Z}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\text{ord}_{i \cdot a} f_a - \text{ord}_0 f_a) \pmod{\mathbb{Z}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ord}_{i \cdot a} f_a \pmod{\mathbb{Z}}. \square \end{aligned}$$

3.2.2 Le cas des jacobiniennes

Soit X_K une courbe géométriquement connexe, propre et lisse sur K , de jacobienne J_K . Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière de fibre générique X_K . Sous l'hypothèse « k parfait ou $X_K(K)$ non vide», le théorème 2.2.32 donne une description du groupe des composantes Φ_J du modèle de Néron J de J_K , en termes de la matrice d'intersection M et de la matrice des multiplicités géométriques $\Lambda := \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$ de X_k (cf. 2.2.33). Le pairing de Grothendieck associé à la variété jacobienne J_K doit donc s'exprimer en fonction de M et Λ uniquement. C'est ce que montrent Bosch et Lorenzini.

Plus précisément, à partir des matrices M et Λ , ils construisent un accouplement

$$\langle, \rangle_{M, \Lambda} : \Phi_{M, \Lambda} \times \Phi_{M, \Lambda} \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

sur le groupe abélien fini $\Phi_{M, \Lambda} := \text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha'$. Puis, **lorsque la courbe X_K possède un point rationnel**, ils montrent qu'en identifiant la jacobienne J_K avec sa duale J'_K de façon canonique, le pairing de Grothendieck

$$\langle, \rangle_J : \Phi_J \times \Phi_J \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

est canoniquement isomorphe à $\langle, \rangle_{M, \Lambda}$, au sens où l'isomorphisme canonique entre Φ_J et $\Phi_{M, \Lambda}$ du théorème 2.2.32 est compatible avec les accouplements $\langle, \rangle_J$ et $\langle, \rangle_{M, \Lambda}$.

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, Grothendieck avait conjecturé que l'accouplement $\Phi_A \times \Phi_{A'} \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$ était toujours non-dégénéré c.-à-d., les $\mathbb{Z}$ -morphisms

$$\Phi_A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_{A'}, \mathbb{Q} / \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \Phi_{A'} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_A, \mathbb{Q} / \mathbb{Z})$$

sont des isomorphismes. Dans le cas des jacobiniennes, la description purement combinatoire ci-dessus permet à Bosch et Lorenzini de montrer facilement que la conjecture est vraie lorsque le corps résiduel k est parfait, et que $X_K(K) \neq \emptyset$ (cf. 3.2.9). De plus, elle leur permet de construire beaucoup d'exemples, ainsi qu'un contre-exemple à la conjecture dans le cas d'un corps résiduel imparfait (cf. 3.2.3 et 3.2.4).

Nous allons maintenant définir l'accouplement $\langle, \rangle_{M, \Lambda}$, et montrer entre autres sa non-dégénérescence dans le cas parfait. Pour voir qu'il s'agit bien de l'accouplement de Grothendieck, le résultat principal est l'expression de cet accouplement obtenue en 3.2.8. La formule obtenue possède alors une interprétation en termes de «symboles de Néron locaux», et les résultats connus sur ces symboles permettent de conclure.

L'accouplement $\langle, \rangle_{M, \Lambda}$

Soit v un entier ≥ 1 . Soit $M \in M_v(\mathbb{Z})$. On pose

$$\Phi_M := (\mathbb{Z}^v / \text{Im } M)_{\text{tors}}.$$

Pour tout sous-module $Y \subseteq \mathbb{Z}^v$, on note $Y^\perp$ l'orthogonal de Y pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{Z}^v$. Supposons maintenant M symétrique, ce qui entraîne que $\text{Im } M \subseteq (\text{Ker } M)^\perp$. Alors,

$$\Phi_M = (\text{Ker } M)^\perp / \text{Im } M.$$

En effet, $(\text{Ker } M)^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ contient $(\text{Im } M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et ces deux $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels ont même dimension ; ils sont donc égaux. Il en résulte que le quotient $(\text{Ker } M)^\perp / \text{Im } M$ est un sous-groupe de torsion de $\mathbb{Z}^v / \text{Im } M$. Inversement, si $C := {}^t(n_1, \dots, n_v) \in \mathbb{Z}^v$ vérifie $nC \in \text{Im } M$ pour un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors en particulier $nC \in (\text{Ker } M)^\perp$, et puisque $\mathbb{Z}$ est intègre il en résulte que $C \in (\text{Ker } M)^\perp$, et Φ_M coïncide bien avec $(\text{Ker } M)^\perp / \text{Im } M$. Soient $\tau, \tau' \in \Phi_M$. Soient $T, T' \in (\text{Ker } M)^\perp$ des représentants de τ, τ' , et soient $S, S' \in \mathbb{Z}^v$ tels que $MS = nT$ et $MS' = n'T'$ pour des $n, n' \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_M : \Phi_M \times \Phi_M &\rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z} \\ (\tau, \tau') &\mapsto ({}^tS/n)M(S'/n') \pmod{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

On vérifie que $\langle, \rangle_M$ est bien défini, bilinéaire et symétrique (cf. [1], 1.1). De plus,

Théorème 3.2.9 *L'accouplement $\langle, \rangle_M$ est non-dégénéré.*

Rappelons le fait suivant, que nous utiliserons en cours de démonstration. Soit $A \in GL_v(\mathbb{Z})$, et considérons la matrice symétrique $M' := {}^tA^{-1}MA^{-1}$. Alors le morphisme $\mathbb{Z}^v \rightarrow \mathbb{Z}^v$ défini par A induit un isomorphisme

$$\alpha : \Phi_M \xrightarrow{\sim} \Phi_{M'}$$

tel que $\langle x, y \rangle_M = \langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle_{M'}$ pour tout $x, y \in \Phi_M$.

Démonstration du théorème 3.2.9 (cf. [1], 1.3) a) *L'accouplement est non-dégénéré si M est inversible sur $\mathbb{Q}$.* Lorsque M est inversible sur $\mathbb{Q}$, le pairing s'écrit

$$\langle \tau, \tau' \rangle_M = TM^{-1}T'.$$

Soit τ un élément du noyau de $\Phi_M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Soit $T \in \mathbb{Z}^v$ un représentant de τ . Alors pour tout $T' \in \mathbb{Z}^v$, on a ${}^tTM^{-1}T' \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne ${}^tS := {}^tTM^{-1}T' \in \mathbb{Z}^v$, puis $T = MS$ et l'image τ de T dans $\Phi_M = \text{Coker}(M)$ est nulle. L'application $\Phi_M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est donc injective. Pour voir qu'elle est surjective, considérons un élément $\bar{\phi} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}^v$ étant libre, on peut trouver une application $\mathbb{Z}$ -linéaire ϕ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^v & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^v / \text{Im } M & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{Q} / \mathbb{Z}. \end{array}$$

Soit $S \in \mathbb{Q}^v$ tel que $\phi(T') = {}^tST'$ pour tout $T' \in \mathbb{Z}^v$. Puisque $\phi(\text{Im } M) \subseteq \mathbb{Z}$, on a ${}^tSMS' \in \mathbb{Z}^v$ pour tout $S' \in \mathbb{Z}^v$, si bien que $T := MS$ appartient à $\mathbb{Z}^v$. Soit τ l'image de T dans Φ_M . Pour tout $T', S' \in \mathbb{Z}^v$ et $n' \in \mathbb{Z}$ vérifiant $MS' = n'T'$, on a alors, en notant τ' l'image de T' dans Φ_M :

$$\langle \tau, \tau' \rangle_M = {}^tSM(S'/n') = {}^tST' = \phi(T') = \bar{\phi}(\tau')$$

et $\langle \tau, \cdot \rangle_M = \bar{\phi}$.

b) *Le $\mathbb{Z}$ -module $\text{Ker } M$ est libre et possède un supplémentaire libre dans $\mathbb{Z}^v$. En effet, $\mathbb{Z}$ est un anneau principal, donc $\text{Ker } M \subseteq \mathbb{Z}^v$ est un $\mathbb{Z}$ -module libre. De même, M induit une injection $\mathbb{Z}^v / \text{Ker } M \hookrightarrow \mathbb{Z}^v$, donc $\mathbb{Z}^v / \text{Ker } M$ est également libre. Le $\mathbb{Z}$ -module*

$$\text{Ker } M \oplus \mathbb{Z}^v / \text{Ker } M$$

est donc libre de rang v c.-à-d., est isomorphe à $\mathbb{Z}^v$.

c) *On se ramène au cas a).* Soient r le rang de $\text{Ker } M$ et $\{V_1, \dots, V_n\}$ une $\mathbb{Z}$ -base de $\mathbb{Z}^v$ telle que les vecteurs $V_1, \dots, V_r$ forment une $\mathbb{Z}$ -base de $\text{Ker } M$. Soit $B \in GL_v(\mathbb{Z})$ la matrice dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est le vecteur V_j et considérons la matrice symétrique $M' := {}^tBMB$. Notons $\{E_1, \dots, E_n\}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^v$. Si $j \leq r$, $M'E_j = {}^tB(MV_j) = 0$, d'où M' est de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in M_{v-r}(\mathbb{Z})$. Le $\mathbb{Z}$ -module $\text{Im } A$ est alors de même rang que $\text{Im } M'$, qui est lui-même de même rang que $\text{Im } M$ (puisque $B \in GL_v(\mathbb{Z})$), à savoir $v - r$. Par conséquent, le sous-module de torsion du conoyau de M' est exactement $\mathbb{Z}^{v-r} / \text{Im } A$, avec A inversible sur $\mathbb{Q}$. Maintenant, $(\mathbb{Z}^v / \text{Im } M)_{\text{tors}}$ muni du pairing $\langle, \rangle_M$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}^v / \text{Im } M')_{\text{tors}}$ muni du pairing $\langle, \rangle_{M'}$ (appliquer le fait rappelé avant la démonstration avec $B^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$). Le théorème se déduit donc de a). $\square$

