

Université Pierre et Marie Curie Paris VI

L'espace de modules des courbes

Thomas Delacroix

Résumé

Ce mémoire a été réalisé dans le cadre d'un M2 de mathématiques fondamentales à l'Université Paris VI (Pierre et Marie Curie). Il a été réalisé sous la direction de Matthieu Romagny. Le but est de construire le champ algébrique \mathcal{M}_g selon Deligne et Mumford [DM]. Les sources principales pour la première partie sont [H], pour le cas d'une courbe lisse sur un corps algébriquement clos, et [Mi], pour les calculs. Les sources principales pour la deuxième partie sont [Ed] qui a pour but d'expliquer [DM], et [V]. Je tiens particulièrement à remercier Matthieu pour son aide très soutenue lors de l'élaboration de ce mémoire et Diane pour son soutien moral.

Table des matières

Introduction	1
0.1 Notations et conventions	1
0.2 Classification des courbes lisses	1
0.3 Espaces de modules	2
0.3.1 Schéma de modules fin	2
0.3.2 Schéma de modules grossier	3
0.3.3 Espaces de modules des courbes projectives lisses	3
1 Plongement tricanonique	5
1.1 Existence	5
1.1.1 Théorème de Riemann-Roch	6
1.1.2 Caractérisation des diviseurs très amples	7
1.2 Cas pratique	9
1.3 Généralisation aux courbes projectives lisses	12
2 Espace de modules des courbes	14
2.1 Champs algébriques	14
2.1.1 Groupoïdes sur S	14
2.1.2 Champs algébriques	19
2.2 Champs algébriques et quotients	22
2.3 Champ algébrique de modules des courbes	25
2.4 Schéma de modules grossier	28
A Schémas en groupes	30
B Schéma de Hilbert	33

Introduction

0.1 Notations et conventions

Dans l'ensemble de ce mémoire :

- * S désigne un schéma noethérien donné et \mathcal{S} la catégorie des S -schémas.
- * \underline{Ens} désigne la catégorie des ensembles.
- * B désignera systématiquement un S -schéma.

Sauf si le contexte le spécifie, les diagrammes sont lus comme des énoncés. Pour un diagramme noir, il faut lire : le diagramme noir est commutatif. Pour un diagramme bicolore noir et rouge (pointillés) : si le diagramme noir alors diagramme noir et rouge (pointillés). Les diagrammes dont les flèches sont en gras sont des diagrammes commutatifs de S -groupeïdes au sens de la définition 2.1.7. Les diagrammes cartésiens sont indiqués comme tels explicitement.

0.2 Classification des courbes lisses

En géométrie algébrique, la classification est une question centrale. Lorsque l'on étudie certains objets d'une catégorie, il est toujours souhaitable de pouvoir les classer selon différents critères, de façon à pouvoir distinguer si possible chaque classe d'isomorphisme dans cette catégorie. Et la classification la plus convenable est une paramétrisation par des coordonnées.

Le problème de classification que l'on étudie dans cet exposé est celui des courbes lisses.

Définition 0.2.1. *Une courbe lisse de genre g sur un corps k algébriquement clos est un k -schéma X , intègre de dimension 1, de genre g , lisse et propre sur k .*

Définition 0.2.2. *Une courbe projective lisse de genre g sur B est un morphisme projectif lisse $\pi : Z \rightarrow B$ dont les fibres géométriques $Z_{\bar{b}} = Z \times_B \text{Spec}(\overline{k(b)})$ sont des courbes lisses de genre g sur $\overline{k(b)}$ au sens de la définition précédente.*

On s'intéresse ici uniquement aux courbes projectives lisses de genre $g \geq 2$. Le cas $g = 0$ n'a pas d'intérêt en terme de classification, il n'y a qu'une seule courbe complexe

de genre nul, c'est la sphère de Riemann. Le cas $g = 1$, quant à lui, constitue une théorie à part entière, c'est l'étude des courbes elliptiques. Ce cas ne peut être intégré au raisonnement qui est présenté ici, la condition $g \geq 2$ se révélant nécessaire par la suite.

