

Introduction à la théorie du corps de classe

Rodolphe LAMPE
Stage encadré par Matthieu Romagny

12 septembre 2007

Table des matières

1	Valuation et entiers p-adiques	2
1.1	Valuation	2
1.2	Anneau de valuation discrète	3
1.3	Entiers p -adiques	4
1.4	Corps p -adiques	4
2	Ramification	5
3	Théorie de Galois	5
3.1	Groupes de Galois sur les corps locaux	6
3.2	Extensions galoisiennes cycliques	6
3.3	Théorie de Galois infinie	6
3.4	Groupes profinis	7
4	Loi de réciprocité	7
4.1	Axiomes sur les groupes de cohomologie	8
4.2	Construction	8
5	Annexe	9
5.1	Limite projective	9
6	Bibliographie	11

Historiquement la théorie du corps de classes (toute fin du XIXème et début du XXème) est née de la volonté de décrire les extensions galoisiennes abéliennes des corps de nombres. On peut citer les précurseurs de cette période - avant 1930 - : Hilbert, Furtwangler, Weber, Kronecker, Takagi. Le travail de leurs successeurs (Artin, Tate, Chevalley,...) a permis de d'algébriquer les démonstrations (i.e. éliminer les arguments analytiques) en donnant en même temps un cadre axiomatique à la théorie, qui fonctionne aussi bien pour le cas global (corps de nombres) que local (corps p -adiques). Avec cette axiomatisation, la théorie fait une large part à la cohomologie des groupes. On peut néanmoins se limiter au strict minimum, en suivant l'approche de Neukirch. C'est ce qu'on se propose de faire.

Le mémoire se concentre sur le cas des corps p -adiques, qu'il présente brièvement ; son objectif est de construire l'application de réciprocité, coeur de la théorie, qui établit un isomorphisme entre l'abelianisé du groupe de Galois d'une extension L/K et le groupe des classes d'éléments inversibles de K modulo les normes. Le formalisme cohomologique n'est pas abordé ; en revanche l'accent est mis sur la correspondance entre automorphismes de Frobenius et éléments premiers.

1 Valuation et entiers p -adiques

Les corps de nombres, objets centraux de la théorie du corps de classe, se plongent dans \mathbb{C} et héritent ainsi de la topologie usuelle de \mathbb{C} . Ils possèdent également de nombreuses autres topologies naturelle, celles induites par les valuations que nous étudions ici.

Les valuations sur un corps K permettent de définir une topologie sur K . Elles permettent également de créer une structure en construisant les sous-ensembles suivant : l'anneau de valuation du corps K , l'unique idéal maximal de l'anneau de valuation et le corps résiduel. Une fois cette topologie définie et cette structure établie, on peut étudier les propriétés qui en découlent. Un exemple qui nous intéresse particulièrement est le cas de la valuation p -adique est des entiers p -adiques.

1.1 Valuation

Définition 1.1

Une valeur absolue sur un corps K est une fonction $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $|xy| = |x||y|$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Définition 1.2

Une valeur absolue $|\cdot|$ est non archimédienne si $|n|$ reste borné pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou de manière équivalente, elle vérifie l'inégalité $|x + y| \leq \max(|x|, |y|), \forall x, y \in K$.

Définition 1.3

Une valuation sur un corps K est une fonction $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vérifiant les propriétés :

- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
- $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

À tout valuation, on peut associer une valeur absolue associée :

Proposition 1.4

Pour tout valuation v , on définit la valeur absolue $|\cdot|$ associée à v par $|x| = q^{-v(x)}$, pour tout $x \in K$, pour un réel fixé $q > 1$. La valeur absolue ainsi définie est non archimédienne. Lorsque q varie, les valeurs absolues obtenues sont équivalentes (le quotient de deux valeurs absolues est borné).

Sur le corps \mathbb{Q} , nous connaissons la valeur absolue usuelle $|\cdot|$, c'est une valuation archimédienne notée $|\cdot|_\infty$. On peut définir, pour tout nombre premier p , la valuation non archimédienne $|\cdot|_p$. Elle est définie par $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, où v_p est la valuation p -adique (exponentielle) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^\times, x = p^a \times \frac{b}{c} \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\times \text{ et } (bc, p) = 1 \Rightarrow v_p(x) = a.$$

On prolonge v_p en 0 par $v_p(0) = \infty$. La fonction v_p ainsi définie est bien une valuation et la fonction $|\cdot|_p$ associée est bien une valeur absolue non archimédienne. De plus, toute topologie définie sur \mathbb{Q} par une valeur absolue est la topologie induite par une des deux valeurs absolues $|\cdot|_\infty$ ou $|\cdot|_p$:

Théorème 1.5

Toute valeur absolue sur \mathbb{Q} est équivalente à l'une des valeurs absolues $|\cdot|_\infty$ ou $|\cdot|_p$.