Regardons maintenant le cas où la matrice M est celle donnée au début de cette sous-section 3.2.2 c.-à-d., est associée à la fibre spéciale X_k du modèle régulier $X \rightarrow S$ de la courbe X_K . Dans cette situation, introduisons aussi le vecteur

$$V := {}^t(d_1, \dots, d_v) \in \mathbb{Z}^v$$

des multiplicités des composantes de X_k . Le groupe

$$\Phi_{M,\Lambda} := (\mathbb{Z}^v / \text{Im } \Lambda^{-1}M)_{\text{tors}} = \text{Ker } \beta' / \text{Im } \alpha' = \text{Ker}({}^t(\Lambda V)) / \text{Im}(\Lambda^{-1}M)$$

est alors un sous-groupe de

$$\Phi_M := (\mathbb{Z}^v / \text{Im } M)_{\text{tors}} = \text{Ker } \beta / \text{Im } \alpha = \text{Ker}({}^tV) / \text{Im } M$$

(où la deuxième égalité se démontre de façon analogue à ce qui a été fait dans la remarque 2.2.33). Plus précisément, on a une suite exacte canonique

$$0 \rightarrow \Phi_{M,\Lambda} \rightarrow \Phi_M \rightarrow \text{Coker } \lambda$$

déduite de la suite exacte canonique de complexes (verticaux)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^v & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}^v & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda^{-1}\alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^v & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{Z}^v & \longrightarrow & \text{Coker } \lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta\lambda & & \downarrow \beta & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Par restriction, l'accouplement $\langle, \rangle_M$ définit un accouplement symétrique

$$\langle, \rangle_{M,\Lambda} : \Phi_{M,\Lambda} \times \Phi_{M,\Lambda} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En admettant provisoirement que $\langle, \rangle_{M,\Lambda}$ coïncide avec l'accouplement de Grothendieck $\langle, \rangle_J$ quand on identifie Φ_J à $\Phi_{M,\Lambda}$ (et J'_K à J_K), on peut alors démontrer le théorème selon lequel la conjecture de Grothendieck est vraie pour les jacobiniennes de courbes possédant des points rationnels, si on suppose de plus le corps résiduel k parfait.

Théorème 3.2.10 *Soit S un schéma local strictement hensélien, de corps de fonctions K et de corps résiduel k . Soit X_K une courbe géométriquement connexe, propre et lisse sur K . Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière de fibre générique X_K . Choisissons une indexation $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$ des composantes irréductibles de la fibre spéciale X_k . Soient M la matrice d'intersection associée et $\Lambda = \text{diag}(e_1, \dots, e_v)$ la matrice des multiplicités géométriques. Supposons le corps k parfait, ou que X_K possède un point rationnel. Alors*

(i) *Le groupe des composantes Φ_J de la jacobienne J_K de X_K s'identifie canoniquement à $\Phi_{M,\Lambda}$, et l'application λ induit un plongement*

$$\Phi_J = \Phi_{M,\Lambda} \hookrightarrow \Phi_M.$$

(ii) *Le pairing $\langle, \rangle_{M,\Lambda}$ sur $\Phi_{M,\Lambda}$, restriction du pairing $\langle, \rangle_M$ sur Φ_M , induit sur Φ_J un pairing bien défini, i.e. indépendant de l'indexation choisie pour les composantes irréductibles de X_k .*

(iii) *Le pairing $\langle, \rangle_M$ est non-dégénéré. Le pairing $\langle, \rangle_{M,\Lambda}$ est non-dégénéré si Λ est la matrice identité, ce qui est par exemple le cas si k est parfait.*

(iv) *Le pairing $\langle, \rangle_{M,\Lambda}$ restreint à la partie première à $p := \text{car}(k) \geq 0$ de $\Phi_{M,\Lambda} \times \Phi_{M,\Lambda}$ est toujours parfait.*

Démonstration (cf. [1], 2.3) (i) L'identification $\Phi_J = \Phi_{M,\lambda}$ provient du théorème 2.2.32, et l'injection induite par λ a été vue plus haut.

(ii) Soit $A \in M_v(\mathbb{Z})$ une matrice de permutation, si bien que ${}^t A = A^{-1}$. Soit M' la matrice symétrique $AM^t A$, V' le vecteur AV et Λ' la matrice diagonale $A\Lambda^t A$ (multiplier à gauche (resp. à droite) une matrice par une matrice de permutation permute les lignes (resp. les colonnes) de la matrice). Considérons alors l'isomorphisme $\Phi_M \xrightarrow{\sim} \Phi_{M'}$ compatible avec les pairings $\langle, \rangle_M$ et $\langle, \rangle_{M'}$, induit par multiplication par A (cf. ce qui précède la preuve de 3.2.9). On vérifie directement qu'il induit un isomorphisme $\Phi_{M,\Lambda} \xrightarrow{\sim} \Phi_{M',\Lambda'}$.

(iii) C'est le théorème 3.2.9 (avec 2.2.17(i) pour le cas où k est parfait).

(iv) Puisque $\langle, \rangle_M$ est non-dégénéré, i.e.

$$\Phi_M \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme, on en déduit que pour tout nombre premier l ,

$$\Phi_M(l) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi_M(l), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(où on a noté $\Phi_M(l)$ la l -partie de Φ_M) est un isomorphisme ; autrement dit $\langle, \rangle_M$ restreint à une l -partie de Φ_M reste non-dégénéré. Il reste donc à voir que si $l \neq p$, l'injection $\Phi_{M,\Lambda} \hookrightarrow \Phi_M$ est un isomorphisme sur les l -parties. Or, d'après 2.2.17(i), $\mathrm{Coker} \lambda$ est un p -groupe. Le résultat s'en déduit donc en considérant la suite exacte

$$0 \rightarrow \Phi_{M,\Lambda} \rightarrow \Phi_M \rightarrow \mathrm{Coker} \lambda$$

vue plus haut. $\square$

Symboles de Néron

Comme annoncé plus haut, nous allons maintenant relier le pairing de Grothendieck à la théorie des symboles de Néron locaux, grâce à la formule obtenue en 3.2.8. On pourra alors montrer que $\langle, \rangle_J$ et $\langle, \rangle_{M,\Lambda}$ coïncident, via l'identification $\Phi_J \simeq \Phi_{M,\Lambda}$.

Commençons donc par quelques définitions et résultats concernant les symboles de Néron. Tout d'abord, on conserve les notations K , π et k , concernant l'anneau de valuation discrète strictement hensélien R . Mais, pour travailler avec les symboles de Néron, il faut pour l'instant faire une hypothèse supplémentaire sur la valuation discrète v de K définie par π . En notant encore v l'unique prolongement de v à une clôture algébrique K^a de K fixée, on suppose que

pour toute extension finie L/K , $[L_v : K_v] = [L : K]$, où L_v et K_v désignent respectivement les complétions de L et de K par rapport à v (cette hypothèse est par exemple vérifiée si K est complet pour v , et c'est le cas auquel nous nous ramènerons).

Soit Y_K un K -schéma de type fini, projectif, lisse et géométriquement irréductible. Notons $Z_0(Y_K)$ le groupe des 0-cycles de degré zéro sur Y_K , et $\text{Div}_a(Y_K)$ le groupe des diviseurs (de Cartier) sur Y_K qui sont «algébriquement équivalents à zéro». Définissons cette dernière notion de façon *ad hoc* dans les deux cas qui nous intéresseront :

- Y_K est une courbe X_K (projective, lisse et géométriquement irréductible), et alors $\text{Div}_a(X_K) := Z_0(X_K)$;
- Y_K est une variété abélienne A_K , et alors $\text{Div}_a(A_K)$ est formé des diviseurs primitifs, i.e. dont la classe d'équivalence linéaire appartient à $A'_K(K)$ (où A'_K est la duale de A_K).

Si $D_K \in \text{Div}_a(Y_K)$, une *fonction de Weil* sur Y_K de diviseur D_K est une application

$$\lambda_{D_K} : (Y_K \setminus \text{Supp } D_K)(K^a) \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant la condition suivante : si f est une équation locale de D_K sur un ouvert $U_K \subseteq Y_K$, alors il existe une fonction « v -continue et localement bornée»

$$\alpha : U_K(K^a) \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tout $x \in (U_K \setminus \text{Supp } D_K)(K^a)$,

$$\lambda_{D_K}(x) = v(f(x)) + \alpha(x).$$

Nous ne développerons pas ce que signifie « v -continue et localement bornée», puisque nous n'en aurons pas besoin ici (pour des définitions précises, cf. [7], Chap. 10, §1). Les fonctions constantes forment un groupe Γ de fonctions de Weil associées au diviseur nul. Si $f \in K(Y_K)$, un exemple de fonction de Weil (associée au diviseur principal $\text{div}(f)$) est donné par

$$\lambda_f(x) = v(f(x))$$

pour tout $x \in (Y_K \setminus \text{Supp } \text{div}(f))(K^a)$.

On peut maintenant définir les fonctions de Néron (cf. [14], Chap. II.8, Th. 2, ou [7], Chap. 11, Th. 3.1).