Dans le premier chapitre, on montre que l'on peut envoyer une courbe projective lisse de genre g sur B via une immersion fermée vers \mathbb{P}_B^{5g-6} . Les sous-schémas fermés de \mathbb{P}_B^{5g-6} étant classifiés via le schéma de Hilbert, on obtient le résultat souhaité, i.e. une classification des courbes lisses de genre g .

Cependant, cette classification n'est pas idéale car elle n'est ni complètement canonique, ni universelle. On cherche donc à l'améliorer pour obtenir une solution plus universelle à ce problème de classification. Cela passe par la construction de l'espace de modules des courbes lisses (de genre g).

0.3 Espaces de modules

Les espaces de modules sont des solutions élégantes aux problèmes de classification. Si l'on considère un certain type d'objet que l'on regroupe en classes d'isomorphismes, un espace de modules permet non seulement de paramétriser chacune de ces classes, mais aussi de conserver une structure très agréable sur cette paramétrisation.

Les espaces de modules apparaissent comme une solution tout à fait adaptée aux problèmes posés en géométrie algébrique. Un exemple fondamental, développé en 1961 par Grothendieck [FGA4d], est le schéma de Hilbert d'un schéma X donné : Hilb_X . C'est un schéma qui paramétrise les sous-schémas fermés de X . On ne le construit pas dans ce mémoire mais on l'utilise. Quelques résultats le concernant sont énoncés en annexe.

0.3.1 Schéma de modules fin

Définition 0.3.1. Soit $F : \mathcal{S} \rightarrow \underline{\text{Ens}}$ un foncteur qui associe à tout S -schéma B une famille du type choisi d'objets de base B , i.e. l'ensemble des $Z \rightarrow B$ vérifiant une certaine propriété modulo isomorphisme. Alors on dit que F est un problème de modules.

Définition 0.3.2. On dit que M est un schéma de modules fin si c'est un S -schéma qui représente F .

Cette solution est la solution idéale. En effet, si l'on trouve un S -schéma M qui représente F , alors on sait, en particulier, que $F(M)$ est isomorphe à $\text{Hom}_S(M, M)$. On peut alors déterminer une famille universelle $Z_M \rightarrow M$ image de id_M . Une famille de base B est alors déterminée par changement de base.

$$(B \rightarrow M) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} Z := Z_M \times B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_M & \longrightarrow & M \end{array} \right)$$

Elle a pourtant un gros défaut : la définition de schéma de modules fin est souvent vide de contenu. En effet, un schéma de modules fin n'existe pas a priori et, a posteriori, très rarement dans les cas qui intéressent les mathématiciens.

Heuristiquement, cet échec provient du fait que les objets que l'on souhaite étudier sont équipés de nombreux automorphismes naturels. En effet, on sait que si X est un S -schéma, son foncteur de point est un faisceau fpqc sur S (Grothendieck th. 2.55 [FAG]). Mais la présence d'automorphismes non triviaux en grand nombre empêche que l'on équipe F d'une structure de faisceau, même pour la topologie de Zariski.

0.3.2 Schéma de modules grossier

On peut envisager plusieurs solutions pour contourner ce problème. La première consiste à ignorer les objets qui possèdent des automorphismes non triviaux. Cette solution n'est pas réellement envisageable puisque l'on supprime alors trop d'objets. La deuxième solution est la construction d'un schéma de modules grossier. La troisième solution est de redéfinir le problème en terme de champs algébriques.

Définition 0.3.3. *Soit F un problème de modules comme en 0.3.1. Un schéma de modules grossier est un schéma M ainsi qu'un morphisme ϕ du foncteur F vers le foncteur h_M , représenté par M (i.e. $h_M(B) = \text{Hom}_S(B, M)$), tel que*

1. *pour tout corps algébriquement clos k , $F(\text{Spec}(k)) \simeq h_M(\text{Spec}(k))$,*
2. *cette solution est universelle.*

Le schéma de modules grossier n'est pas équipé, comme l'est le schéma de modules fin, d'une famille universelle. Par contre, même si son existence n'est pas assurée a priori, il peut exister un schéma de modules grossier alors qu'il n'existe pas de schéma de module fin.