1.2 Anneau de valuation discrète

Soit v une valuation définie sur le corps K .

Définition 1.6

L'ensemble

$$o = \{x \in K, v(x) \geq 0\} = \{x \in K, |x| \leq 1\}$$

est un anneau appelé anneau de valuation. Le groupe des unités de cet anneau est

$$o^* = \{x \in K, v(x) = 0\} = \{x \in K, |x| = 1\}$$

et l'unique idéal maximal est

$$\mathfrak{p} = \{x \in K, v(x) \geq 1\} = \{x \in K, |x| < 1\}.$$

Le corps des fractions de l'anneau de valuation o est le corps K . Le corps o/\mathfrak{p} est appelé corps résiduel de o .

Une valuation v est appelé discrète si elle admet une plus petite valeur $s > 0$. Dans ce cas,

$$v(K^\times) = s\mathbb{Z}.$$

On normalise en prenant la valuation équivalente v/s . Il existe alors un élément $\pi \in o$ de valuation 1 qu'on appelle uniformisante. Il engendre l'idéal \mathfrak{p} et tout élément x de K^\times admet une unique écriture

$$x = u\pi^m$$

où $m \in \mathbb{Z}$ et $u \in o^*$.

Proposition 1.7

Si v est une valuation discrète de K , alors o , appelé anneau de valuation discrète, est un anneau principal contenant un unique idéal maximal \mathfrak{p} . Les idéaux non triviaux de o sont les puissances de \mathfrak{p} . De plus, on a

$$\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1} \cong o/\mathfrak{p}.$$

En effet, soit \mathfrak{a} un idéal non trivial de o et $x \neq 0$ un élément de \mathfrak{a} de valuation minimale $v(x) = n$. Alors $x = u\pi^n, u \in o^*$ donc $\pi^n o \subset \mathfrak{a}$. Si $y = u'\pi^m \in \mathfrak{a}$ alors $m \geq n$ et $y = (u'\pi^{m-n})\pi^n \in \pi^n o$. Ainsi $\mathfrak{a} = \pi^n o = \mathfrak{p}^n$. L'isomorphisme

$$\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1} \cong o/\mathfrak{p}$$

provient du morphisme $a\pi^n \mapsto a \pmod{\mathfrak{p}}$.

1.3 Entiers p -adiques

Lorsqu'on complète \mathbb{Q} par rapport à la topologie p -adique, on obtient les nombres p -adiques. Les nombres p -adiques sont très utilisés en théorie des nombres. Il nous intéresse tout particulièrement dans l'étude de la théorie du corps de classe car nous étudierons les corps p -adiques.

On fixe un nombre premier p .

Définition 1.8

Un entier p -adique est une série formelle infinie

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots,$$

où $0 \leq a_i < p$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble des entiers p -adiques est noté \mathbb{Z}_p .

L'addition et la multiplication de 2 entiers p -adiques se font à l'aide des règles usuelles des restes modulo p .

Définition 1.9

On définit l'ensemble des nombres p -adiques \mathbb{Q}_p comme l'ensemble des $p^n x$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}_p$.

Proposition 1.10

L'anneau des entiers \mathbb{Z}_p est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal (p) . Son corps des fractions est \mathbb{Q}_p et son corps résiduel est \mathbb{F}_p .

Proposition 1.11

L'application qui à tout entier p -adique

$$f = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$$

associe la suite $(\overline{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ des classes

$$\overline{s_n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i \pmod{p^n}$$

induit une bijection

$$\mathbb{Z}_p \rightarrow \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}.$$

1.4 Corps p -adiques

Définition 1.12

Un corps p -adique est une extension finie de \mathbb{Q}_p .

Les corps p -adiques apparaissent comme les complétés des corps de nombre :

Proposition 1.13

Le complété d'un corps de nombres pour une valuation p -adique est un corps p -adique.

Proposition 1.14

Un corps p -adique est un corps valué complet localement compact pour la topologie induite par la valuation p -adique. De plus, son anneau des entiers \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète, compact, et le corps résiduel est une extension finie de \mathbb{F}_p .

2 Ramification

On fixe un corps de base K Henselien pour une valuation non archimédienne v . On peut classer les extensions du corps K suivant la nature de leur ramification. Certaines sont non ramifiées, d'autres modérément, d'autres sauvagement et d'autres encore, totalement ramifiées.

