

---

# SÉMINAIRE DE M2 : FONCTEUR DE POINTS ET GRASSMANNIENNES

---

**Matilde MACCAN**  
M2 Mathématiques Fondamentales  
Université de Rennes 1  
matilde.maccan@etudiant.univ-rennes1.fr

29 décembre 2020

## ABSTRACT

Tout schéma est un foncteur, mais pas tous les foncteurs sont des schémas : l'objectif de ce séminaire est d'introduire la notion de foncteur représentable. Dans la première partie, on introduit le *foncteur de points* associé à un schéma et on donne un critère de représentabilité. Puis on se concentre sur l'étude détaillée de l'exemple de la Grassmannienne, depuis sa définition jusqu'à son plongement dans un espace projectif.

## Table des matières

---

<b>1 Foncteurs représentables</b>	<b>2</b>
1.1 Le foncteur de points d'un schéma . . . . .	2
1.2 Morphismes . . . . .	2
1.3 Un critère de représentabilité . . . . .	3
<b>2 Grassmanniennes</b>	<b>4</b>
2.1 Définition . . . . .	4
2.2 Représentabilité de $\text{Grass}_{d,n}$ . . . . .	5
2.3 Espace projectif . . . . .	7
2.4 Plongement de Plücker . . . . .	8
2.5 Relations de Plücker . . . . .	11
<b>3 Conclusion</b>	<b>11</b>

# 1 Foncteurs représentables

Le but de cette section est de définir les concepts de foncteur de points et de foncteur représentable. Ces notions formalisent l'idée d'*espace de modules* qui apparaît partout en mathématiques : un objet géométrique qui paramètre les espaces d'un certain type fixé comme par exemple les courbes algébriques, les droites dans un espace vectoriel, les fibrés, etc. Dans le cas présent, l'objet que nous étudierons est un schéma.

## 1.1 Le foncteur de points d'un schéma

Le point de départ est le *lemme de Yoneda*, un outil fondamental dans la théorie des catégories, il nous permet de voir les objets de n'importe quelle catégorie comme des foncteurs.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{C}$ , on définit un foncteur  $h_X : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S &\mapsto h_X(S) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X), \\ (u: T \rightarrow S) &\mapsto (h_X(u) := (-) \circ u: h_X(S) \rightarrow h_X(T)). \end{aligned}$$

Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme dans  $\mathcal{C}$ . Pour tout objet  $S$ , la composition avec  $f$  définit une transformation naturelle

$$h_f: h_X \rightarrow h_Y, \quad h_f(S): h_X(S) \rightarrow h_Y(S), \quad g \mapsto f \circ g.$$

Nous avons ainsi obtenu un foncteur covariant  $X \mapsto h_X$ , de  $\mathcal{C}$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ , la catégorie des foncteurs  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

**Théorème 1.1** (Lemme de Yoneda). *Soient  $X \in \mathcal{C}$  et  $F: \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  un foncteur. L'application*

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \rightarrow F(X), \quad \alpha \mapsto \alpha(X)(id_X)$$

*est une bijection, fonctorielle en  $X$ .*

Une transformation naturelle  $h_X \rightarrow F$  est à priori un objet compliqué, mais en réalité le lemme de Yoneda affirme que son comportement est strictement contrôlé par la seule image de l'identité. Consulter [4] pour plus de détails.

Ceci étant, il est naturel de s'interroger si un foncteur dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  provient d'un quelque objet  $X$  dans  $\mathcal{C}$ . On donne donc la définition suivante :

**Définition 1.2.** Un foncteur  $F: \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  est dit *représentable* s'ils existent un objet  $X$  et un isomorphisme  $h_X \rightarrow F$ , c'est-à-dire si  $F$  appartient à l'image essentielle du foncteur  $X \mapsto h_X$ .

Dans le cas présent, on s'intéresse en particulier à la catégorie  $\mathbf{Sch}$  des schémas.

**Définition 1.3.** Considérons un schéma  $X$ . Le foncteur  $h_X: \mathbf{Sch}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  est dit *le foncteur de points* de  $X$ . Pour tout schéma  $T$ ,  $h_X(T) = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, X)$  est l'ensemble des  $T$ -points de  $X$ .

L'intérêt des foncteurs représentables est induit par le fait qu'il est souvent naturel de construire un foncteur géométriquement intéressant, comme l'on verra avec le cas des Grassmanniennes, ensuite de vérifier s'il est effectivement un objet géométrique, c'est-à-dire s'il est représenté par un schéma. On notera indistinctement  $X$  et  $h_X$ , en identifiant le schéma avec son foncteur de points associé.

**Exemple 1.4** (Espace affine). Soit  $n \geq 0$  et  $X = \mathbb{A}^n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n])$ . Pour tout schéma  $S$ , on a

$$h_X(S) = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(S, \mathbb{A}^n) = \text{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n], \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) \simeq \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n.$$

Ainsi le foncteur  $\mathbf{Sch}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ,  $S \mapsto \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  est représenté par  $\mathbb{A}^n$ .

## 1.2 Morphismes

Supposons qu'on dispose d'une transformation naturelle entre deux foncteurs dans  $\widehat{\mathcal{C}}$ , pas nécessairement représentables. Il est en tout cas possible de définir le concept de *morphisme représentable* entre ces foncteurs, notion intéressante d'un point de vue géométrique. Définissons tout d'abord le produit fibré.

**Définition 1.5.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On utilise le produit fibré dans  $\mathbf{Set}$  pour définir le *produit fibré* dans  $\widehat{\mathcal{C}}$  : soient  $F, G$  et  $H$  des foncteurs  $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Pour tout objet  $S \in \mathcal{C}$ , on pose

$$(F \times_H G)(S) := F(S) \times_{H(S)} G(S).$$

Les projections sur chaque composante définissent des morphismes des foncteurs  $F \times_H G \rightarrow F$  et  $F \times_H G \rightarrow G$ , qui satisfont la propriété universelle du produit fibré (en utilisant celle dans  $\mathbf{Set}$ ).

*Remarque 1.6.* Le produit fibré de trois foncteurs représentables est représentable. Soient  $X, Y$  et  $S$  des schémas : pour tout schéma  $T$ , on peut formuler la propriété universelle du produit fibré dans  $\mathbf{Sch}$  de la façon suivante

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, X \times_S Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, S)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, Y).$$

Par définition de foncteur de points associé, on obtient

$$h_{X \times_S Y}(T) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(T, X \times_S Y) \simeq h_X(T) \times_{h_S(T)} h_Y(T),$$

donc  $h_X \times_{h_S} h_Y$  est représenté par  $X \times_S Y$ .