La dernière solution est la plus moderne. On en traite de manière extensive dans le deuxième chapitre de ce mémoire.

0.3.3 Espaces de modules des courbes projectives lisses

Le problème de modules des courbes projectives lisses de genre g est donné par le foncteur $F : \text{Sch}/\mathbb{Z} \rightarrow \underline{\text{Ens}}$ des courbes lisses de genre g modulo isomorphisme, i.e.

$$F(B) = \{\text{Classes d'isomorphismes de courbes } \pi : Z \rightarrow B \text{ lisses de genre } g\}.$$

Ce problème ne possède pas de solution sous forme d'un schéma de modules fin. En effet, on montre dans ce cas que F n'est pas un faisceau étale.

Soit $k = \mathbb{Q}$ et $k' = \mathbb{Q}(i)$. Le morphisme $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$ est étale (on est dans le cas d'une extension finie séparable). Soit $C_1 = \mathbb{P}_k^1$ et $C_2 = \{X^2 + Y^2 + Z^2\} \subset \mathbb{P}_k^2$. Ces courbes lisses ne sont pas isomorphes sur k mais sont isomorphes sur k' . Le foncteur F ne peut donc être un faisceau étale et ainsi, il ne peut être représenté par un schéma.

Mumford a démontré, en 1965, l'existence d'un schéma de modules grossier répondant au problème de modules des courbes lisses [GIT]. Il a ensuite montré avec Deligne que l'on pouvait construire un nouvel objet, i.e. un champ algébrique, qui permettait de construire une solution au problème de modules des courbes en 1969 [DM]. C'est cette deuxième construction, sous une forme simplifiée, qui va être l'objet du second chapitre de ce mémoire. On montre d'ailleurs que cette solution englobe, en quelques sortes, la solution précédente.

Chapitre 1

Plongement tricanonique

On s'intéresse, dans ce chapitre, à l'existence et à la construction d'un plongement particulier d'une courbe lisse X de genre $g \geq 2$ sur un corps k algébriquement clos vers \mathbb{P}_k^n , puis à sa généralisation dans le cas d'une courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur S plus généralement. Il s'agit du plongement tricanonique (cette appellation se justifiera d'elle-même par la suite).

L'avantage de ce plongement est qu'il est relativement simple d'en démontrer l'existence et de le construire. Son premier défaut est de n'être « que » tricanonique et non canonique. Le facteur trois semble en effet relever ici d'un choix assez arbitraire. Son deuxième défaut est d'être lié au choix d'une base de \mathbb{P}_k^n . C'est pour cela que l'on s'intéresse à une solution de classification plus universelle dans le chapitre suivant. On remarque d'ailleurs que le premier défaut disparaît lorsque l'on cherche à résoudre le deuxième.

La première section de ce chapitre est consacrée à l'existence théorique du plongement tricanonique. La deuxième section concerne la construction effective de ce plongement dans un cas pratique donné. La troisième section traite de la généralisation de ce résultat.

1.1 Existence

On commence d'abord par poser quelques notations pour la suite.

X désigne une courbe lisse sur un corps k algébriquement clos. Plus précisément, il s'agit d'un schéma intègre de dimension 1, lisse et propre sur k . D désigne un diviseur de X (on utilisera principalement la caractérisation de Weil de ces diviseurs bien que, dans le cas présent, les diviseurs de Weil et les diviseurs de Cartier soient confondus). On note $\mathcal{L}(D)$ le faisceau associé au diviseur D et $l(D) = \dim_k(\Gamma(X, \mathcal{L}(D)))$. Enfin on désignera par K un diviseur dans la classe d'équivalence linéaire associée au faisceau des 1-formes différentielles ω_X .

La démonstration de l'existence du plongement tricanonique passe par deux résultats importants ainsi que leur corollaire. Le premier, c'est le théorème de Riemann-Roch. Le second est une proposition qui donne une caractérisation dimensionnelle des diviseurs très amples de X .