Théorème 3.2.11 [Existence et unicité des fonctions de Néron] *Pour tout K -schéma Y_K de type fini, projectif, lisse et géométriquement irréductible, et pour tout $D_K \in \text{Div}_a(Y_K)$, il existe une fonction de Weil λ_{D_K} sur Y_K vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) Si $D_K, D'_K \in \text{Div}_a(Y_K)$, alors $\lambda_{D_K + D'_K} \equiv \lambda_{D_K} + \lambda_{D'_K} \pmod{\Gamma}$.
- (ii) Si $D_K = \text{div}(f)$, alors $\lambda_{D_K} \equiv \lambda_f \pmod{\Gamma}$.
- (iii) Si $\varphi : Y_K \rightarrow Y'_K$ est un morphisme de K -schémas du type considéré, alors pour tout $D'_K \in \text{Div}_a(Y'_K)$ tel que $D_K := \varphi^{-1}(D'_K)$ est défini, on a

$$\lambda_{D_K} \equiv \lambda_{D'_K} \circ \varphi \pmod{\Gamma}.$$

De plus, Y_K et $D_K \in \text{Div}_a(Y_K)$ étant fixés, une fonction de Weil λ'_{D_K} vérifie (i), (ii) et (iii) si et seulement si $\lambda_{D_K} \equiv \lambda'_{D_K} \pmod{\Gamma}$. On peut donc bien définir, à une fonction constante près, la fonction de Néron λ_{D_K} associée au diviseur D_K .

Les fonctions de Néron sur Y_K permettent de définir le symbole de Néron en v sur Y_K . Pour cela, considérons un 0-cycle de degré zéro

$$\mathbf{a}_K = \sum_y n_y \cdot [y],$$

où les y sont les points fermés de Y_K et les n_y des entiers relatifs presque tous nuls. Pour chaque y , notons $K(y)$ le corps résiduel de y , et $s_y := [K(y) : K]_s$ (resp. $i_y := [K(y) : K]_i$) son degré de séparabilité (resp. d'inséparabilité) sur K . Soient de plus $y^1, \dots, y^{s_y}$ les points de $Y_K \times_K K^a$ qui sont au-dessus de y . Par définition, le 0-cycle de degré zéro induit par $\mathbf{a}_K$ sur $Y_K \times_K K^a$ est

$$\mathbf{a}_K \otimes_K K^a := \sum_y \sum_{l=1}^{s_y} n_y i_y \cdot [y^l].$$

Si maintenant D_K est un élément de $\text{Div}_a(Y_K)$ dont le support est disjoint de celui de $\mathbf{a}_K$, on pose

$$(\mathbf{a}_K, D_K) := \lambda_{D_K}(\mathbf{a}_K \otimes_K K^a) := \sum_y \sum_{l=1}^{s_y} n_y i_y \cdot \lambda_{D_K}(y^l) \in \mathbb{R},$$

où λ_{D_K} est la fonction de Néron associée. On notera que $(\mathbf{a}_K, D_K)$ ne dépend pas du choix de λ_{D_K} , puisque $\mathbf{a}_K$ (et donc $\mathbf{a}_K \otimes_K K^a$) est de degré zéro. Le symbole $(,)$ est appelé le *symbole de Néron local en v* sur Y_K .

Corollaire 3.2.12 *Le symbole de Néron $(,)$ vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) $(\mathbf{a}_K, D_K)$ est bilinéaire en $\mathbf{a}_K$ et D_K .
- (ii) Soit $f \in K(Y_K)^*$. Soit $\mathbf{a}_K \in Z_0(Y_K)$ ne rencontrant pas le support de $\text{div}(f)$, et écrivons $\mathbf{a}_K \otimes_K K^a = \sum_{j=1}^r m_j \cdot z_j$. Alors

$$(\mathbf{a}_K, D_K) = \sum_{j=1}^r m_j v(f(z_j)) \in \mathbb{Z}.$$

- (iii) Si $\varphi : Y'_K \rightarrow Y_K$ est un K -morphisme, alors

$$(\varphi(\mathbf{a}'_K), D_K) = (\mathbf{a}'_K, \varphi^{-1}(D_K))$$

pour tout $\mathbf{a}'_K \in Z_0(Y'_K)$ et $D_K \in \text{Div}_a(Y_K)$ tels que les deux membres de l'égalité sont définis c.-à-d., le support de $\varphi(\mathbf{a}'_K)$ ne rencontre pas celui de D_K .

Après ces généralités sur les symboles de Néron, nous nous concentrons maintenant sur le cas où Y_K est une courbe X_K (propre, lisse, et géométriquement connexe). Dans ce cas, le symbole de Néron s'exprime à l'aide de données issues de la théorie de l'intersection sur un modèle régulier X (quelconque) de la courbe. Ces résultats sont dus à Gross, puis Hriljac (voir [1], sect. 4, pour des références précises). C'est une étape importante dans la démarche qui consiste à exprimer le pairing de Grothendieck associé à la jacobienne de X_K , en termes de l'intersection sur X . Une preuve directe est donnée par les auteurs de [1] (Th. 4.3). Nous nous contenterons ici de donner l'énoncé du théorème, et nous détaillerons plutôt la façon dont Bosch et Lorenzini l'ont utilisé.

Soit donc $X \rightarrow S = \text{Spec}(R)$ une surface fibrée régulière de fibre générique X_K . On conserve les notations concernant l'intersection sur X introduites au chapitre 2. On rappelle que l'on a défini au début de la section 2.2.3 un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \rho : \text{Pic}(X) &\rightarrow \mathbb{Z}^v \\ \text{classe de } \mathcal{L} &\mapsto (\deg_i(\mathcal{L}|_{X_s}))_{i=1,\dots,v}. \end{aligned}$$

Grâce à l'identification $\text{CaCl}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)$, cela définit un morphisme

$$\begin{aligned} \rho : \text{CaCl}(X) &\rightarrow \mathbb{Z}^v \\ \text{classe de } D &\mapsto (\deg_i(\mathcal{O}_X(D)|_{X_s}))_{i=1,\dots,v} = (D \cdot \Gamma_i)_{i=1,\dots,v}, \end{aligned}$$

et on notera encore ρ le morphisme obtenu en étendant les scalaires à $\mathbb{Q}$. Si maintenant D est un diviseur (de Cartier) quelconque sur X (en particulier, D peut être horizontal), et $[D]$ sa classe dans $\text{CaCl}(X)$, il existe $A \in \text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $\rho([D]) = \rho([A])$. En effet, d'après le théorème 2.2.30, on a un complexe

$$\text{Div}_s(X) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^v \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}$$

et les $\mathbb{Z}$ -modules $\text{Im } \alpha$ et $\text{Ker } \beta$ sont de même rang (on rappelle que, par définition, α et β ne diffèrent de α' et β' que par un $\mathbb{Z}$ -endomorphisme λ de $\mathbb{Z}^v$ qui est inversible sur $\mathbb{Q}$). Autrement dit, le complexe

$$\text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}^v \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}$$

est exact. Or, $\rho([D])$ est dans le noyau de β (par le même calcul qui nous a montré en 2.2.30 que $\beta \circ \alpha = 0$). Il existe donc $A \in \text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $\alpha(A) = \rho([D])$, et par définitions, $\alpha(A) = \rho([A])$. De plus, la matrice de α dans les bases canoniques est exactement la matrice d'intersection M de X_s . Ainsi, pour tout diviseur D sur X , il existe $A \in \text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $\rho([D]) = \rho([A]) = MA$. L'énoncé concernant les symboles de Néron sur la courbe X_K est alors le suivant.

Théorème 3.2.13 *Soit $X \rightarrow S$ une surface fibrée régulière dont la fibre générique X_K est lisse et géométriquement irréductible. Soient $D_K, D'_K \in \text{Div}_a(X_K) = Z_0(X_K)$ à supports disjoints. Notons D et D' leurs adhérences schématiques respectives dans X , et soit $A \in \text{Div}_s \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $\rho([D]) = \rho([A]) = MA$ (cf. ci-dessus). On a alors*

$$(D_K, D'_K) = -(A \cdot D') + (D \cdot D') \in \mathbb{Q}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser au symbole de Néron sur une variété abélienne $Y_K = A_K$. Soit $\mathbf{a}_K \in Z_0(A_K)$ dont le support est constitué de points K -rationnels, et D_K un diviseur primitif sur A_K , dont le support est disjoint de celui de $\mathbf{a}_K$. D'après [14], Chap. III.4, Th. 1, ou [7], Chap. 11, Th. 5.1, on a une décomposition

$$(\mathbf{a}_K, D_K) = i(\mathbf{a}_K, D_K) + j(\mathbf{a}_K, D_K)$$

où le symbole $i(\cdot)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Le symbole $j(\cdot)$ vérifie quant à lui les propriétés suivantes (cf. [14] Chap. III, Prop. 1 et 2(ii)).

Proposition 3.2.14 *Soit $\mathbf{a}_K = \sum_{i=1}^r n_i \cdot a_i \in Z_0(A_K)$, avec $a_i \in A_K(K)$ et $n_i \in \mathbb{Z}$, et D_K un diviseur primitif sur A_K , dont le support ne contient pas les a_i . Alors :*

(i) $j(\mathbf{a}_K, D_K)$ est bilinéaire en $\mathbf{a}_K$ et D_K .

(ii) Le symbole j est invariant par translation c.-à-d., si $x_K \in A_K(K)$, alors

$$j(T_{x_K}^{-1} \mathbf{a}_K, T_{x_K}^{-1} D_K) = j(\mathbf{a}_K, D_K).$$

(iii) Si $D_K = \text{div}(f)$ pour un $f \in K(A_K)^*$, alors

$$j\left(\sum_{i=1}^r n_i \cdot a_i, \text{div}(f)\right) = \sum_{i=1}^r n_i \text{ord}_{\Gamma(a_i)} f \in \mathbb{Z},$$

où $\Gamma(a_i)$ désigne la composante de A_k sur laquelle a_i se spécialise.