**Définition 1.7.** Un morphisme de foncteurs  $f: F \rightarrow G$  dans  $\widehat{\mathbf{Sch}}$  est dit *représentable* si et seulement si pour tout schéma  $X$  et pour tout  $g: X \rightarrow G$  morphisme de schémas, le foncteur  $F \times_G X$  est représentable.

$$\begin{array}{ccc} F \times_G X & \longrightarrow & F \\ \downarrow f_{(X)} & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

Étant donné un morphisme représentable, en utilisant encore la deuxième projection du produit fibré, on obtient la définition suivante.

**Définition 1.8.** Soit  $\mathcal{P}$  une propriété des morphismes des schémas qui est stable par composition avec un isomorphisme à droite et à gauche. On dit qu'un morphisme représentable  $f: F \rightarrow G$  dans  $\widehat{\mathbf{Sch}}$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}$  si et seulement si pour tout schéma  $X$  et pour tout morphisme  $g: X \rightarrow G$ , la deuxième projection  $f_{(X)}: F \times_G X \rightarrow X$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}$ .

Ici on s'intéresse strictement aux propriétés d'être une immersion ouverte ou une immersion fermée.

### 1.3 Un critère de représentabilité

Soit  $F: (\mathbf{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  un foncteur. On cherche à se doter d'une condition suffisante pour sa représentabilité : on utilisera ce résultat dans le cas des Grassmanniennes.

L'idée est de *recouvrir*  $F$  par des foncteurs représentables, en imposant des conditions qui nous permettent de les recoller. On commence par les définitions préliminaires qui formalisent ces concepts.

**Définition 1.9.** Soit  $S$  un schéma et  $F: (\mathbf{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  un foncteur.  $F$  est un *faisceau de Zariski* si et seulement si pour tout  $S$ -schéma  $X$ , tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  et tout  $\xi_i \in F(U_i)$  tels que  $\xi_i|_{U_i \cap U_j} = \xi_j|_{U_i \cap U_j}$  pour tout  $i, j \in I$ , il existe un unique  $\xi \in F(X)$  tel que  $\xi|_{U_i} = \xi_i$  pour tout  $i \in I$ .

*Remarque 1.10.* Puisque on peut recoller les morphismes d'espaces localement annelés, tout foncteur représentable est un faisceau de Zariski, d'où une première condition nécessaire.

**Définition 1.11.** Soit  $F: (\mathbf{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  un foncteur.

- (a) Un *sous-foncteur ouvert* de  $F$  est un morphisme représentable  $f: F' \rightarrow F$ , qui est une immersion ouverte au sens de la définition 1.8 : pour tout  $S$ -schéma  $X$  et tout morphisme  $g: X \rightarrow F$  dans  $\widehat{\mathbf{Sch}}/S$ , la deuxième projection  $f_{(X)}: F' \times_F X \rightarrow X$  est une immersion ouverte de schémas.
- (b) Une famille  $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$  de sous-foncteurs ouverts est dite un *recouvrement ouvert de Zariski* pour  $F$  si et seulement si pour tout  $S$ -schéma  $X$  et pour tout morphisme  $g: X \rightarrow F$ , les images des  $(f_i)_{(X)}$  forment un recouvrement ouvert du schéma  $X$ .

**Théorème 1.12.** Soit  $F: (\mathbf{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  un foncteur tel que

- (1)  $F$  est un faisceau de Zariski,
- (2)  $F$  admet un recouvrement ouvert de Zariski  $(f_i: F_i \rightarrow F)$  par des foncteurs représentables.

Alors  $F$  est représentable.

*Démonstration.* Une immersion ouverte est un monomorphisme dans la catégorie des schémas. On montre d'abord que si  $f: F \rightarrow G$  est un monomorphisme représentable dans  $\widehat{\mathbf{Sch}}$ , alors  $F(T) \rightarrow G(T)$  est injectif pour tout schéma  $T$ . Soient  $u, v \in F(T)$  tels que  $fu = fv$ . Par Yoneda, on peut les voir comme des morphismes  $T \rightarrow F$ , et on a égalité des compositions  $fu, fv: T \rightarrow G$ . Comme  $f$  est représentable, par définition  $U := F \times_G T$  est représentable, et la deuxième projection  $q: U \rightarrow T$  est un monomorphisme de schémas. On définit  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  par propriété universelle avec les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
T & \xrightarrow{u} & F \\
\downarrow \tilde{u} & & \downarrow p \\
T & \xrightarrow{id} & U \xrightarrow{p} F \\
\downarrow id & & \downarrow q \\
T & \xrightarrow{fu=fv} & G
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T & \xrightarrow{v} & F \\
\downarrow \tilde{v} & & \downarrow p \\
T & \xrightarrow{id} & U \xrightarrow{p} F \\
\downarrow id & & \downarrow q \\
T & \xrightarrow{fu=fv} & G
\end{array}$$

Comme  $q$  est un monomorphisme,  $q\tilde{u} = id = q\tilde{v}$  implique  $\tilde{u} = \tilde{v}$ . Ainsi on a  $u = p\tilde{u} = p\tilde{v} = v$ .

En revenant aux hypothèses du théorème, il en découle que  $F_i(T) \rightarrow F(T)$  est injectif pour tout schéma  $T$  : on peut donc identifier  $(F_i \times_F F_j)(T)$  avec  $F_i(T) \cap F_j(T)$ ,  $(F_i \times_F F_j \times_F F_k)(T)$  avec  $F_i(T) \cap F_j(T) \cap F_k(T)$  et définir une donnée de recollement des schémas  $X_i$  - qui représentent  $F_i$  - en un schéma  $X$  qui représente  $F$ . Pour les détails voir [1], théorème 8.9.  $\square$

## 2 Grassmanniennes

### 2.1 Définition

On concrétise le formalisme des foncteurs de points introduit jusqu'à présent en définissant la *Grassmannienne*, qui classe les sous-espaces vectoriels de dimension  $d$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Plus précisément, on veut construire un foncteur  $\text{Grass}_{d,n} : \mathbf{Sch}^{\text{opp}} \rightarrow \mathbf{Set}$  tel que pour tout corps  $k$

$$\text{Grass}_{d,n}(\text{Spec } k) = \{U \subseteq k^n : U \text{ est un sous-espace vectoriel de } k^n \text{ de dimension } d\}.$$

On commence par chercher la meilleure notion pour remplacer le "sous-espace vectoriel de dimension  $d$ " dans le cas d'un schéma  $S$  quelconque. On a besoin du résultat suivant.