1.1.1 Théorème de Riemann-Roch

Théorème 1.1.1 (Riemann-Roch). *Soit D un diviseur de X , alors*

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Démonstration. Le diviseur $K - D$ correspond au faisceau inversible $\omega_X \otimes \mathcal{L}(D)^\vee$. Mais comme X est projectif (puisque projectif équivaut à propre dans le cas présent, II.6.7. [H]) on peut appliquer la dualité de Serre. $H^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}(D)^\vee)$ est donc le dual de $H^1(X, \mathcal{L}(D))$. Il suffit alors de montrer que $\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g$ où χ est la fonction caractéristique d'Euler définie par $\chi(\mathcal{L}) = \dim H^0(X, \mathcal{L}) - \dim H^1(X, \mathcal{L})$.

On démontre cette formule par récurrence.

On commence par le cas $D = 0$. La formule devient alors $\chi(O_X) = 1 - g$. Mais on a $H^0(X, O_X) = k$ pour toute variété projective et la dualité de Serre permet de dire que $\dim H^1(X, O_X) = \dim H^0(X, \omega_X) = g$, ce qui établit le résultat dans ce cas.

On montre maintenant que pour tout diviseur D et pour tout point P , la formule est vraie pour D si et seulement si elle est vraie pour $D + P$, ce qui permettra de conclure par récurrence. On considère P comme sous-schéma fermé de X . Son faisceau structural est un faisceau « Dirac » k au point P , que l'on note $k(P)$ et son faisceau idéal est $\mathcal{L}(-P)$. On a donc la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-P) \longrightarrow O_X \longrightarrow k(P) \longrightarrow 0$$

En tensorisant par $\mathcal{L}(D + P)$, on obtient la nouvelle suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D + P) \longrightarrow k(P) \longrightarrow 0$$

Or la fonction caractéristique d'Euler est additive sur les suites exactes courtes et $\chi(k(P)) = 1$, d'où $\chi(\mathcal{L}(D + P)) = \chi(\mathcal{L}(D)) + 1$. De plus $\deg(D + P) = \deg(D) + 1$. Ce qui permet de conclure. \square

Le théorème de Riemann-Roch possède plusieurs corollaires que l'on utilise ici.

Le premier est le calcul de la valeur du degré du diviseur canonique.

Corollaire 1.1.2. *Le diviseur canonique a pour degré $2g - 2$.*

Démonstration. En effet, appliqué à K , le théorème de Riemann-Roch permet de dire que $l(K) - l(0) = \deg K + 1 - g$. Mais $l(K) = g$ et $l(0) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = \dim_k k = 1$, d'où $g - 1 = \deg K + 1 - g$, puis $\deg K = 2g - 2$. \square

Le second est le calcul de la valeur de $l(D)$ en fonction de $\deg D$. Ce résultat passe par un lemme facile.

Lemme 1.1.3. *Soit D un diviseur de X . Si $l(D) \neq 0$ alors $\deg D \geq 0$.*

Démonstration. En effet, si $l(D) \neq 0$ alors $|D|$ est non vide, donc D est linéairement équivalent à un diviseur effectif. Comme le degré passe au quotient dans $Cl(X)$, on a $\deg D \geq 0$. \square

Corollaire 1.1.4. *Soit D un diviseur de X tel que $\deg D > 2g - 2$ alors $l(D) = \deg D + 1 - g$*

Démonstration. En effet, si $\deg D > 2g - 2$ alors par le corollaire 1.1.2., $\deg(K - D) < 0$. Ainsi, par le lemme précédent on a $l(K - D) = 0$. Ceci implique le résultat par le théorème de Riemann-Roch. \square

1.1.2 Caractérisation des diviseurs très amples

Afin de prouver l'existence du plongement tricanonique, il suffit de montrer que le diviseur tricanonique, i.e. $3K$, est très ample. Pour ce faire, on utilise une certaine caractérisation dimensionnelle des diviseurs très amples.

On commence par une proposition plus générale qui caractérise les systèmes linéaires complets sans points de bases que l'on affinera par la suite.