(iv) Plus généralement, D_K étant fixé, $j(\mathbf{a}_K, D_K)$ ne dépend que de la spécialisation de $\mathbf{a}_K$ dans Φ_A c.-à-d.,

$$j\left(\sum_{i=1}^r n_i \cdot a_i, D_K\right) = j\left(\sum_{i=1}^r n_i \cdot a'_i, D_K\right)$$

si $a'_i \in A_K(K)$ (non contenu dans $\text{Supp } D_K$) a la même spécialisation que a_i dans Φ_A .

Le lien entre le pairing de Grothendieck et les symboles de Néron apparaît au point (iii) de cette proposition. D'après le théorème 3.2.8 de Bosch et Lorenzini (dont on conserve les notations), on a en effet

$$\langle a, x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} j((i \cdot a_K) - (0), \text{div}(f_a)) \pmod{\mathbb{Z}},$$

dès lors qu'aucun $i \cdot a_K$, $i = 0, \dots, n-1$, n'appartient au support de $\text{div}(f_a) = T_{a_K}^{-1}D_K - D_K$. Cette dernière condition est toujours réalisable : un représentant a_K de a étant fixé, on peut toujours trouver, dans la classe d'équivalence linéaire de diviseurs représentant x , un diviseur D_K dont le support évite les $i \cdot a_K$ (cf. par exemple [10], 9.1.11).

Grâce aux autres points de la proposition, on peut simplifier l'expression obtenue.

Théorème 3.2.15 *Comme au théorème 3.2.8, considérons le pairing de Grothendieck*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Phi_A \times \Phi_{A'} \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

associé à une variété abélienne A_K et sa duale A'_K . Alors, pour tout $a \in \Phi_A$ et $x \in \Phi_{A'}$, on a

$$\langle a, x \rangle = -j((a_K) - (0), D_K) \pmod{\mathbb{Z}},$$

où $a_K \in A_K(K)$ est un représentant de a , et D_K un diviseur sur A_K tel que $[D_K] \in A'_K(K)$ représente x , et dont le support évite 0 et a_K .

Démonstration (cf. [1], 4.4) Commençons d'abord avec un diviseur D_K dont le support évite les points $i \cdot a_K$, $i = 0, \dots, n-1$. D'après la formule obtenue ci-dessus, où n est un entier > 0 vérifiant $n \cdot \Phi_A = 0$ et f_a est une fonction rationnelle telle que $\text{div}(f_a) = T_{a_K}^{-1}D_K - D_K$, on a donc

$$\langle a, x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} j((i \cdot a_K) - (0), T_{a_K}^{-1}D_K - D_K) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Maintenant, par bilinéarité de j , chaque $j((i \cdot a_K) - (0), T_{a_K}^{-1}D_K - D_K)$ se décompose en

$$j((i \cdot a_K) - (0), T_{a_K}^{-1}D_K) - j((i \cdot a_K) - (0), D_K).$$

De plus, l'invariance par translation de j assure que

$$j((i \cdot a_K) - (0), T_{a_K}^{-1}D_K) = j(((i+1) \cdot a_K) - (a_K), D_K).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} j((i \cdot a_K) - (0), T_{a_K}^{-1}D_K - D_K) \\ = & \sum_{i=1}^{n-1} j(((i+1) \cdot a_K) - (a_K), D_K) - \sum_{i=1}^{n-1} j((i \cdot a_K) - (0), D_K) \\ = & j((n \cdot a_K) - (a_K) - (n-1) \cdot (a_K) + (n-1) \cdot (0), D_K) \end{aligned}$$

(où on a utilisé à nouveau la bilinéarité de j pour la seconde égalité). Or, $n \cdot a_K$ et 0 ont même image par le morphisme de groupes $A_K(K) \rightarrow \Phi_A$ c.-à-d., ont la même spécialisation dans Φ_A . La quantité précédente est donc égale à

$$j((0) - (a_K) - (n-1) \cdot (a_K) + (n-1) \cdot (0), D_K),$$

ou encore, par bilinéarité de j ,

$$-n \cdot j((a_K) - (0), D_K).$$

D'où le résultat pour un D_K dont le support évite les itérés de a_K . Maintenant, si $\widetilde{D}_K$ est un représentant de x dont le support évite seulement 0 et a_K , alors le réel $j((a_K) - (0), \widetilde{D}_K)$ est bien défini, et ne diffère du nombre rationnel $j((a_K) - (0), D_K)$ que par un élément de $\mathbb{Z}$ (d'après 3.2.14, (i) et (iii)). La quantité $j((a_K) - (0), \widetilde{D}_K)$ est donc un nombre rationnel, et

$$\langle a, x \rangle = -j((a_K) - (0), \widetilde{D}_K) \pmod{\mathbb{Z}}. \square$$

A partir de maintenant, on ne fait plus d'hypothèse particulière sur le corps des fractions K de l'anneau de valuation discrète strictement hensélien R . On considère une courbe X_K propre, lisse, géométriquement connexe, de genre g et possédant un point rationnel. Soit J_K la jacobienne de X_K . Si $P \in X_K(K)$, on sait ² qu'on a un morphisme de k -schémas $h : X_K \rightarrow J_K$, qui induit sur les points rationnels l'application

$$\begin{aligned} X_K(K) &\rightarrow J_K(K) \\ Q &\mapsto [Q] - [P]. \end{aligned}$$

L'idée de ce qui va suivre est la suivante. Supposons K complet (on verra qu'on peut s'y ramener). Par le théorème précédent, le pairing de Grothendieck associé à J_K s'exprime alors en termes du symbole de Néron sur J_K . Grâce à la flèche h , et aux propriétés de functorialité des symboles de Néron (cf. 3.2.12(iii)), on peut obtenir une expression du pairing en termes du symbole de Néron sur la courbe X_K , et donc en termes de l'intersection sur un modèle régulier de X_K , d'après 3.2.13.

Avant d'appliquer cette méthode, rappelons encore que la jacobienne J_K est auto-duale. Plus précisément, soit $r \in \mathbb{N}^*$, et considérons X_K^r , le produit sur K de r copies de X_K . On a un morphisme de K -schémas $X_K^r \rightarrow J_K$, qui est défini sur les points à valeurs dans un K -schéma quelconque par

$$(P_1, \dots, P_r) \mapsto h(P_1) + \dots + h(P_r).$$

Cette formule étant symétrique en les P_i , le morphisme qu'elle définit passe au quotient par le groupe symétrique sur r lettres, et induit un morphisme

²Pour tous les rappels concernant les jacobiniennes, on se réfère à [11].

de K -schémas $h^{(r)} : X_K^{(r)} \rightarrow J_K$, du produit symétrique sur K de r -copies de X_K vers J_K . L'image de $h^{(g-1)}$ est un diviseur premier Θ sur J_K , appelé le *diviseur theta* défini par h . Il existe alors un morphisme de K -variétés abéliennes $\varphi_{[\Theta]} : J_K \rightarrow J'_K$, qui induit sur les groupes de points rationnels l'application

$$\begin{aligned} J_K(K) &\rightarrow J'_K(K) \\ a_K &\mapsto [T_{a_K}^{-1}\Theta] - [\Theta]. \end{aligned}$$

Un résultat de la théorie des jacobiniennes est que ce morphisme est un isomorphisme. L'isomorphisme inverse est l'opposé de l'unique morphisme de K -variétés abéliennes $h' : J'_K \rightarrow J_K$, défini par la correspondance divisorielle $(h \times 1)^* \mathcal{P}$ entre la courbe pointée (X_K, P) et la variété abélienne J'_K , où $\mathcal{P}$ désigne le faisceau de Poincaré sur $J_K \times_K J'_K$. Le morphisme induit par h' sur les groupes de points rationnels est donné par

$$\begin{aligned} J'_K(K) &\rightarrow J_K(K) \\ a'_K &\mapsto h^* \mathcal{P}_{a'_K}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on identifiera J'_K à J_K par h' et $-\varphi_{[\Theta]}$, ainsi que J à J' par les morphismes étendus aux modèles de Néron. Cette identification est canonique, au sens où elle ne dépend pas du choix de P . En effet, si $\tilde{P}$ est un autre point rationnel sur X_K , alors $\tilde{h}$ et h ne diffèrent que d'une translation, donc $\tilde{\Theta}$ et Θ aussi, ce qui entraîne que $\varphi_{[\Theta]} = \varphi_{[\tilde{\Theta}]}$. Via cette identification, le pairing de Grothendieck $\langle, \rangle$ associé à J_K et J'_K devient un accouplement

$$\langle, \rangle_J : \Phi_J \times \Phi_J \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le théorème est alors le suivant.

Théorème 3.2.16 (Bosch, Lorenzini) *Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète strictement hensélien R arbitraire. Soit J_K la jacobienne d'une courbe propre, lisse et géométriquement connexe X_K . Supposons que X_K possède un point rationnel, et identifions la duale J'_K à J_K à l'aide du morphisme canonique h' défini ci-dessus.*

Soit $X \rightarrow S := \text{Spec}(R)$ une surface fibrée régulière de fibre générique X_K . Soit M la matrice d'intersection de X_k , et soit Λ la matrice des multiplicités géométriques de X_k . Identifions le groupe des composantes Φ_J du modèle de Néron J de J_K avec le groupe $\Phi_{M,\Lambda}$ (cf. 2.2.32).

L'accouplement de Grothendieck

$$\langle, \rangle_J : \Phi_J \times \Phi_J \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

coïncide alors avec l'accouplement

$$\langle, \rangle_{M,\Lambda} : \Phi_{M,\Lambda} \times \Phi_{M,\Lambda} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

considéré en 3.2.10.

Au cours de la démonstration, nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme suivant.