**Proposition 2.1.** *Soit  $S$  un schéma et  $\iota : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$  un morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules. Si  $\mathcal{U}$  est de type fini et  $\mathcal{E}$  est localement libre de type fini, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Le morphisme  $\iota$  est injectif et le  $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathcal{E}/\iota(\mathcal{U})$  est localement libre.*
- (ii) *Pour tout ouvert affine  $U \subseteq S$ , il existe un morphisme  $\pi : \mathcal{E}|_U \rightarrow \mathcal{U}|_U$  tel que  $\pi \circ \iota|_U = id$ .*
- (iii) *Pour tout morphisme de schémas  $f : T \rightarrow S$ , le morphisme  $f^*\iota : f^*\mathcal{U} \rightarrow f^*\mathcal{E}$  est injectif.*
- (iv) *Pour tout  $s \in S$ , le morphisme de  $\kappa(s)$ -espaces vectoriels  $\iota \otimes id_{\kappa(s)} : \mathcal{U}(s) \rightarrow \mathcal{E}(s)$  est injectif.*
- (v)  *$\mathcal{U}$  est localement libre de type fini et le dual  $\iota^\vee : \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{U}^\vee$  est surjectif.*

*Démonstration.* Comme toutes les propriétés dans les énoncés sont locales, on peut supposer que  $S = \text{Spec } R$  soit un schéma affine.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Quitte à restreindre  $S$ , on peut supposer  $U = S = \text{Spec } R$ . On a une suite exacte courte de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\iota(\mathcal{U}) \longrightarrow 0,$$

avec  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}/\iota(\mathcal{U})$  qui sont localement libres, en particulier quasi-cohérents. Il en découle que  $\mathcal{U}$  est quasi-cohérent.

Par exactitude du foncteur  $(\cdot) : \mathbf{Mod}(R) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_S)$ , cette suite correspond à une suite exacte courte de  $R$ -modules

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0.$$

Le fait que  $\mathcal{E}/\iota(\mathcal{U}) = \tilde{P}$  est localement libre implique que  $P$  est un  $R$ -module projectif. La suite est donc scindée, c'est-à-dire il existe un morphisme de  $R$ -modules  $r : M \rightarrow N$  tel que  $r \circ i = id_N$ . On conclut en posant  $\pi := \tilde{r} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{U}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Soit  $f : T \rightarrow S$  un morphisme de schémas : alors

$$id = f^*(id) = f^*(\pi \circ \iota|_U) = f^*(\pi) \circ f^*(\iota|_U) : f^*\mathcal{U}|_U \rightarrow f^*\mathcal{U}|_U,$$

donc  $f^*\iota$  est injectif.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : On fixe  $s \in S$ . Soit  $T = \text{Spec } \kappa(s)$  et  $f : T \rightarrow S$  le morphisme qui associe au seul point  $(0) \in \text{Spec } \kappa(s)$  le point  $s$ . On a

$$(f^*\mathcal{U})_{(0)} = \mathcal{O}_{T,(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{U}_s = \kappa(s) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{U}_s = \mathcal{U}(s),$$

et par analogie  $(f^*\mathcal{E})_{(0)} = \mathcal{E}(s)$ . Se donner le morphisme  $\iota \otimes id_{\kappa(s)} \mathcal{U}(s) \rightarrow \mathcal{E}(s)$  est équivalent à se donner  $f^*\iota$ , qui est injectif par (iii).

(iv)  $\Rightarrow$  (i) : Soit  $s \in S$ . On note  $A := \mathcal{O}_{S,s}$ ,  $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{S,s}$  son idéal maximal,  $N := \mathcal{U}_s$ ,  $M := \mathcal{E}_s$  et  $i := \iota_s$ . On a donc un morphisme  $i : N \rightarrow M$  de  $A$ -modules, tel que  $i_0 := i \otimes id_{A/\mathfrak{m}} : N/\mathfrak{m}N \rightarrow M/\mathfrak{m}M$  est un morphisme injectif de  $(A/\mathfrak{m})$ -espaces vectoriels. Soit  $r_0 : M/\mathfrak{m}M \rightarrow N/\mathfrak{m}N$  un inverse à gauche de  $i_0$ . Comme  $\mathcal{E}$  est localement libre,  $M$  est projectif : si on considère le morphisme surjectif  $M \xrightarrow{\pi_M} M/\mathfrak{m}M \xrightarrow{r_0} N/\mathfrak{m}N$ , il existe un morphisme  $r'$  et une factorisation

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow r' & \searrow r_0 \circ \pi_M & \\ N & \longrightarrow & N/\mathfrak{m}N \end{array}$$

Or,  $r' \circ i$  est un endomorphisme de  $N$  qui, en tensorisant avec  $A/\mathfrak{m}$ , induit l'identité  $r_0 \circ i_0 = id$  sur  $N/\mathfrak{m}N$ . Par le lemme de Nakayama, ce morphisme est surjectif. De plus,  $N$  étant un  $A$ -module de type fini,  $r' \circ i$  est bijectif. On pose  $r := (r' \circ i)^{-1} \circ r' : M \rightarrow N$  : par construction on a  $r \circ i = id_N$ . On conclut donc que  $i$  est injectif et que  $i(N) = \iota(\mathcal{U})_s$  est un facteur direct de  $M = \mathcal{E}_s$ .

Comme le  $A$ -module  $M/N$  est localement libre, si on considère le seul point fermé  $x = \mathfrak{m}$  dans  $\text{Spec } A$ , le seul ouvert contenant  $x$  est  $\text{Spec } A$ , donc  $M/N$  est globalement libre.

Le même raisonnement vaut pour chaque  $s \in S$ , donc  $\iota_s$  est injectif pour tout  $s$ , d'où  $\iota$  est injectif. De plus,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{E}$  étant de type fini, le module  $\mathcal{E}/\iota(\mathcal{U})$  est de présentation finie, et on vient de montrer que toutes les fibres  $\mathcal{E}_s/\iota(\mathcal{U})_s$  sont des  $\mathcal{O}_{S,s}$ -modules libres : cela implique que  $\mathcal{E}/\iota(\mathcal{U})$  est localement libre (voir [1], proposition 7.40).

(iv)  $\Leftrightarrow$  (v) : On a montré que (iv) implique que  $\mathcal{U}$  est facteur direct de  $\mathcal{E}$ , donc en particulier il est localement libre et on a  $(\iota^\vee)^\vee = \iota$ ,  $(\iota \otimes id_{\kappa(s)})^\vee = \iota^\vee \otimes id_{\kappa(s)}$ . Alors, (iv) est équivalent au fait que  $\iota^\vee \otimes id_{\kappa(s)}$  est surjectif pour tout  $s$ . En appliquant à nouveau le lemme de Nakayama, ceci est équivalent à la surjectivité de  $\iota^\vee$ .  $\square$

Par la suite, nous utiliserons le cas particulier où  $\iota$  est l'inclusion d'un sous-module  $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{E}$ . Les conditions équivalentes de la proposition sont ainsi satisfaites si et seulement si tout point de  $S$  admet un voisinage ouvert affine  $V$  tel que  $\mathcal{U}|_V$  est un facteur direct de  $\mathcal{E}|_V$ . On dira que  $\mathcal{U}$  est *localement un facteur direct* de  $\mathcal{E}$ .