Proposition 1.1.5. *Soit D un diviseur sur une courbe X . Alors le système linéaire complet $|D|$ n'a pas de points de base si et seulement si pour tout point $P \in X$,*

$$\dim |D - P| = \dim |D| - 1.$$

Démonstration. On considère la même suite exacte que dans la démonstration du théorème de Riemann-Roch, tensorisée ici par $\mathcal{L}(D)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D - P) \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow k(P) \longrightarrow 0$$

Comme Γ est un foncteur exact à gauche, on obtient, en passant aux sections globales, la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}(D - P)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}(D)) \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte dit que soit $\dim |D - P| = \dim |D|$, soit $\dim |D - P| = \dim |D| - 1$. De plus, l'application ϕ qui envoie un diviseur E de $|D - P|$ vers $E + P$ de $|D|$ est une application linéaire, clairement injective. Mais la dimension de ces deux systèmes linéaires est égale si et seulement si ϕ est surjective. Or ϕ est surjective si et seulement si P est un point de base de $|D|$, ce qui prouve la proposition. \square

La démonstration de la proposition de caractérisation des diviseurs très amples s'appuie sur le critère de séparation des points et des vecteurs tangents en terme de systèmes linéaires que l'on énonce sans démonstration (II.7.8.2. [H]).

Soit δ un système linéaire sur X sans points de base. Soit $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ le morphisme correspondant à δ . Alors ϕ est une immersion fermée si et seulement si :

1. δ sépare les points, c'est-à-dire que pour tout deux points fermés distincts P et Q de X , il existe $D \in \delta$ tel que $P \in \text{Supp } D$ et $Q \notin \text{Supp } D$,
2. δ sépare les vecteurs tangents, c'est-à-dire étant donné un point fermé P de X et un vecteur tangent $t \in T_P(X)$, il existe un $D \in \delta$ tel que $P \in \text{Supp } D$, mais $t \notin T_P(D)$.

Proposition 1.1.6. *Soit D un diviseur sur une courbe X . Alors D est très ample si et seulement si pour tout point $P, Q \in X$ non nécessairement distincts,*

$$\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2.$$

Démonstration. On peut supposer ici que $|D|$ n'a pas de points de base. En effet, si D est très ample c'est le cas. Réciproquement, si D vérifie la condition de la proposition, alors la condition de la proposition 1.1.5. est nécessairement remplie. Ainsi $|D|$ n'a pas de points de base. Maintenant, comme $|D|$ n'a pas de points de base, il détermine un morphisme $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ donc il suffit de montrer qu'il s'agit d'une immersion fermée. C'est pour cela que l'on utilise le critère sur la séparation des points et des vecteurs tangents. La séparation des points implique que pour tout deux points distincts $P, Q \in X$, Q n'est pas un point de base de $|D - P|$, ce qui implique $\dim |D - P - Q| = \dim |D| - 2$ par la proposition précédente. La séparation des vecteurs tangents implique que $\forall P \in X, \exists D' \in |D|$ tel que P apparaît avec multiplicité 1 dans D' , car $\dim T_P(X) = 1$ et $\dim T_P(D') = 0$ si P a multiplicité 1 dans D' ou alors $\dim T_P(D') = 1$ si P a une plus grande multiplicité dans D' . Or ceci montre que P n'est pas un point de base de $|D - P|$ d'où par la proposition 1.1.5, $\dim |D - 2P| = \dim |D| - 2$ et on a le résultat. \square

Cette proposition permettant de caractériser les diviseurs très amples d'une courbe X est la clé du problème. On en déduit que le diviseur tricanonique, i.e. $3K$, est très ample via le corollaire qui suit.

Corollaire 1.1.7. *Soit D un diviseur de X tel que $\deg D \geq 2g + 1$ alors D est très ample.*

Démonstration. En effet, si $\deg D \geq 2g + 1$ alors $\forall P, Q$ points fermés de X , $\deg D > 2g - 2$ et $\deg(D - P - Q) > 2g - 2$ donc par le corollaire 1.1.4 et comme $l(D) = \dim |D| + 1$, on a $\dim |D - P - Q| - \dim |D| = l(D - P - Q) - l(D) = \deg(D - P - Q) - \deg D = -2$. Ainsi par la proposition précédente, D est très ample. \square

Le résultat que l'on cherche à montrer est alors immédiat.