Lemme 3.2.17 *On conserve les notations du théorème 3.2.16. Soit W_K un ouvert non vide de J_K . Alors l'application composée suivante est surjective :*

$$W_K(K) \hookrightarrow J_K(K) = J(R) \rightarrow \Phi_J.$$

Démonstration du Lemme 3.2.17 Soit $c \in \Phi_J$ une composante de J_k . Soit F_K le fermé complémentaire de W_K dans J_K , muni de sa structure réduite. Puisque J_K est irréductible, F_K est de dimension $< \dim J_K$. Soit F_K^i une composante irréductible de F_K , munie de sa structure réduite, et considérons son adhérence schématique F^i dans J . En notant F_k^i sa fibre spéciale, on a, d'après 1.0.3,

$$\dim F_k^i \leq \dim F_K < \dim J_K = \dim J_k \quad \text{et} \quad \dim J_k = \dim c.$$

Si $F_K^1, \dots, F_K^r$ sont les composantes irréductibles de F_K , la réunion

$$\bigcup_{i=1}^r F_k^i$$

ne contient donc pas la composante c toute entière. Or, J_k est lisse et k est séparablement clos, donc $J_k(k)$ est dense dans J_k (cet argument a déjà été vu lors de la définition du groupe des composantes). Puisque c est un ouvert de J_k , on peut donc trouver, dans c , un point k -rationnel p_k qui n'appartient pas à la réunion des F_k^i . Soient p_R un antécédent de p_k par la surjection $J_k(k) \leftarrow J(R)$ (R est hensélien), et $p_K \in J_K(K)$ le K -point induit. Alors p_K n'appartient pas à F_K , sinon il serait dans une composante irréductible F_K^i , l'image de p_R dans J serait contenue dans l'adhérence schématique F^i , et p_k serait dans F_k^i , une contradiction. Ainsi, p_K est antécédent de c par l'application composée de l'énoncé. $\square$

Démonstration du Théorème 3.2.16 (cf. [1], 4.6) On peut supposer le corps K complet. La raison pour cela est que les deux objets avec lesquels on travaille, à savoir le modèle régulier X et le modèle de Néron J , commutent au changement de base $R \rightarrow \widehat{R}$, où $\widehat{R}$ est le complété de R par rapport à la valuation discrète v définie par l'uniformisante π de R . Pour le modèle régulier X , cela a été vu en 1.2.7(b) (et en outre 1.2.7(a) dit que la fibre spéciale de X reste la même après le changement de base $R \rightarrow \widehat{R}$). Pour le modèle de Néron J , voir directement la preuve de l'article et les références qui s'y trouvent.

Le corps K étant complet pour la valuation v , on peut utiliser la théorie des symboles de Néron en v , et appliquer la méthode annoncée plus haut : à partir de l'expression du pairing de Grothendieck obtenue en 3.2.15, utiliser

la functorialité des symboles de Néron pour se ramener aux symboles sur la courbe, que l'on sait exprimer en fonction de l'intersection sur un modèle régulier. La seule précaution à prendre est d'assurer que les symboles avec lesquels on travaille sont tous bien définis.

Soient $a, x \in \Phi_J$. Choisissons des représentants $a_K, x_K \in J_K(K)$ quelconques de a et x . En notant encore $-\varphi_{[\Theta]}$ l'identification

$$\Phi_J \xrightarrow{\sim} \Phi_{J'}$$

induite par $-\varphi_{[\Theta]} : J_K \rightarrow J'_K$, on a alors

$$\langle a, x \rangle_J = \langle a, -\varphi_{[\Theta]}(x) \rangle \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Notons Θ^- le pull-back de Θ par l'automorphisme de J_K de passage à l'opposé, et $\Theta_{y_K}^-$ le translaté de Θ^- par y_K , si $y_K \in J_K(K)$. On sait alors que $\varphi_{[\Theta_{y_K}^-]} = \varphi_{[\Theta]}$. On a donc

$$\langle a, x \rangle_J = \langle a, -\varphi_{[\Theta_{y_K}^-]}(x) \rangle \pmod{\mathbb{Z}}.$$

En choisissant pour y_K un point rationnel qui se spécialise en $0 \in \Phi_J$, si bien que $x_K - y_K$ se spécialise en $x \in \Phi_J$, un représentant de $-\varphi_{[\Theta_{y_K}^-]}(x)$ est donné par

$$-(T_{x_K - y_K}^{-1} \Theta_{y_K}^- - \Theta_{y_K}^-) = T_{-x_K + y_K}^{-1} \Theta_{y_K}^- - \Theta_{y_K}^- = \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-.$$

De plus, a_K étant fixé, il résulte du lemme 3.2.17 que x_K et y_K peuvent être choisis de telle sorte que le support de $\Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-$ évite les points rationnels a_K et 0 de J_K . Pour de tels choix, on a, d'après 3.2.15,

$$\langle a, x \rangle_J = -j((a_K) - (0), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

D'autre part, pour tout $b_K \in J_K(K)$ qui se spécialise en $0 \in \Phi_J$, et qui n'appartient pas au support de $\Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-$, on a également

$$\langle a, x \rangle_J = -j((a_K) - (b_K), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Nous allons maintenant utiliser la functorialité des symboles de Néron, en conjonction avec le lemme suivant (cf. [11], Lem. 6.7) :

1. Pour tout $z_K \in U_K(K)$, l'image réciproque $(h^{(g)})^{-1}(z_K)$ ne contient qu'un seul point $D(z_K) \in X_K^{(g)}(K)$.
2. $h^{-1}(\Theta_{z_K}^-)$ est un diviseur de Cartier sur X_K et, en interprétant $D(z_K)$ comme un diviseur de Cartier effectif de degré g sur X_K , on a

$$h^{-1}(\Theta_{z_K}^-) = D(z_K).$$

D'après le lemme 3.2.17, on peut trouver, dans $U_K(K)$, des représentants a_K, b_K de $a, 0 \in \Phi_J$. Ecrivons alors

$$D(a_K) = \sum_{i=1}^g (a_i), \quad D(b_K) = \sum_{i=1}^g (b_i),$$

où les a_i et b_i sont des points fermés de X_K . Posons $h(a_i) = \bar{a}_i$ et $h(b_i) = \bar{b}_i$ pour tout i . Toujours d'après 3.2.17, les points rationnels x_K et y_K ci-dessus (i.e. représentant respectivement les éléments x et 0 de Φ_J) peuvent être choisis dans $U_K(K)$, et de façon à ce que le support du diviseur $\Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-$ évite a_K, b_K , les $\bar{a}_i$ et les $\bar{b}_i$. Avec ces choix, les trois symboles suivants sont bien définis :

$$\begin{aligned} & j((a_K) - (b_K), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-), \\ & ((a_K) - (b_K), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-), \\ & (D(a_K) - D(b_K), D(x_K) - D(y_K)). \end{aligned}$$

Les deux premiers sont des symboles sur la jacobienne, et le dernier est un symbole sur la courbe. Montrons que les trois symboles sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.

On le sait déjà pour les deux premiers (les symboles $(,)$ et $j(,)$ diffèrent du symbole $i(,)$ qui est à valeurs dans $\mathbb{Z}$).

Ensuite, d'après la functorialité de $(,)$ décrite en 3.2.12(iii), on a

$$\begin{aligned} & (D(a_K) - D(b_K), D(x_K) - D(y_K)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^g (a_i) - (b_i), h^{-1}(\Theta_{x_K}^-) - h^{-1}(\Theta_{y_K}^-) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^g (\bar{a}_i) - (\bar{b}_i), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^- \right). \end{aligned}$$

On fait alors appel à une propriété de «réciprocité» du symbole $(,)$ sur une variété abélienne (cf. [7], Chap. 11, Th. 4.1). Soit D un diviseur sur J_K , et $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des 0-cycles de degré zéro sur J_K . Posons $D_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^r n_i \cdot T_{z_i} D$ si $\mathbf{a} \otimes_K K^a = \sum_{i=1}^r n_i \cdot z_i$, où $T_{z_i} D$ désigne le diviseur translaté de D par z_i . Notons D^- le pull-back de D par l'automorphisme de passage à l'opposé sur J_K . Si $D \in \text{Div}_a(J_K)$ et de plus $\mathbf{a}$ et $D_{\mathbf{b}}$ sont à supports disjoints, alors

$$(\mathbf{a}, D_{\mathbf{b}}) = (\mathbf{b}, D_{\mathbf{a}}^-).$$

Dans notre situation, on a donc

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^g (\bar{a}_i) - (\bar{b}_i), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^- \right) \\ &= ((x_K) - (y_K), \sum_{i=1}^g (\Theta_{\bar{a}_i} - \Theta) - \sum_{i=1}^g (\Theta_{\bar{b}_i} - \Theta)). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$h^{(g)}(D(a_K)) = \sum_{i=1}^g h(a_i) = \sum_{i=1}^g \bar{a}_i,$$

et de façon analogue avec b_K et les b_i . Donc, d'après le théorème du carré,

$$\sum_{i=1}^g (\Theta_{\bar{a}_i} - \Theta) \quad \text{et} \quad \Theta_{a_K}$$

sont linéairement équivalents. De même avec b_K et les b_i . D'après 3.2.12(ii) et (i), les symboles

$$((x_K) - (y_K), \sum_{i=1}^g (\Theta_{\bar{a}_i} - \Theta) - \sum_{i=1}^g (\Theta_{\bar{b}_i} - \Theta))$$

et

$$((x_K) - (y_K), \Theta_{a_K} - \Theta_{b_K})$$

sont congrus modulo $\mathbb{Z}$. Enfin, ce dernier symbole est égal à

$$((a_K) - (b_K), \Theta_{x_K}^- - \Theta_{y_K}^-),$$

en appliquant à nouveau la formule de réciprocité. En conclusion, les trois symboles considérés plus haut sont bien égaux modulo $\mathbb{Z}$, et on a donc