On cherche maintenant à définir la Grassmannienne d'un schéma  $S$  comme l'ensemble de certains sous-modules  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_S^n$ . Puisque le but est d'obtenir un foncteur contravariant, pour tout morphisme de schémas  $f : T \rightarrow S$  on veut induire une application

$$\text{Grass}_{d,n}(f) : \text{Grass}_{d,n}(S) \longrightarrow \text{Grass}_{d,n}(T), \quad \mathcal{U} \longrightarrow f^*\mathcal{U}.$$

Soit  $\iota : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n$ . En appliquant  $f^*$  on obtient  $f^*\iota : f^*\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}_T^n$ . Par la proposition 2.1, ce dernier est un morphisme injectif - et peut donc être vu comme une inclusion - pour tout  $f$  si et seulement si  $\mathcal{O}_S^n/\mathcal{U}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre, d'où la définition suivante :

**Définition 2.2** (Grassmannienne). Soient  $1 \leq d \leq n$  des entiers. La *Grassmannienne* est le foncteur  $\text{Grass}_{d,n} : \text{Sch}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$  défini par

$$\text{Grass}_{d,n}(S) := \{ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_S^n : \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \text{ est un } \mathcal{O}_S\text{-module localement libre de rang } n - d \}.$$

## 2.2 Représentabilité de $\text{Grass}_{d,n}$

Pour montrer que la Grassmannienne est représentable, on adopte la même approche que [1], chapitre 8. Comme on peut recoller les faisceaux, en particulier les  $\mathcal{O}_S$ -modules, le foncteur  $\text{Grass}_{d,n}$  est un faisceau de Zariski. Par le théorème 1.12, il suffit de vérifier que la Grassmannienne admet un recouvrement par des sous-foncteurs ouverts et représentables.

La première étape consiste à définir ces sous-foncteurs.

**Définition 2.3.** Soit  $I \subset \{1, \dots, n\}$  un sous-ensemble ayant  $n - d$  éléments. Pour tout schéma  $S$ , on pose

$$\text{Grass}_{d,n}^I(S) := \{ \mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n} \text{ tels que } \mathcal{O}_S^I \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \text{ est un isomorphisme} \}.$$

Ici, la première flèche est le morphisme induit par l'inclusion  $I \subseteq \{0 \dots n\}$ , qu'on note  $u^I : \mathcal{O}_S^I \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n$ . Ainsi, un élément  $\mathcal{U}$  de la Grassmannienne est dans  $\text{Grass}_{d,n}^I$  si et seulement si  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{O}_S^I = \mathcal{O}_S^n$ . Le point clef est un résultat de base en algèbre linéaire : on peut toujours compléter une base d'un sous-espace vectoriel de dimension  $d$  à une base de  $k^n$  en ajoutant  $n - d$  vecteurs de la base canonique.

*Remarque 2.4.* Soit  $I$  fixé. Les inclusions  $\text{Grass}_{d,n}^I(S) \hookrightarrow \text{Grass}_{d,n}(S)$ , pour tout schéma  $S$ , induisent un morphisme de foncteur

$$\iota^I : \text{Grass}_{d,n}^I \longrightarrow \text{Grass}_{d,n}.$$

**Lemme 2.5.** *Le morphisme  $\iota^I$  est représentable et est une immersion fermée.*

*Démonstration.* Soit  $X$  un schéma et  $g : X \rightarrow \text{Grass}_{d,n}$  un morphisme de foncteurs. Par la définition 1.8, il s'agit de montrer que le foncteur  $\text{Grass}_{d,n}^I \times_{\text{Grass}_{d,n}} X$  est représentable, et que la deuxième projection  $\iota_{(X)}^I$  est une immersion fermée de schémas.

$$\begin{array}{ccc} \text{Grass}_{d,n}^I \times_{\text{Grass}_{d,n}} X & \longrightarrow & \text{Grass}_{d,n}^I \\ \downarrow \iota_{(X)}^I & & \downarrow \iota^I \\ X & \xrightarrow{g} & \text{Grass}_{d,n} \end{array}$$

Le lemme de Yoneda donne une bijection  $\text{Hom}(X, \text{Grass}_{d,n}) \simeq \text{Grass}_{d,n}(X)$ . Le morphisme  $g$  correspond donc à  $g_X(id_X) =: \mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}(X)$ , un sous-module de  $\mathcal{O}_X^n$ . Soit  $S$  un schéma : par la définition 1.5 de produit fibré on a

$$\begin{aligned} (\text{Grass}_{d,n}^I \times_{\text{Grass}_{d,n}} X)(S) &= \text{Grass}_{d,n}^I(S) \times_{\text{Grass}_{d,n}(S)} X(S) = \\ &= \{(\mathcal{E}, f) \in \text{Grass}_{d,n}^I \times \text{Hom}_{\text{Sch}}(S, X) : \iota^I \mathcal{E} = g_S(f)\}. \end{aligned}$$

Comme  $g$  est une transformation naturelle, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X(X) & \xrightarrow{(-) \circ f} & X(S) \\ \downarrow g_X & & \downarrow g_S \\ \text{Grass}_{d,n}(X) & \xrightarrow{f^*} & \text{Grass}_{d,n}(S) \end{array}$$

En appliquant ce diagramme à  $id_X$ , on obtient  $g_S(f) = g_S((-) \circ f)(id_X) = f^* g_X(id_X) = f^* \mathcal{U}$ . On exprime donc le produit fibré comme

$$(\text{Grass}_{d,n}^I \times_{\text{Grass}_{d,n}} X)(S) = \{f \in \text{Hom}_{\text{Sch}}(S, X) : f^* \mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}^I(S)\}.$$

Or, soit  $\alpha$  le morphisme  $\mathcal{O}_X^I \hookrightarrow \mathcal{O}_X^n \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X^n / \mathcal{U}$ . Par définition,  $f^* \mathcal{U}$  est un élément de  $\text{Grass}_{d,n}^I(S)$  si et seulement si le morphisme  $\alpha_f = f^* \alpha : \mathcal{O}_S^I \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S^n / f^* \mathcal{U}$  est un isomorphisme. Comme  $\mathcal{O}_S^I$  et  $\mathcal{O}_S^n / f^* \mathcal{U}$  sont tous les deux localement libres de rang  $n - d$ , le morphisme  $\alpha_f$  est un isomorphisme si et seulement si il est surjectif. Pour conclure il suffit de montrer qu'il existe un sous-schéma ouvert  $V \subseteq X$  tel que  $f : S \rightarrow X$  se factorise par  $V$  si et seulement si  $\alpha_f$  est surjectif. On conclut donc en utilisant la proposition 8.4 de [1], appliquée au morphisme  $\alpha$ .  $\square$

**Lemme 2.6.** *Le foncteur  $\text{Grass}_{d,n}^I$  est représentable.*

*Démonstration.* En fait on montre qu'il est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^{d(n-d)}$ , qui est représentable (exemple 1.4). Soit  $S$  un schéma et  $\mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}^I$ . Par définition on a un isomorphisme  $\mathcal{O}_S^I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^n / \mathcal{U}$ . Si on compose avec son inverse, on obtient

$$u_{\mathcal{U}} : \mathcal{O}_S^n \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^I$$

tel que  $\ker(u_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ . De plus, on remarque que  $u_{\mathcal{U}} \circ u^I = id_{\mathcal{O}_S^I}$ .