Proposition 1.1.8. *Le diviseur tricanonique est très ample pour tout $g \geq 2$.*

Démonstration. On a tout simplement $\deg 3K = 3 \deg K = 6g - 6 \geq 2g + 1, \forall g \geq 2$. On conclut donc via le corollaire précédent. \square

On remarque de même que le diviseur bicanonique est très ample pour tout $g \geq 3$, ou encore que tout diviseur n -canonique avec $n \geq 3$ est très ample pour tout $g \geq 2$. C'est en cela que l'on peut caractériser ici d'arbitraire le choix du facteur 3.

Pour ce qui est du plongement tricanonique, c'est tout simplement une immersion fermée correspondant au diviseur très ample $3K$ ou plutôt au faisceau très ample qui lui est associé, i.e. $\omega_X^{\otimes 3}$. Cette immersion n'est unique qu'après avoir défini des générateurs de ce faisceau et une base de l'espace projectif d'arrivée.

On termine par une petite précision sur la dimension de l'espace d'arrivée.

Proposition 1.1.9. *Un plongement tricanonique envoie X dans \mathbb{P}_k^{5g-6} .*

Démonstration. Il suffit pour cela de calculer $l(3K)$. Le théorème de Riemann-Roch donne $l(3K) - l(-2K) = \deg(3K) + 1 - g$, mais $l(-2K) = 0$ par le lemme 1.1.3. Ainsi $l(3K) = 3(2g - 2) - g + 1 = 5(g - 1)$, ce qui donne le résultat. \square

1.2 Cas pratique

Pour illustrer ce qui a été démontré dans la section précédente, on va construire le plongement tricanonique pour un exemple de courbe lisse X donné. Plus précisément, on va s'intéresser à l'équation de Fermat et à la courbe projective lisse complexe associée.

On considère donc la courbe C de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ définie par l'équation $F(x : y : z) = 0$ avec $F(x, y, z) = x^r + y^r - z^r$. Cette courbe est recouverte par ses intersections avec les ouverts principaux usuels $D_+(x)$, $D_+(y)$ et $D_+(z)$. On peut d'ailleurs se limiter aux intersections avec $D_+(x)$ et $D_+(y)$ (si x et y sont nuls alors $(x : y : z)$ ne peut être un point de C). On commence par le calcul de $H^0(C, \Omega_{C/\mathbb{C}}^1)$ que l'on note Ω .

Calcul de Ω

Pour cette première partie des calculs, l'équation particulière donnée pour F n'est pas importante, il suffit qu'il s'agisse d'un polynôme homogène de degré r qui définit une courbe lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Sur $D_+(x)$, on pose $s = y/x$ et $t = z/x$. La courbe $C_x = C \cap D_+(x)$ est définie par l'équation $f(s, t) = 0$ où $f(s, t) = F(1, s, t)$. L'espace vectoriel des sections globales de $\Omega_{C_x/\mathbb{C}}^1$, noté Ω_x , est donné par un résultat classique :

$$\Omega_x = \frac{Ads \oplus Adt}{(df)} \text{ où } A = \mathbb{C}[s, t]/(f)$$

On définit alors la forme méromorphe

$$\omega_0 = \frac{ds}{\partial f/\partial t} = \frac{-dt}{\partial f/\partial s}$$

Ceci ayant bien un sens par l'équation $df = 0$ et étant bien défini sur C_+ par lissité de C ($\partial f/\partial s$ et $\partial f/\partial r$ ne peuvent être simultanément nulles). On peut alors écrire

$$\Omega_x = \{\omega = p(s, t)\omega_0, p \in A\}$$

On étend, maintenant, un élément ω de Ω_x à Ω . Pour cela, on s'intéresse à l'ouvert principal $D_+(y)$. Sur cet ouvert, on pose $u = x/y$ et $w = z/y$. La courbe est ici définie par l'équation $g(u, v) = 0$ avec $g(u, v) = F(u, 1, v)$. Et on obtient un résultat similaire au cas précédent avec

$$\Omega_y = \left\{ \omega = q(u, v) \frac{du}{\partial g/\partial v}, q \in B \right\} \text{ où } B = \mathbb{C}[u, v]/(g)$$