On note $\mathcal{O}_K, \mathfrak{p}, \kappa$ pour le corps K respectivement l'anneau de valuation, l'idéal maximal et le corps résiduel. Pour une extension L de K on notera $\mathcal{O}_L, \mathfrak{P}, \lambda$ et la valuation w .

Définition 2.1

Une extension finie $L|K$ est non ramifiée si l'extension $\lambda|\kappa$ est séparable et

$$[L : K] = [\lambda : \kappa].$$

Une extension algébrique arbitraire $L|K$ est non ramifiée si elle est l'union de sous extensions finies non ramifiées.

Proposition 2.2

Soit $L|K$ une extension algébrique. Le composé $T|K$ de toutes les sous-extensions non ramifiées de $L|K$ est une extension non ramifiée appelé sous-extension maximale non ramifiée de $L|K$.

Exemple 2.3

Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n, p) = 1$. Alors l'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta)|\mathbb{Q}_p$, où ζ est une racine n -ième de l'unité, est une extension non ramifiée.

Si κ est de caractéristique non nulle ($p = \text{car}(\kappa)$) alors on a la notion plus faible suivante :

Définition 2.4

Une extension algébrique $L|K$ est modérément ramifiée si l'extension $\lambda|\kappa$ est séparable et $[L : K]$ est premier avec p . Dans le cas infini, le degré de chaque sous-extension finie $L|T$ est premier avec p .

Proposition 2.5

Soit $L|K$ une extension algébrique. Le composé $V|K$ de toutes les sous-extensions modérément ramifiées de $L|K$ est une extension modérément ramifiée appelée sous-extension maximale modérément ramifiée de $L|K$.

On a la tour d'extensions :

$$K \subset T \subset V \subset L.$$

Définition 2.6

L'extension $L|K$ est dite totalement (ou purement) ramifiée si $T = K$, et sauvagement ramifiée si elle n'est pas modérément ramifiée, c'est à dire $V \neq L$. L'extension est dite totalement sauvagement ramifiée si $V = T = K$.

Exemple 2.7

Soit $s \in \mathbb{N}^\times$, $n = p^s$ et ζ une racine n -ième de l'unité. Alors l'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta)|\mathbb{Q}_p$ est une extension totalement ramifiée de degré $\phi(p^s) = (p-1)p^{s-1}$. De plus, le groupe de Galois $G(\mathbb{Q}_p(\zeta)|\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Si $s > 1$, elle est sauvagement ramifiée.

3 Théorie de Galois

La théorie du corps de classe étudie les extensions galoisiennes abéliennes. Nous allons donc étudier les groupes de Galois associés aux extensions, qu'elles soit finies ou non. Dans le cas infini, nous introduisons les groupes profinis.

3.1 Groupes de Galois sur les corps locaux

Soit $L|K$ une extension galoisienne de corps locaux. On note λ et κ les corps résiduels respectifs.

Proposition 3.1

Le morphisme $G(L|K) \rightarrow G(\lambda|\kappa)$, qui à un élément σ associe sa réduction $\bar{\sigma}$, est surjectif.

De plus, il y a injectivité si l'extension est non ramifiée.

Proposition 3.2

Si $L|K$ est non ramifiée alors on a l'isomorphisme

$$G(L|K) = G(\lambda|\kappa).$$

3.2 Extensions galoisiennes cycliques

Théorème 3.3 (Kummer)

Soit K un corps de caractéristique p . Pour tout n premier à p , si K contient une racine n -ième de l'unité et si L est une extension galoisienne cyclique de degré n (autrement dit $G(L|K) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) alors L est de la forme $K[\sqrt[n]{a}]$ pour un certain $a \in K$.

Théorème 3.4 (Artin-Schreier)

Soit K un corps de caractéristique p . Pour toute extension galoisienne abélienne L de degré p (autrement dit $G(L|K) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), L est isomorphe à $\frac{K[X]}{X^p - X - a}$ pour un certain $a \in K$.

3.3 Théorie de Galois infinie

Pour tout corps k , on considère le groupe de Galois absolu $G_k = G(\bar{k}|k)$ défini comme étant le groupe de Galois de l'extension $\bar{k}|k$ où \bar{k} est une clôture séparable de k . Cette extension est de degré infini mais elle contient toutes les extensions galoisiennes finies de k . Ainsi, tout groupe de Galois pour une extension galoisienne de k est quotient du groupe de Galois absolu. On définit une topologie sur les groupes de Galois :

Définition 3.5 (Topologie de Krull)

Soit Ω une extension galoisienne de k . La topologie de Krull du groupe de Galois $G = G(\Omega|k)$ est la topologie telle que, pour tout $\sigma \in G$, l'ensemble des $\sigma G(\Omega|K)$, où K parcourt l'ensemble des extensions finies galoisiennes de k , est une base de voisinages de σ .