À l'inverse, si on considère un morphisme  $u : \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^I$  tel que  $u \circ u^I = id_{\mathcal{O}_S^I}$ , alors  $\ker(u) \in \text{Grass}_{d,n}^I$ . On obtient donc une bijection

$$F(S) := \{u \in \text{Hom}(\mathcal{O}_S^n, \mathcal{O}_S^I) : u \circ u^I = id\} \longrightarrow \text{Grass}_{d,n}^I(S), \quad u \longmapsto \ker(u),$$

fonctorielle en  $S$ , c'est-à-dire un isomorphisme de foncteurs  $F \simeq \text{Grass}_{d,n}^I$ .

Or, on note  $J := \{1, \dots, n\} \setminus I$  et on définit une application

$$F(S) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_S^J, \mathcal{O}_S^I) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^{J \times I} = \mathbb{A}^{d(n-d)}(S), \quad u \longmapsto u|_{\mathcal{O}_S^J}.$$

qui est bijective et fonctorielle en  $S$ . Cela implique que  $\text{Grass}_{d,n}^I \simeq F \simeq \mathbb{A}^{d(n-d)}$ , et on conclut.  $\square$

In fine, nous sommes en mesure de montrer le résultat principal de cet exposé :

**Théorème 2.7.** *Soient  $1 \leq d \leq n$  des entiers. Alors, le foncteur  $\text{Grass}_{d,n}$  est représentable. Le schéma qui le représente est appelé Grassmannienne.*

*Démonstration.* Considérons la famille  $(\iota^I : \text{Grass}_{d,n}^I \rightarrow \text{Grass}_{d,n})_I$ . Le lemme 2.5 affirme qu'ils sont des sous-foncteurs ouverts de  $\text{Grass}_{d,n}$ , le lemme 2.6 que les foncteurs  $\text{Grass}_{d,n}^I$  sont représentables. Pour utiliser le théorème 1.12, il suffit de montrer que pour tout schéma  $X$  et tout morphisme  $g : X \rightarrow \text{Grass}_{d,n}$ , les images des  $(\iota^I)_{(X)}$  forment un recouvrement ouvert de  $X$ . On note  $U^I$  le sous-schéma ouvert de  $X$  qui représente le foncteur  $\text{Grass}_{d,n}^I \times_{\text{Grass}_{d,n}} X$  : le but est de montrer que le morphisme  $f : \coprod_I U^I \rightarrow X$ , induit par les immersions ouvertes  $\iota_{(X)}^I$ , est surjectif. Il suffit de prouver qu'il est surjectif sur les  $K$ -points, avec  $K$  un corps (voir [1], proposition 4.8).

$$\begin{array}{ccc} U^I(\text{Spec } K) & \longrightarrow & \text{Grass}_{d,n}^I(\text{Spec } K) \\ \downarrow \iota_{(X),K}^I & & \downarrow \iota_K^I \\ X(\text{Spec } K) & \xrightarrow{g \circ (-)} & \text{Grass}_{d,n}(\text{Spec } K) \end{array}$$

Soit  $x : \text{Spec } K \rightarrow X$  un  $K$ -point de  $X$ . Alors  $g(x) = g \circ x : \text{Spec } K \rightarrow \text{Grass}_{d,n}$  correspond par Yoneda à un certain  $W \in \text{Grass}_{d,n}(\text{Spec } K)$ , c'est-à-dire à un sous-espace vectoriel  $W \subseteq K^n$  de dimension  $d$ . On remarque que le point  $x$  appartient à l'image de  $U^I(\text{Spec } K)$  si et seulement si  $K^I$  est un supplémentaire de  $W$  dans  $K^n$ . Si on fixe une base de  $W$ , l'algèbre linéaire nous dit qu'on peut la compléter à une base de  $K^n$  avec  $n - d$  éléments de la base canonique. Autrement dit, il existe un sous-ensemble  $I \subseteq \{1 \dots n\}$  ayant  $n - d$  éléments tel que  $W \oplus K^I = K^n$ , c'est-à-dire  $x$  est dans l'image de  $U^I(\text{Spec } K)$ . On conclut finalement que  $f$  est surjectif.  $\square$

### 2.3 Espace projectif

L'espace projectif est un cas particulier de Grassmannienne.

D'abord, on rappelle sa construction en tant que recollement d'espaces affines. Soit  $R$  un anneau, on considère  $(n + 1)$  copies de  $\mathbb{A}_R^n$ , qu'on note

$$U_i := \text{Spec } R \left[ \frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right].$$

Si on voit les anneaux  $R[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]$  comme des sous-anneaux de  $R[X_0, X_0^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ , on peut utiliser l'égalité

$$R \left[ \frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] \left[ \frac{X_i}{X_j} \right] = R \left[ \frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{\hat{X}_j}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right] \left[ \frac{X_j}{X_i} \right] \quad (1)$$

pour définir une donnée de recollement. L'ensemble des indices est  $\Lambda := \{0 \dots n\}$ , les sous-schémas ouverts sont  $U_{ii} := U_i$  et  $U_{ij} := D_{U_i}(X_i/X_j) \subset U_i$ , pour tout  $i, j \in \Lambda$ , et les isomorphismes entre eux sont  $\varphi_{ii} := \text{id}_{U_i}$  et  $\varphi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$  donnés par l'équation (1). Les conditions de cocycle sont satisfaites : le schéma obtenu par recollement est l'espace projectif sur  $R$  de dimension  $n$ , qu'on note  $\mathbb{P}_R^n$ .

Cette construction généralise celle que l'on a sur un corps. Dans ce cas, on décrit l'espace projectif de dimension  $n - 1$  comme l'ensemble des droites vectorielles de  $k^n$ , obtenant un isomorphisme entre la Grassmannienne  $\text{Grass}_{1,n}(k)$  et  $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ . Cette identification motive la proposition suivante.

**Proposition 2.8.** *Pour tout  $n \geq 1$ , on a un isomorphisme de schémas  $\text{Grass}_{1,n} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ .*

*Démonstration.* Par définition, les éléments de  $\text{Grass}_{1,n}(S)$  sont localement facteurs directs de  $\mathcal{O}_S^n$  de rang 1. Soit  $\mathcal{L}$  un tel sous-module : comme il est localement libre, pour tout point  $s \in S$  il existe un voisinage ouvert affine  $U$  et une section  $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S^n) = \Gamma(U, \mathcal{O}_S)^n$  qui engendre  $\mathcal{L}|_U$ . De plus,  $\mathcal{L}$  est localement facteur direct de  $\mathcal{O}_U^n$  si et seulement si  $x_0, \dots, x_{n-1}$  engendrent  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ .

Or, soit  $U_i := \text{Grass}_{1,n}^{\{1 \dots n\} \setminus \{i+1\}}$  le sous-schéma ouvert défini en 2.3.  $\mathcal{L}$  appartient à  $U_i(S)$  si et seulement si il est

localement engendré par  $(x_0, \dots, x_{n-1})$ , avec  $x_i$  une section inversible dans  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ . Relativement à ces notations, l'isomorphisme  $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{n-1}$  - défini dans la preuve du lemme 2.6 - est donné par

$$\begin{aligned} U_i(S) &\longrightarrow F(S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S^{\{1\dots n\} \setminus \{i+1\}}) = \mathbb{A}^{n-1}(S) \\ \mathcal{L} &\longmapsto \left( u_{\mathcal{L}}: \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^{\{1\dots n\} \setminus \{i+1\}} \right) \longmapsto u_{\mathcal{L}|_{\mathcal{O}_S^{i+1}}} \\ \mathcal{L} = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle &\longmapsto \left( \frac{x_0}{x_i} \dots \frac{\hat{x}_i}{x_i} \dots \frac{x_{n-1}}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Par définition de  $\mathbb{P}^n$  comme recollement des espaces affines, on obtient que les isomorphismes

$$U_i: \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

se recollent en un isomorphisme  $\mathrm{Grass}_{1,n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{n-1}$ . □

## 2.4 Plongement de Plücker

Avoir introduit l'espace projectif permet de construire une immersion de la Grassmannienne dans  $\mathbb{P}^N$ , pour  $N$  un entier suffisamment grand. Ensuite on verra qu'il s'agit d'une immersion fermée.

Pour définir précisément ce plongement, il faut introduire une généralisation de la Grassmannienne.

**Définition 2.9.** Soit  $S$  un schéma,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi cohérent et  $e \geq 0$  un entier. Pour tout  $S$ -schéma  $h: T \rightarrow S$ , on pose

$$\mathrm{Grass}^e(\mathcal{E})(T) := \{ \mathcal{U} \subseteq h^* \mathcal{E} : h^* \mathcal{E} / \mathcal{U} \text{ est un } \mathcal{O}_T\text{-module localement libre de rang } e \}.$$

Pour tout morphisme de  $S$ -schémas  $f: T' \rightarrow T$ , on pose

$$\mathrm{Grass}^e(\mathcal{E})(f): \mathrm{Grass}^e(\mathcal{E})(T') \rightarrow \mathrm{Grass}^e(\mathcal{E})(T), \quad \mathcal{U} \mapsto f^* \mathcal{U}.$$

Grâce à la proposition 2.1, ceci donne un foncteur contravariant de  $(\mathrm{Sch}/S)$  dans  $\mathrm{Set}$ . On remarque que le cas particulier  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^n$ ,  $e = n - d$  revient à  $\mathrm{Grass}^{n-d}(\mathcal{O}_S^n) = \mathrm{Grass}_{d,n} \times_{\mathbb{Z}} S$ .

On utilise le résultat suivant : dans le cas où  $\mathcal{E}$  est de type fini, la preuve est similaire à celle qu'on a vu précédemment. Pour les détails, voir [2].

**Proposition 2.10.** *Le foncteur  $\mathrm{Grass}^e(\mathcal{E})$  est représentable par un  $S$ -schéma, qu'on appelle Grassmannienne des quotients de  $\mathcal{E}$  de rang  $e$ .*

Or, soient  $1 \leq d \leq n$  : la puissance extérieure  $\bigwedge^d \mathcal{O}_S^n$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang  $\binom{n}{d} =: N + 1$ . Si  $\mathcal{U}$  est localement facteur direct de  $\mathcal{O}_S^n$  de rang  $d$ , alors  $\bigwedge^d \mathcal{U}$  est localement facteur direct de  $\bigwedge^d \mathcal{O}_S^n$  de rang 1. Ainsi, on a un morphisme naturel de foncteurs

$$\mathrm{Grass}_{d,n}(S) \longrightarrow \mathrm{Grass}^N(\mathcal{O}_S^{N+1}) = \mathrm{Grass}^N(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}}^{N+1})(S), \quad \mathcal{U} \longmapsto \bigwedge^d \mathcal{U}.$$

On identifie le but de ce morphisme avec un espace projectif : en fait,

$$\mathrm{Grass}^N(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}}^{N+1}) \simeq \mathrm{Grass}_{1,N+1} \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spec} \mathbb{Z} = \mathrm{Grass}_{1,N+1} = \mathbb{P}^N = \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}.$$

**Définition 2.11.** Le morphisme

$$\mathrm{Grass}_{d,n} \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad \mathcal{U} \longmapsto \bigwedge^d \mathcal{U}$$

est dit le *plongement de Plücker*. Comme les deux parties sont représentables, c'est un morphisme de schémas.

La suite est dédiée à démontrer le théorème suivant. On adopte la même approche que [3], chapitre 6, en généralisant la preuve au cas d'un schéma quiconque.

**Théorème 2.12.** *Le plongement de Plücker est une immersion fermée.*

Soit  $S$  un schéma. Comme la propriété d'être une immersion fermée est locale pour la topologie de Zariski sur  $S$ , on peut supposer  $S = \mathrm{Spec} A$ , avec  $A$  un anneau. Le module  $\mathcal{O}_S^n$  est localement libre : quitte à restreindre à nouveau à un sous-schéma ouvert affine, on peut supposer  $\mathcal{O}_S^n = \tilde{V}$ , où  $V$  est un  $A$ -module libre de rang  $n$ . Finalement, on peut

identifier :

$$\text{Grass}_{d,n}(S) = \{M, A\text{-module facteur direct de } V \text{ de rang } d\}$$

$$\mathbb{P}^N(S) = \text{Grass}_{1,N+1}(S) = \{N, A\text{-module facteur direct de } \bigwedge^d V \text{ de rang } 1\}.$$

et le plongement de Plücker est donné par

$$\text{Grass}_{d,n}(S) \longrightarrow \text{Grass}_{1,N+1}(S), \quad M = \langle v_1 \dots v_d \rangle \longmapsto \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_d \rangle =: \langle \omega \rangle,$$

où  $v_1 \dots v_d$  engendrent  $M$ . Si on choisit des générateurs différents, le vecteur  $\omega$  est multiplié par un élément inversible de  $A$ , le déterminant du changement de base, donc  $\langle \omega \rangle$  est bien défini.