$$\langle a, x \rangle_J = -(D(a_K) - D(b_K), D(x_K) - D(y_K)) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Appliquons maintenant le théorème 3.2.13 avec les diviseurs $D_K := D(a_K) - D(b_K)$ et $D'_K := D(x_K) - D(y_K)$. En notant D et D' les adhérences schématiques respectives de D_K et D'_K dans X , il existe donc $A \in \text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que

$$\rho([D]) = \rho([A]) = MA \quad \text{et} \quad (D_K, D'_K) \equiv -(A \cdot D') \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Ainsi donc,

$$\langle a, x \rangle_J = (A \cdot D') \pmod{\mathbb{Z}},$$

ou encore,

$$\langle a, x \rangle_J = {}^t A \cdot \rho([D']) \pmod{\mathbb{Z}}$$

comme on le voit en écrivant A dans la base canonique formée des composantes Γ_i . Notons que, par le même argument montrant l'existence de A , il existe $A' \in \text{Div}_s(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $\rho([D']) = \rho([A']) = MA'$. Posons $T = MA = \rho([D]) \in \mathbb{Z}^v$ et $T' = MA' = \rho([D']) \in \mathbb{Z}^v$. Soient $n, n' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $S, S' \in M_v(\mathbb{Z})$ tels que $nA = S$ et $n'A' = S'$. On a alors

$$\langle a, x \rangle_J = ({}^t S/n)M(S'/n') \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Maintenant, soit

$$V := {}^t(d_1, \dots, d_v) \in \mathbb{Z}^v$$

le vecteur des multiplicités des composantes de X_k . On rappelle que l'on a une injection

$$\Phi_{M,\Lambda} := \text{Ker}({}^t(\Lambda V)) / \text{Im}(\Lambda^{-1}M) \xrightarrow{\Lambda \times} \Phi_M := \text{Ker}({}^tV) / \text{Im} M,$$

et que $\langle, \rangle_{M,\Lambda}$ est défini par restriction du pairing

$$\langle, \rangle_M : \Phi_M \times \Phi_M \rightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

introduit plus haut. Ici, par construction, $D_K = D(a_K) - D(b_K)$ est un diviseur de degré zéro sur X_K qui représente $a_K - b_K \in J_K(K)$, qui à son tour se spécialise en $a - 0 = a \in \Phi_J$. La classe de $\rho'([D])$ dans $\Phi_{M,\Lambda}$ est donc l'image de a via l'identification $\Phi_J = \Phi_{M,\Lambda}$ décrite à la fin du chapitre 2. Vue dans Φ_M , il s'agit de la classe de $\Lambda \cdot \rho'([D]) = \rho([D]) = T$. De même, $x \in \Phi_J$ correspond à la classe de $\rho([D']) = T'$ dans Φ_M . Puisque $MS = nMA = nT$ et $MS' = n'MA' = n'T'$, on a finalement, par définition de $\langle, \rangle_M$:

$$\langle a, x \rangle_{M,\Lambda} = \langle a, x \rangle_M = ({}^tS/n)M(S'/n') \pmod{\mathbb{Z}} = \langle a, x \rangle_J. \square$$

En combinant les théorèmes 3.2.16 et 3.2.10, on obtient le corollaire suivant (cf. [1], 4.7).

Corollaire 3.2.18 *Soient K, R, X_K et J_K comme dans 3.2.16. L'accouplement de Grothendieck restreint à la partie première à $p = \text{car}(k)$ de $\Phi_J \times \Phi_{J'}$ est non-dégénéré. S'il existe une surface fibrée régulière $X \rightarrow S$ de fibre générique X_K , telle que la fibre spéciale X_k ne possède que des composantes irréductibles géométriquement réduites, alors l'accouplement de Grothendieck est non-dégénéré. C'est en particulier le cas si k est algébriquement clos.*

3.2.3 Exemples

Soit R un anneau de valuation discrète strictement hensélien de **corps résiduel algébriquement clos** k et de corps des fractions K . On note toujours s le point fermé de $S := \text{Spec}(R)$. Soit X_K une courbe (géométriquement connexe, propre et lisse) sur K , possédant un point rationnel. Sous ces hypothèses, nous avons vu ci-dessus que l'accouplement de Grothendieck sur le groupe des composantes du modèle de Néron de la jacobienne de X_K est toujours non-dégénéré. Dans cette sous-section, nous allons calculer à la main des exemples cités dans [1], sect. 5.

Commençons par les courbes elliptiques. Dans ce cas, Bosch et Lorenzini donnent la liste de tous les accouplements possibles, en fonction du type de réduction de Kodaira de la courbe c.-à-d., en fonction de la fibre spéciale du modèle régulier minimal de la courbe (cf. 2.1).

Soit E_K une courbe elliptique sur K . Alors E_K est canoniquement isomorphe à sa jacobienne J_K . De plus, si on note $\mathcal{E}$ le modèle régulier minimal de E_K , le modèle de Néron $\mathcal{N}$ de E_K (et donc de J_K) est le lieu lisse de $\mathcal{E}$ (cf 2.1). On note Φ le groupe des composantes de $\mathcal{N}$, et $\langle , \rangle$ le pairing associé (en voyant $\mathcal{N}$ comme le modèle de Néron de J_K).

Il y a quatre cas triviaux :

- I_0, I_1 et II : $\mathcal{E}_s$ est irréductible, et donc $\mathcal{N}_s$ également (c'est un ouvert non vide de $\mathcal{E}_s$), si bien que Φ n'a qu'un seul élément ;
- II^* : $\mathcal{E}_s$ a neuf composantes irréductibles, mais une seule est de multiplicité 1, donc là encore Φ est réduit à l'élément neutre.

Dans la plupart des autres cas, Φ est cyclique, et on peut alors trouver un générateur γ pour lequel on sait calculer $\langle \gamma, \gamma \rangle$.

type	Φ	$\langle \gamma, \gamma \rangle$
III	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1/2
III^*	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1/2
IV	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	2/3
IV^*	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	1/3
I_{4m+1}^*	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	1/4
I_{4m+3}^*	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	3/4
I_n ($n \geq 1$)	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	1/n

Dans les deux cas restants I_{4m}^* et I_{4m+2}^* , Φ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on peut trouver une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -base $\{\gamma, \gamma'\}$ de Φ dans laquelle la matrice de $\langle , \rangle$ est donnée dans le tableau suivant.

type	Φ	base $\{\gamma, \gamma'\}$
I_{4m}^*	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
I_{4m+2}^*	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Faisons par exemple les calculs dans le cas I_n . On a déjà vu que les cas $n = 0$ et $n = 1$ étaient triviaux. Pour $n = 2$, voir le cas J_2 plus bas. On peut

donc supposer $n \geq 3$. La matrice intersection de $\mathcal{E}_s$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On réduit M sous forme de Smith. Il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{Z})$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ \vdots & -2 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & * & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \vdots & -2 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

et une matrice $B \in GL_n(\mathbb{Z})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & -(n-3) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & -(n-2) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telles que $D := AMB = \text{diag}(1, \dots, 1, n, 0)$. On a donc

$$\Phi_{I_n} = \left(\frac{\mathbb{Z}^n}{\text{Im } M} \right)_{\text{tors}} \xrightarrow{A \times} \left(\frac{\mathbb{Z}^n}{\text{Im } D} \right)_{\text{tors}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}.$$

Soit E le vecteur

$$E := {}^t(1, -1, 0, \dots, 0).$$

On vérifie alors facilement que le vecteur

$$S' := {}^t(0, n, \dots, n, 1, 0)$$

est solution du système diagonal $DS' = nUE$ (où le calcul de UE ne nécessite que les deux premières colonnes de U), et on en déduit que le vecteur

$$S = BS' = {}^t(-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0)$$

est solution de $MS = nE$. L'image γ de E dans $\mathbb{Z}^n / \text{Im } M$ est donc un élément de torsion c.-à-d., $\gamma \in \Phi_{I_n}$. L'image de γ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par l'isomorphisme ci-dessus est la classe de 1, donc γ est un générateur de Φ_{I_n} . Puis, par définition du pairing, on a

$$\begin{aligned} \langle \gamma, \gamma \rangle_{I_n} &= {}^t(S/n)M(S/n) \\ &= {}^t(S/n)E \\ &= -1/n - (n-2)/n \\ &= 1/n \end{aligned}$$

dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Lorsque la courbe X_K de départ (toujours soumise à l'hypothèse $X_K(K) \neq \emptyset$) n'est pas une courbe elliptique, il semble plus difficile de construire des exemples. Cependant, Bosch et Lorenzini font la remarque suivante. Supposons qu'un modèle régulier $X \rightarrow S$ de X_K soit connu, et considérons sa fibre spéciale X_s . On sait lui associer sa matrice d'intersection M et son vecteur de multiplicités V . A partir de ces données, on peut construire le *graph dual* G de X_s : les sommets de G sont les composantes irréductibles Γ_i de X_s ; pour $i \neq j$ le nombre d'arrêtes entre Γ_i et Γ_j est le nombre d'intersection $\Gamma_i \cdot \Gamma_j$. On accompagne également chaque sommet de la multiplicité de la composante correspondante. Le triplet (G, M, V) vérifie alors les propriétés suivantes :

- G est un graphe connexe de sommets $\Gamma_1, \dots, \Gamma_v$;
- $M = (M_{ij}) \in M_v(\mathbb{Z})$ est symétrique. Si $i \neq j$, le coefficient M_{ij} est égal au nombre d'arrêtes entre les sommets Γ_i et Γ_j . Les coefficients M_{ii} sont tous des entiers < 0 ;
- Le vecteur $V = {}^t(d_1, \dots, d_v)$ a des coefficients entiers > 0 et $MV = 0$.
On suppose de plus que $\text{pgcd}(d_1, \dots, d_v) = 1$.