Les propriétés topologiques des sous-groupes du groupe de Galois $G(\Omega|k)$ sont directement liées à la nature des sous-extensions de $\Omega|k$. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 3.6

L'application

$$K \mapsto G(\Omega|K)$$

est une bijection entre les sous-extensions $K|k$ de $\Omega|k$ et les sous-groupes fermés de $G(\Omega|k)$. Les sous-groupes ouverts de $G(\Omega|k)$ correspondent précisément aux sous-extensions finies de $\Omega|k$.

Les sous-groupes ouverts sont fermés car G est totalement discontinu. De plus, ils sont d'indice fini par compacité de G .

3.4 Groupes profinis

Le groupe de Galois absolu est un groupe profini. Ces groupes sont utiles pour généraliser la théorie du corps de classe.

Définition 3.7 (Groupe profini)

Soit $\{G_i, g_{ij}\}$ un système projectif de groupes finis. La limite projective

$$G = \varprojlim_i G_i$$

est appelée groupe profini.

Proposition 3.8

Soit G un groupe profini. Si N parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts normaux de G alors

$$G = \varprojlim_N G/N$$

de manière à la fois algébrique et topologique.

Exemple 3.9

Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système projectif où les fonctions f_{ij} sont simplement les projections $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m|n$. La limite projective

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

est le groupe profini le plus simple à construire. Ce groupe s'exprime également en fonction des entiers p -adiques :

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p.$$

Exemple 3.10

Le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{F}_q} = G(\overline{\mathbb{F}_q}|\mathbb{F}_q)$ de \mathbb{F}_q est un groupe profini. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a l'isomorphisme

$$\begin{aligned} G(\mathbb{F}_{q^n}|\mathbb{F}_q) &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ F &\mapsto \bar{1}, \end{aligned}$$

et les morphismes $G(\mathbb{F}_{q^n}|\mathbb{F}_q) \rightarrow G(\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q)$ (où $m|n$) s'identifient aux projections $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Ainsi, en prenant la limite projective, on a :

$$G(\overline{\mathbb{F}_q}|\mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}}.$$

4 Loi de réciprocité

Soit K un corps local, la loi de réciprocité est une application qui permet de lier la structure du groupe K^\times aux extensions finie de K .

On note :

$$G = G(\overline{K}|K),$$

$$A = \overline{K}^\times,$$

$$d : G \rightarrow G(\tilde{K}|K) \cong G(\tilde{\kappa}|\kappa) \cong \hat{\mathbb{Z}},$$

$v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation normalisée.

Pour tout extension $L|K$ finie, on pose :

$$G_L = G(\overline{K}|L),$$

$$A_L = A^{G_L},$$

$$d_L = \frac{1}{[\hat{\mathbb{Z}} : d(G_L)]} : G_L \rightarrow \hat{\mathbb{Z}},$$

v_L l'extension de la valuation v sur le corps L .

Notre objectif est de prouver le théorème suivant :

Théorème 4.1

Pour toute extension finie $L|K$, on a un isomorphisme canonique

$$r_{L|K} : G(L|K)^{ab} \rightarrow K^\times / N_{L|K} L^\times.$$

4.1 Axiomes sur les groupes de cohomologie

On pose :

$$H^0(G(L|K), L^\times) = K^\times / N_{L|K} L^\times,$$

$$H^{-1}(G(L|K), L^\times) = N_{L|K} L^\times / I_{G(L|K)} L^\times$$

où $I_{G(L|K)} L^\times$ est le sous-groupe de $N_{L|K} L^\times$ généré par les éléments $\sigma(a)/a$ où $a \in L^\times$ et $\sigma \in G(L|K)$.

4.2 Construction

On commence par quelques remarques sur l'extension des corps résiduels et sur les propriétés des fonctions d_L .

L'extension $\lambda|\kappa$ est une extension de corps finis de degré $f = [\lambda : \kappa]$. Leur Frobenius sont F_κ et F_λ où $F_\lambda = (F_\kappa)^f$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G(\overline{\lambda}|\lambda) & \longrightarrow & G(\overline{\kappa}|\kappa) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \end{array}$$

$$F_\lambda \longrightarrow (F_\kappa)^f$$

On sait que

$$G(\overline{\lambda}|\lambda) \cong G(\overline{\kappa}|\kappa) \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

donc on a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} G(\overline{\lambda}|\lambda) & \rightarrow & G(\overline{\kappa}|\kappa) \\ F_\lambda & \mapsto & (F_\kappa)^f \end{array} .$$

De plus, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
G(\tilde{L}|L) & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \\
\downarrow & & \downarrow \times f \\
G(\tilde{K}|K) & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

Le morphisme $G(\tilde{L}|L) \rightarrow G(\tilde{K}|K)$ est injectif car son noyau est l'ensemble des σ qui laissent fixe L et \tilde{K} mais le compositum de ces deux corps est \tilde{L} donc σ ne peut qu'être l'identité. On peut maintenant passer à la construction de $r_{L|K}$.