Décrire l'image de la Grassmannienne dans  $\mathbb{P}^N$  revient à caractériser les éléments de  $\bigwedge^d V$  qui sont *décomposables*, c'est-à-dire les  $\omega$  tels qu'ils existent  $v_1 \dots v_d$  dans  $V$  qui engendrent un sous-module facteur direct de  $V$ , tels que  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ . On dit que  $v \in V$  *divise*  $\omega$ , et on note  $v|\omega$ , si et seulement si il existe  $\omega' \in \bigwedge^{d-1} V$  tel que  $\omega = v \wedge \omega'$ .

**Lemme 2.13.** *Soit  $\omega \in \bigwedge^d V$ . Pour  $v_1 \dots v_k$  qui engendrent un sous-module facteur direct de  $V$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(1) v_1 \wedge \dots \wedge v_k | \omega \quad (2) \omega \wedge v_1 = \dots \omega \wedge v_k = 0 \quad (3) v_1 | \omega, \dots, v_k | \omega.$$

*Démonstration.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2) : On complète  $v_1 \dots v_k$  en une base  $v_1 \dots v_n$  de  $V$ . Les  $v_I := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$  pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$  forment donc une base de  $\bigwedge^d V$ . On exprime  $\omega$  comme  $\omega = \sum_I \omega_I v_I$ , et on a  $\omega \wedge v_j = \sum_I \omega_I v_I \wedge v_j = \sum_{j \notin I} \omega_I v_I \wedge v_j$ . Donc pour  $j = 1 \dots k$ ,  $\omega \wedge v_j = 0$  si et seulement si  $\omega_I \neq 0$  implique  $j \in I$ . Alors la condition (2) est équivalente à  $\omega_I \neq 0$  implique  $1, \dots, k \in I$ , c'est-à-dire que  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  divise  $\omega$ .  
(2)  $\Leftrightarrow$  (3) : Pour  $k = 1$ , on vient de montrer que si  $v \neq 0$ ,  $v$  divise  $\omega$  si et seulement si  $\omega \wedge v = 0$ . La conclusion en découle directement.  $\square$

**Lemme 2.14.** *Soit  $\omega \in \bigwedge^d V$  non nul. On pose*

$$\varphi(\omega) : V \longrightarrow \bigwedge^{d+1} V, \quad v \longmapsto \omega \wedge v.$$

*Alors pour  $k \leq d$ ,  $\omega$  est  $k$ -divisible si et seulement si  $\text{im } \varphi(\omega)$  peut être engendré par  $n - k$  éléments.*

*En particulier,  $\omega$  est décomposable, c'est-à-dire  $d$ -divisible, si et seulement si  $\text{im } \varphi(\omega)$  peut être engendré par  $n - d$  éléments.*

*Démonstration.* On dit que  $\omega$  est  $k$ -divisible s'il existe  $v_1 \dots v_k$  qui engendrent un sous- $A$ -module facteur direct de  $V$ , tels que  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  divise  $\omega$ , c'est-à-dire pour le lemme précédent que  $\omega \wedge v_1 = \varphi(\omega)(v_1) = \dots = \omega \wedge v_k = \varphi(\omega)(v_k) = 0$ . Donc  $v_1 \dots v_k \in \ker \varphi(\omega)$ . Si on complète en une base de  $V$  avec  $v_{k+1} \dots v_n$ , c'est équivalent à dire que ces derniers  $n - k$  éléments engendrent  $\text{im } \varphi(\omega)$ .  $\square$

*Remarque 2.15.* Si  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  est décomposable, on a montré que  $\ker \varphi(\omega) = \langle v_1 \dots v_d \rangle$ . On retrouve donc le module  $M = \ker \varphi(\omega)$  à partir de  $\omega$  : le plongement de Plücker est injectif.

Le but est de montrer qu'on peut décrire le sous-ensemble des éléments décomposables comme lieu des zéros communs de certains polynômes. On va commencer par des lemmes préliminaires.

**Lemme 2.16.** (1) *Dualité linéaire : l'application  $\bigwedge^d V \times \bigwedge^d V^* \rightarrow A$ ,*

$$((x_1 \dots x_d), (u_1 \dots u_d)) \longmapsto \det(u_i(x_j))_{i,j=1 \dots d} =: \langle x, u \rangle$$

*s'étend par bilinéarité en un accouplement parfait.*

(2) *Dualité extérieure : l'application  $\bigwedge^d V \times \bigwedge^{n-d} V \rightarrow \det V = \bigwedge^n V$ ,  $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$  est un accouplement parfait.*

La première dualité nous permet d'identifier canoniquement  $(\bigwedge^d V)^*$  avec  $\bigwedge^d V^*$ . Par la suite, il est plus aisé de fixer deux isomorphismes  $A \simeq \det V$ , et  $A \simeq \det V^*$ , qui soient compatibles entre eux. Soit  $e_1 \dots e_n$  une base de  $V$  : on pose

$$\begin{aligned} \iota : \det V &\longrightarrow A, & e &:= e_1 \wedge \dots \wedge e_n \longmapsto 1 \\ \iota^* : \det V^* &\longrightarrow A, & e^* &:= e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \longmapsto 1. \end{aligned}$$

En composant les deux dualités, on obtient

$$\bigwedge^d V \rightarrow \left( \bigwedge^{n-d} V \right)^* \rightarrow \bigwedge^{n-d} V^*, \quad \omega \mapsto \omega^*,$$

où  $\omega^*$  est déterminée par l'identité  $\iota(\omega \wedge x) = \det(\omega^*(x))$ , pour tout  $x$  dans  $\bigwedge^{n-d} V$ .

**Lemme 2.17.** *Pour tout  $\omega$  non nul,*

(1)  $\omega$  est décomposable si et seulement si  $\omega^*$  est décomposable.

(2) Bidualité : en identifiant  $V$  avec son bidual, on a  $\omega^{**} = (\omega^*)^* = (-1)^{k(n-k)}\omega$ .

*Démonstration.* (1) : On suppose  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  et on complète en une base  $v_1 \dots v_n$  de  $V$ . Soit  $(v_i^*)_i$  la base duale : on affirme que  $\omega^* = \lambda(v_{d+1}^* \wedge \dots \wedge v_n^*)$ , avec  $\lambda := \iota(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$ . Par la caractérisation de  $\omega^*$ , il suffit de vérifier que

$$\iota(v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge x) = \lambda \det((v_{d+1}^* \wedge \dots \wedge v_n^*)(x)),$$

pour tout  $x = v_J$  vecteur de base,  $|J| = n - d$ . Dans ce cas, les deux membres valent  $\lambda$  si  $J = \{d+1, \dots, n\}$ , 0 sinon. L'autre implication découle du point (2).