D'autre part, lorsque toutes les multiplicités géométriques e_i sont égales à 1, le groupe des composantes du modèle de Néron J de la jacobienne J_K de X_K est canoniquement isomorphe à

$$\Phi_G := \text{Ker } {}^tV / \text{Im } M = (\mathbb{Z}^v / \text{Im } M)_{\text{tors}}$$

et le pairing de Grothendieck $\langle, \rangle_J$ coïncide avec le pairing non-dégénéré $\langle, \rangle_M$ défini à l'aide de M . Inversement, un triplet (G, M, V) vérifiant les propriétés ci-dessus est appelé un *graphe arithmétique*. Maintenant, d'après un théorème de Winters (cf. [19]), un graphe arithmétique dont le vecteur V a tous ses

coefficients premiers à la caractéristique résiduelle $\text{car}(k)$, est le graphe arithmétique associé à une courbe (géométriquement connexe, propre et lisse) sur un corps de valuation discrète K d'équicaractéristique et de corps résiduel k algébriquement clos (en particulier, toutes les multiplicités géométriques sont triviales). L'anneau de valuation R de K est alors isomorphe à l'anneau de séries formelles $k[[t]]$, qui est strictement hensélien. Le modèle de Néron J sur R de la jacobienne J_K de X_K a donc pour groupe de composantes Φ_G , et si la courbe X_K possède un point rationnel, les accouplements $\langle, \rangle_J$ et $\langle, \rangle_M$ coïncident. Ainsi, à défaut de construire des exemples d'accouplements de Grothendieck, on peut construire des graphes arithmétiques et considérer les accouplements associés. Modulo le problème d'existence d'un point rationnel, cela donne quand même une idée de ce que peut être un pairing de Grothendieck.

Parmi les exemples cités dans l'article, nous choisissons un cas simple pour faire les calculs. Soit n un entier ≥ 2 fixé. Soient le graphe à 2 sommets et n arrêtes

$$J_n := \mathbf{1} \bullet \begin{array}{c} \frown \\ \text{---} \\ \smile \end{array} \bullet \mathbf{1},$$

la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -n & n \\ n & -n \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le triplet (J_n, M, R) est un graphe arithmétique (on reconnaît d'ailleurs le type I_2 des courbes elliptiques pour $n = 2$). Il existe alors $A, B \in \text{Gl}_2(\mathbb{Z})$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

telles que $D := AMB = \text{diag}(n, 0)$. On a donc

$$\Phi_{J_n} = \left(\frac{\mathbb{Z}^2}{\text{Im } M} \right)_{\text{tors}} \xrightarrow{A \times} \left(\frac{\mathbb{Z}^2}{\text{Im } D} \right)_{\text{tors}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}.$$

Soit

$$E := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$S := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est solution de $MS = nE$. L'image γ de E dans $\mathbb{Z}^2 / \text{Im } M$ est donc dans Φ_{J_n} , et son image dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par l'isomorphisme précédent est la classe de

-1 , donc γ est un générateur de Φ_{J_n} . De plus,

$$\begin{aligned} \langle \gamma, \gamma \rangle_{J_n} &= {}^t(S/n)M(S/n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -1/n \end{aligned}$$

dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (qui est aussi égal à $1/2$ si $n = 2$).

Pour des formules générales de calcul du pairing $\langle, \rangle_M$ sur $\Phi_G \times \Phi_G$, où (G, M, R) désigne un graphe arithmétique quelconque, on renvoie à l'article : cf. [1], 5.1.

D'autre part, tous les accouplements symétriques non-dégénérés sur des p -groupes abéliens finis ont été classifiés. A l'aide d'exemples plus généraux que celui traité ci-dessus, Bosch et Lorenzini parviennent à réaliser tous ces accouplements à partir de graphes arithmétiques. Puis, par un procédé de «recollement des pairings» (correspondant à des recollements de graphes), ils obtiennent le résultat suivant (cf. [1], 5.2).

Proposition 3.2.19 *Soit Φ un groupe abélien fini muni d'un accouplement symétrique non-dégénéré $\langle, \rangle : \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors il existe un graphe arithmétique (G, M, V) tel que $\Phi_G \simeq \Phi$ et $\langle, \rangle_G$ est équivalent à $\langle, \rangle$.*

En particulier, si l'hypothèse d'existence d'un point rationnel dans le théorème 3.2.16 ne s'avérait pas nécessaire, on pourrait alors dire, en appliquant le théorème de Winters, que tout accouplement symétrique non-dégénéré sur un groupe abélien fini et à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, est l'accouplement de Grothendieck sur le groupe des composantes du modèle de Néron d'une certaine jacobienne.

3.2.4 Un contre-exemple

Nous allons maintenant donner l'exemple de Bosch et Lorenzini, d'une courbe X_K géométriquement connexe, propre et lisse sur un corps de valuation discrète K , telle que le pairing de Grothendieck associé (au modèle de Néron de la jacobienne) de X_K soit dégénéré (cf. [1], sect. 6). Il s'agit donc d'un contre-exemple à la conjecture selon laquelle l'accouplement de Grothendieck est toujours non-dégénéré. On notera que pour cela, les multiplicités géométriques des composantes irréductibles de la fibre fermée d'un modèle régulier de X_K ne doivent pas toutes être égales à 1. En particulier, le corps résiduel k de K ne doit pas être parfait (cf. 2.2.17(i)), et on ne peut donc pas espérer utiliser le théorème de Winters.

Soit (G, M, V) un graphe arithmétique (cf. 3.2.3). Soit

$$\Lambda = \text{diag}(e_1, \dots, e_v) \in M_v(\mathbb{Z})$$

où les e_i sont > 0 , et supposons $\Lambda^{-1}M \in M_v(\mathbb{Z})$. Comme lorsque le graphe est celui associé à une courbe, on peut alors considérer le sous-groupe de Φ_G défini par

$$\Phi_{G,\Lambda} := \text{Ker}({}^t(\Lambda V)) / \text{Im}(\Lambda^{-1}M).$$

La proposition suivante donne un moyen de construire un contre-exemple (cf. [1], 6.1).

Proposition 3.2.20 *Soit (G, M, V) un graphe arithmétique. Soit p un nombre premier. Soit $\Lambda = \text{diag}(p^{a_1}, \dots, p^{a_v})$ avec $a_1 > a_2 \geq \dots \geq a_v \geq 0$. Supposons que $\Lambda^{-1}M \in M_v(\mathbb{Z})$ et que $\text{pgcd}(p^{a_i}d_i; i = 1, \dots, v) = 1$. Supposons aussi que p^{a_1+1} divise M_{11} . Alors le pairing $\langle, \rangle_G$ restreint à $\Phi_{G,\Lambda} \times \Phi_{G,\Lambda}$ est dégénéré. Plus précisément, soit*

$$Z := {}^t\left(\frac{M_{11}}{p^{a_1+1}}, \dots, \frac{M_{v1}}{p^{a_v+1}}\right).$$

Alors $Z \in \text{Ker}({}^t(\Lambda V))$ et son image z dans $\Phi_{G,\Lambda}$ est d'ordre p . De plus, $\langle z, x \rangle_G = 0$ pour tout $x \in \Phi_{G,\Lambda}$.

Un exemple de graphe arithmétique vérifiant les hypothèses de la proposition est le suivant. Soit p un nombre premier et $v := p + 1$. On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -p^2 & p & \cdots & \cdots & p \\ p & 1 - 2p & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 1 - 2p & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ p & 1 & \cdots & 1 & 1 - 2p \end{pmatrix} \in M_v(\mathbb{Z})$$

et le vecteur

$$V := {}^t(1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^v.$$

La donnée de M et de V définit un unique graphe arithmétique (G, M, V) . De plus, on choisit

$$\Lambda := \text{diag}(p, 1, \dots, 1) \in M_v(\mathbb{Z}).$$

Pour mettre la conjecture en défaut, il reste à exhiber une courbe X_K et un modèle régulier X de X_K tels que le graphe arithmétique et la matrice des multiplicités géométriques associés soient (G, M, V) et Λ . On a déjà remarqué que cela ne pouvait pas se faire à l'aide du théorème de Winters mentionné au paragraphe 3.2.3.

Soit $R := (\mathbb{Z}[t]_{(p)})^{\text{sh}}$, l'hensélisé strict de l'anneau de valuation discrète $\mathbb{Z}[t]_{(p)}$, où t désigne une indéterminée. Soient K le corps des fractions de R ,

et $k := \mathbb{F}_p(t)^{\text{sep}}$ son corps résiduel. Considérons la courbe projective plane X_K d'équation

$$F(x, y, z) := pz^{2p} - (x^p + ty^p) \prod_{i=0}^{p-1} (x - iy) = 0.$$

Vérifions soigneusement que cette courbe convient. Tout d'abord, X_K est lisse. En effet, soit $[x : y : z] \in X_{\overline{K}}(\overline{K})$, et supposons que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \in \overline{K}. \quad (*)$$

De $\partial F / \partial z = 2p^2 z^{2p-1}$, on déduit $z = 0$. L'équation $F(x, y, z) = 0$ s'écrit alors

$$(x^p + ty^p) \prod_{i=0}^{p-1} (x - iy) = 0.$$

Il y a deux cas :

1. $x^p + ty^p = 0$. Alors $0 = \partial F / \partial x = -px^{p-1} \prod_{i=0}^{p-1} (x - iy)$, ce qui est impossible (x n'est pas nul car sinon on aurait $x = y = z = 0$, et $y/x \neq 1/i$ pour tout $i = 1, \dots, p-1$ puisque $(y/x)^p = -1/t$).
2. $x = uy$ pour un $u \in \{0, \dots, p-1\}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= -(x^p + ty^p) \sum_{i=0}^{p-1} \prod_{j \neq i} (x - jy) \\ &= y^p(u^p + t) \prod_{j \neq u} (u - j)y, \end{aligned}$$

d'où $y = 0$ puis $0 = x = y = z$, absurde.