Lemme 4.2

Pour tout $\sigma \in G(L|K)$, on peut trouver un antécédent $\tilde{\sigma}$ via le morphisme $G(\tilde{L}|\tilde{K}) \rightarrow G(L|K)$ tel que $d_K(\tilde{\sigma}) \in \mathbb{N}$.

En effet, ayant choisi une préimage $\tilde{\sigma}$, on peut en choisir une autre par multiplication d'un élément de $G(\tilde{L}|L)$ près. Or, d'après les remarques précédentes, on a $d_K(G(\tilde{L}|L)) = f \cdot \hat{\mathbb{Z}}$. Ainsi, en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \cong \hat{\mathbb{Z}}/f\hat{\mathbb{Z}}$, $d_K(\tilde{\sigma})$ appartient à $\{0, \dots, f-1\}$ pour un $\tilde{\sigma}$ bien choisi.

On pose alors $\Sigma = \tilde{L}^{\tilde{\sigma}}$, on choisit π_Σ une uniformisante de Σ et on pose :

$$r_{L|K}(\sigma) = N_{\Sigma|K}(\pi_\Sigma) \pmod{N_{L|K}L^\times}.$$

Montrons que cette application est bien définie. Soient $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}', \Sigma, \Sigma', \pi_\Sigma, \pi_{\Sigma'}$.

Si $d_K(\tilde{\sigma}) = d_K(\tilde{\sigma}')$ alors $\tilde{\sigma}|_{\tilde{K}} = \tilde{\sigma}'|_{\tilde{K}}$ car $d_K : G(\tilde{K}|K) \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme. De plus, par construction, $\tilde{\sigma}|_L = \tilde{\sigma}'|_L$ donc $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}'$ car $\tilde{K}L = \tilde{L}$.

Si $d_K(\tilde{\sigma}) < d_K(\tilde{\sigma}')$ alors il existe $\tilde{\tau} \in G(\tilde{L}|K)$ tel que $\tilde{\sigma}' = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}|_L = 1$ et $d_K(\tilde{\tau}) \in \mathbb{N}$. Posons $\Sigma'' = \tilde{L}^{\tilde{\tau}}$ qui contient L . On admet le lemme suivant :

Lemme 4.3

De l'égalité $\tilde{\sigma}' = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$ découle la relation :

$$N_{\Sigma'|K}(\pi_{\Sigma'}) \equiv N_{\Sigma|K}(\pi_\Sigma)N_{\Sigma''|K}(\pi_{\Sigma''}) \pmod{N_{\tilde{L}|K}(\tilde{L}^*)}.$$

L'égalité du lemme précédent peut se lire modulo $N_{L|K}L^\times$ car $N_{\tilde{L}|K} = N_{L|K} \circ N_{\tilde{L}|L}$. Comme $N_{\Sigma''|K} = N_{L|K} \circ N_{\Sigma''|L}$, on a :

$$N_{\Sigma'|K}(\pi_{\Sigma'}) = N_{\Sigma|K}(\pi_\Sigma) \pmod{N_{L|K}L^\times}.$$

Ainsi l'application de réciprocity est bien définie.

5 Annexe

5.1 Limite projective

Définition 5.1 (Système projectif)

Soit $\{X_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles d'un espace topologique X tel que, pour tout $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $X_k \subset X_i$ et $X_k \subset X_j$. Un système projectif sur I est une famille $\{X_i, f_{ij} | i, j \in I, i \leq j\}$ d'espaces topologiques X_i et de fonctions continues

$$f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$$

vérifiant

$$f_{ii} = \text{Id}_{X_i} \quad \text{et} \quad f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}, i \leq j \leq k.$$

Définition 5.2 (Limite projective)

La limite projective

$$X = \lim_{\leftarrow i} X_i$$

du système projectif $\{X_i, f_{ij}\}$ est l'ensemble

$$X = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid f_{ij}(x_j) = x_i \text{ pour tout } i \leq j\}.$$

6 Bibliographie

Neukirch. *Algebraic Number Theory*. Springer.

Serre. *Corps locaux*