(2) : Par linéarité, il suffit de vérifier l'affirmation pour  $\omega$  décomposable. Dans ce cas,

$$\omega^{**}(\omega^*)^* = \lambda(v_{d+1}^* \wedge \dots \wedge v_n^*)^* = \lambda \lambda^*(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = \lambda \lambda^* \omega,$$

où  $\lambda^* = \iota^*(v_{d+1}^* \wedge \dots \wedge v_n^* \wedge v_1^* \wedge \dots \wedge v_d^*) = (-1)^{k(n-k)} \iota^*(v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*)$ . Or, comme  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda e$ , on a  $v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^* = \lambda^{-1} e^*$ , donc  $\iota^*(v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*) = \lambda^{-1}$ , et on conclut.  $\square$

Pour tout  $\omega \in \bigwedge^d V$  non nul, on pose

$$\psi(\omega) := \varphi(\omega^*) : V^* \rightarrow \bigwedge^{n-d+1} V^*, \quad v^* \mapsto \omega^* \wedge v^*.$$

**Théorème 2.18** (Relations de Plücker). *Soient*

$${}^t\varphi(\omega) : \bigwedge^{d+1} V^* \rightarrow V^*, \quad {}^t\psi(\omega) : \bigwedge^{n-d+1} V \rightarrow V$$

les applications transposées de  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\omega$  est décomposable.
- (ii) Les noyaux de  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$  sont l'orthogonal l'un de l'autre.
- (iii) Les images de  ${}^t\varphi(\omega)$  et  ${}^t\psi(\omega)$  sont l'orthogonal l'un de l'autre.
- (iv) Les images de  ${}^t\varphi(\omega)$  et  ${}^t\psi(\omega)$  sont orthogonales, c'est-à-dire

$$P_{\alpha\beta}(\omega) := \langle {}^t\varphi(\omega)(\alpha), {}^t\psi(\omega)(\beta) \rangle = 0,$$

pour tout  $\alpha \in \bigwedge^{d+1} V^*, \beta \in \bigwedge^{n-d+1} V$ .

En particulier, on s'intéresse à l'équivalence entre (i) et (iv), parce que les  $P_{\alpha\beta}$  sont des polynômes homogènes de degré 2, qu'on appelle les *relations de Plücker*. Grâce à ce théorème, on décrit l'image de la Grassmannienne comme lieu de zéros d'équations polynomiales : autrement dit, elle est un sous-schéma fermé de l'espace projectif.

*Démonstration.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Soit  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ . Si on complète en une base  $v_1 \dots v_n$  de  $V$ , on a vu que  $\omega^* = \lambda(v_{d+1}^* \wedge \dots \wedge v_n^*)$ . De plus,  $M := \ker \varphi(\omega) = \langle v_1 \dots v_d \rangle$  et de la même manière, en utilisant la bidualité, on obtient  $\ker \psi(\omega) = \ker \varphi(\omega^*) = \langle v_{d+1}^* \dots v_n^* \rangle = M^\perp$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Par définition d'application transposée, on a  $\text{im}^t \varphi(\omega) = (\ker \varphi(\omega))^\perp$ , qui par (ii) est égal à  $\ker \psi(\omega) = (\text{im}^t \psi(\omega))^\perp$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) : immédiat.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : On a  $\text{im}^t \varphi(\omega) \subset (\text{im}^t \psi(\omega))^\perp$ . Comme  $\text{im} \varphi(\omega)$  est engendré par au moins  $n - d$  éléments, il en va de même pour  $\text{im}^t \varphi(\omega)$ . De plus,  $\text{im} \psi(\omega)$ , et donc  $\text{im}^t \psi(\omega)$  est engendré par au moins  $n - (n - d) = d$  éléments : son orthogonal est donc engendré par  $n - d$  éléments. On conclut que  $\text{im} \varphi(\omega)$  peut être engendré par exactement  $n - d$  éléments. Par le lemme 2.14, ceci implique que  $\omega$  est décomposable.  $\square$

## 2.5 Relations de Plücker

Pour rendre le raisonnement plus clair, on calcule explicitement les relations de Plücker dans le cas où  $A = k$  est un corps,  $n = 4$  et  $d = 2$ .  $V$  est donc un  $k$ -espace vectoriel de dimension 4, et le plongement de Plücker est une immersion

$$\text{Grass}_{2,4}(k) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) = \mathbb{P}^5.$$

On fixe une base  $e_1 \dots e_4$  de  $V$  et on note  $\omega = re_{12} + se_{13} + te_{14} + ue_{23} + ve_{24} + we_{34}$  un élément de  $\bigwedge^2 V$ , avec  $e_{ij} := e_i \wedge e_j$ . Avec un calcul, on obtient

$$\omega^* = re_3^* \wedge e_4^* - se_2^* \wedge e_4^* + te_2^* \wedge e_3^* + ue_1^* \wedge e_4^* - ve_1^* \wedge e_3^* + we_1^* \wedge e_2^*.$$

On considère donc  $\varphi(\omega): V \rightarrow \bigwedge^3 V$ , ayant comme base  $e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$ , et  $\psi(\omega): V^* \rightarrow \bigwedge^3 V^*$ . Relativement à ces bases - et aux respectives bases duales - les matrices qui représentent  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$  sont

$$B = \begin{pmatrix} u & -s & r & 0 \\ v & -t & 0 & r \\ w & 0 & -t & s \\ 0 & w & -v & u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} t & v & w & 0 \\ -s & -u & 0 & w \\ r & 0 & -u & v \\ 0 & r & s & t \end{pmatrix}$$

On pose  $\alpha := e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$  et  $\beta := e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  : la condition  $\langle {}^t\varphi(\omega)(\alpha), {}^t\psi(\omega)(\beta) \rangle = 0$  devient

$$\left\langle {}^tB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^tC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle ue_1^* - se_2^* + re_3^*, te_1 + ve_2 + we_3 \rangle = ut - vs + rw = 0.$$

La même équation, évaluée en tout autre  $\alpha$  et  $\beta$ , donne ou bien la même condition ou bien aucune : la Grassmannienne  $\text{Grass}_{2,4}(k)$  est donc une hypersurface dans  $\mathbb{P}^5(k)$ .

## 3 Conclusion

Au cours de ce séminaire, nous avons d'abord introduit le formalisme des foncteurs de points et la question de la représentabilité d'un foncteur, puis nous les avons appliqués à un cas particulier très simple. Nous avons pris des constructions bien connues dans le cas des corps, les Grassmanniennes et les espaces projectifs, et nous les avons étendues à des objets plus généraux en utilisant les résultats abstraits du début. Ce n'est qu'un exemple : cette théorie est ensuite développée avec les schémas de Hilbert et les schémas Quot, dont les Grassmanniennes constituent un cas particulier. Ces derniers schémas sont à la base des preuves de la représentabilité de la plupart des espaces des modules.

## Références

---

- [1] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I, Schemes with examples and exercises*. Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [2] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique*, volume I. Publications Mathématiques de L'Institut des Hautes Scientifiques, 1960.
- [3] Joe Harris. *Algebraic geometry : a first course*, volume 133. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Pierre Schapira. Categories and homological algebra. *accessible en ligne à l'adresse <https://perso.univ-rennes1.fr/frank.loray/CoursFes.pdf>*, 2012.