Ainsi, le système (*) n'a pas de solution $[x : y : z] \in X_{\overline{K}}(\overline{K})$. Soit U l'un des trois ouverts affines $D_+(x)$, $D_+(y)$ ou $D_+(z)$ de $\mathbb{P}_{\overline{K}}^2$. Disons $U = D_+(z)$ pour fixer les idées. Si $P = (x_P, y_P) \in (U \cap X_{\overline{K}})(\overline{K})$ était un point singulier de $X_{\overline{K}}$, alors la matrice jacobienne

$$J_P = \left(\frac{\partial F(x,y,1)}{\partial x}(x_P, y_P) \quad \frac{\partial F(x,y,1)}{\partial y}(x_P, y_P) \right)$$

de $F(x, y, 1)$ en P serait nulle : d'après le critère jacobien, on aurait en effet que le rang de J_P est différent de $\dim U - \dim \mathcal{O}_{U \cap X_{\overline{K}}, P} = 2 - 1 = 1$. Mais puisque

$$2pF = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z},$$

on aurait également $(\partial F / \partial z)([x_P : y_P : 1]) = 0$, et $[x_P : y_P : 1]$ serait un élément de $X_{\overline{K}}(\overline{K})$ solution de (*). Ainsi, $X_{\overline{K}}$ est régulière en tous ses points rationnels c.-à-d., en tous ses points fermés (puisqu'on est sur $\overline{K}$), donc $X_{\overline{K}}$ est régulière, i.e. X_K est lisse. Maintenant, $X_{\overline{K}}$ est une courbe projective plane, donc nécessairement connexe. Par conséquent, $X_{\overline{K}}$ est irréductible, et finalement X_K est une courbe projective lisse sur K , géométriquement intègre.

Considérons le R -modèle projectif de X_K donné par la surface fibrée

$$X := \text{Proj} \left(\frac{R[x, y, z]}{(F(x, y, z))} \right) \rightarrow S := \text{Spec}(R).$$

C'est un modèle régulier de X_K . En effet, considérons sa fibre spéciale

$$X_k = \text{Proj} \left(\frac{k[x, y, z]}{(F_k(x, y, z))} \right)$$

où $F_k(x, y, z) = (x^p + ty^p) \prod_{i=0}^{p-1} (x - iy)$. En conservant les notations des exemples 2.2.12 et 2.2.16, la décomposition de X_k en composantes irréductibles est

$$X_k = \Gamma \cup_{i=0}^{p-1} \Gamma_i.$$

Posons

$$U = X_k \setminus \cup_{i=0}^{p-1} \Gamma_i \quad \text{et} \quad U_i = X_k \setminus (\Gamma \cup_{j \neq i} \Gamma_j)$$

pour chaque $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Les éléments de la réunion de l'ouvert U et des ouverts U_i sont les points de X_k qui ne sont contenus que dans une seule composante irréductible. D'autre part, deux composantes irréductibles de X_k se coupent exactement au point $P_0 := [0 : 0 : 1]$ (puisque $V_+(x^p + ty^p, x - iy) = V_+(x, y)$ pour tout i , et que $V_+(x - iy, x - jy) = V_+(x, y)$ si $i \neq j$). Ainsi, ensemblistement, X_K est la réunion disjointe

$$X_k = \{P_0\} \cup U \cup_{i=0}^{p-1} U_i.$$

Maintenant, les ouverts U et U_i sont affines, contenus dans $D_+(y)$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_k}(U) &= (k[x, z]/(x^p + t) \prod_i (x - i))_{\prod_i (x-i)} \\ &= (k[x, z]/(x^p + t))_{\prod_i (x-i)} \\ &= k'[z]_{\prod_i (\alpha-i)} \\ &= k'[z] \end{aligned}$$

où k' désigne le corps de rupture de $x^p + t$ sur k , et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_k}(U_i) &= (k[x, z]/(x^p + t) \prod_i (x - i))_{(x^p+t) \prod_{j \neq i} (x-j)} \\ &= (k[x, z]/(x - i))_{(x^p+t) \prod_{j \neq i} (x-j)} \\ &= k[z]_{(i^p+t) \prod_{j \neq i} (i-j)} \\ &= k[z] \end{aligned}$$

pour tout i . On en déduit que tous les points de $X_k \setminus P_0$ sont réguliers dans la courbe X_k c.-à-d., leur anneau local est un anneau de valuation discrète. Si P est un de ces points, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$ est donc engendré par deux éléments : l'uniformisante p de R et l'uniformisante de $\mathcal{O}_{X_k,P}$. Puisque $\mathcal{O}_{X,P}$ est de dimension $\dim \mathcal{O}_{X_k,P} + \dim R_{(p)} = 1 + 1 = 2$ (par platitude), P est donc un point régulier de X . Le point P_0 est également régulier dans X : dans la carte $\text{Spec}(R[x,y]/F(x,y,1))$, il correspond à l'idéal premier $(x,y,p) = (x,y)$, engendré par deux éléments. Enfin, la fibre générique X_K est régulière et ouverte dans X . Le modèle X est donc bien régulier.

Passons maintenant à l'étude de l'intersection sur X . On a vu dans l'exemple 2.2.12 que le vecteur des multiplicités de X_k était bien le vecteur V , et on a également vu dans 2.2.16 que sa matrice des multiplicités géométriques était bien la matrice Λ . Vérifions à présent que la matrice d'intersection de X_k est bien M . Puisque les composantes irréductibles de X_k ne se rencontrent qu'au point P_0 , on a :

- pour tout $i = 0, \dots, p-1$,

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot \Gamma_i &= \text{long } \mathcal{O}_{X,P_0} / (x^p + ty^p, x - iy) \\ &= \text{long}(R[x,y]_{(x,y)} / F(x,y,1)) / (x^p + ty^p, x - iy) \\ &= \text{long}(R[x,y]_{(x,y)} / F(x,y,1)) / ((x^p + ty^p, x - iy, p) / F(x,y,1)) \\ &= \text{long } R[y]_{(y)} / ((i^p + t)y^p, p) \\ &= \text{long } k[y]_{(y)} / ((i^p + t)y^p) \\ &= \text{long } k[y] / y^p \\ &= p; \end{aligned}$$

- pour tout $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \Gamma_i \cdot \Gamma_j &= \text{long } \mathcal{O}_{X,P_0} / (x - iy, x - jy) \\ &= \text{long } R[y]_{(y)} / ((i-j)y, p) \\ &= \text{long } k[y]_{(y)} / ((i-j)y) \\ &= \text{long } k \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour les self-intersection, on utilise 2.2.24(b).

- $\Gamma^2 = -\sum_{i=0}^{p-1} \Gamma_i \cdot \Gamma = -p \cdot p = -p^2$;
- pour tout $i = 0, \dots, p-1$,

$$\Gamma_i^2 = -\Gamma_i \cdot \Gamma - \sum_{j \neq i} \Gamma_i \cdot \Gamma_j = -p - (p-1) = 1 - 2p.$$

La matrice d'intersection de X_k est donc bien M .

Ainsi, le graphe arithmétique G de la courbe X_K est celui défini par la matrice M et le vecteur V introduits précédemment, et la matrice des

multiplicités géométriques de X_k est la matrice Λ également introduite plus haut. Puisque l'anneau R est strictement hensélien, et X_K possède un point rationnel (par exemple $[0 : 1 : 0]$), nous sommes dans les hypothèses du théorème 3.2.16. Par conséquent,

$$\Phi_J = \Phi_{M,\Lambda} = \Phi_{G,\Lambda} \quad \text{et} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_J = \langle \cdot, \cdot \rangle_{M,\Lambda} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{G,\Lambda},$$

où J désigne le modèle de Néron sur R de la jacobienne de X_K . D'après 3.2.20, l'accouplement de Grothendieck associé à la courbe X_K est donc *dégénéré*.

Bibliographie

- [1] S. Bosch, D. Lorenzini, Grothendieck's pairing on components groups of Jacobians, *Invent. Math.* 148, 2002, 353-396.
- [2] S. Bosch, W. Lüktebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.
- [3] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, tome 1, Masson, 1970.
- [4] A. Grothendieck et al., *Schémas en groupes SGA 3, I*, Springer-Verlag LNM 151, 1970.
- [5] A. Grothendieck, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique SGA 7, I*, Springer-Verlag LNM 288, 1972.
- [6] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Troisième Partie, *Publ. Math. IHES* 20, 1964.
- [7] S. Lang, *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer-Verlag, 1983.
- [8] J. Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, *Publ. Math. IHES* 36, 1969, 195-279.
- [9] J. Lipman, *Desingularization of two-dimensional schemes*, *Ann. Math.* 107, 1978, 151-207.
- [10] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press OGTM 6, 2006.
- [11] J.S. Milne, *Jacobian Varieties*, dans : *Arithmetic Geometry*, G. Cornell, J. Silverman, Eds, Springer-Verlag, 1986.
- [12] J.S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, *Perspectives in Mathematics*, 1986.
- [13] J.-P. Murre, *On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups*, *Publ. Math. IHES* 23, 1964, 5-43.
- [14] A. Néron, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, *Ann. of Math.* 82, 1965, 249-331.
- [15] F. Oort, *Commutative group schemes*, Springer-Verlag LNM 15, 1966.
- [16] F. Oort, *Sur le schéma de Picard*, *Bull. Soc. Math.* 90, 1962, 1-14.
- [17] M. Raynaud, *Spécialisation du foncteur de Picard*, *Publ. Math. IHES* 38, 1970, 27-76.
- [18] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1959.
- [19] G. Winters, *On the existence of certain families of curves*, *Amer. J. Math.* 96, 1974, 215-228.