En intersectant les deux cas, on remarque d'une part

$$f(s, t) = F(1, s, t) = s^r F\left(\frac{1}{s}, 1, \frac{t}{s}\right) = s^r g\left(\frac{1}{s}, \frac{t}{s}\right)$$

Ce qui en dérivant par rapport à t donne

$$\frac{\partial f}{\partial t} = s^{r-1} \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{1}{s}, \frac{t}{s}\right) = \frac{1}{u^{r-1}} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

D'autre part, on a $ds = -du/u^2$. On peut donc écrire

$$\omega = p(s, t) \frac{ds}{\partial f/\partial t} = -p(s, t) \frac{u^{r-1} du}{u^2 \partial g/\partial v} = -u^{r-3} p\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \frac{du}{\partial g/\partial v} = q(u, v) \frac{du}{\partial g/\partial v}$$

On a donc recollement si et seulement si $\deg(p) \leq r-3$ (le degré dans A étant vu comme le degré dans $\mathbb{C}[s, t]$ via l'injection de \mathbb{C} -espaces vectoriels qui associe à un élément de A son représentant de plus petit degré en t).

$$\Omega = \{\omega = p(s, t)\omega_0, p \in A \text{ et } \deg(p) \leq r-3\}$$

Comme $\deg(f) = r \geq r-3$, on peut identifier cet espace à l'espace analogue défini pour $p \in \mathbb{C}[s, t]$. La dimension de cet espace (c'est le genre de la courbe C) est donc

$$g = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$$

Calcul de $\Omega^{\otimes 3}$

On s'intéresse maintenant au calcul de l'espace vectoriel des sections globales de $(\Omega_{C/\mathbb{C}}^1)^{\otimes 3}$, noté $\Omega^{\otimes 3}$.

Soit $\omega \in \Omega^{\otimes 3}$. Par ce qui a précédé, on peut écrire

$$\omega = p(s, t) \frac{ds^{\otimes 3}}{(\partial f / \partial t)^3} \text{ où } p \in A \text{ et } \deg(p) \leq 3r - 9$$

Comme p est dans A , on peut utiliser l'équation $1 + s^r - t^r = 0$ pour écrire p comme un polynôme de degré en t inférieur ou égal à $r - 1$. Mais l'espace vectoriel des polynômes p de $\mathbb{C}[s, t]$ de degré total inférieur ou égal à $3r - 9$ et de degré en t inférieur ou égal à $r - 1$ a une dimension égale à

$$(3r - 8) + (3r - 9) + \dots + (2r - 7) = \frac{5d(d - 3)}{2} = 5g - 5$$

Ce qui est conforme à celle donnée par le théorème de Riemann-Roch pour $\Omega^{\otimes 3}$, ainsi

$$\begin{aligned} \Omega^{\otimes 3} &= \left\{ p(s, t) \frac{ds^{\otimes 3}}{(\partial f / \partial t)^3}, p \in A \text{ et } \deg(p) \leq 3r - 9 \right\} \\ &= \left\{ p(s, t) \frac{ds^{\otimes 3}}{(\partial f / \partial t)^3}, p \in \mathbb{C}[s, t], \deg(p) \leq 3r - 9 \text{ et } \deg_t(p) \leq r - 1 \right\} \end{aligned}$$

Plongement dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{5g-6}$

Comme on l'a souligné précédemment, le plongement tricanonique n'est pas universel. Il faut, pour le définir, choisir des bases. C'est ce choix des bases que l'on fait passer au quotient dans la construction que l'on détaille dans le chapitre suivant.

En reparamétrisant les éléments de $\Omega^{\otimes 3}$ par x, y et z , puis en homogénéisant, on obtient facilement un candidat potentiel. En voici un :

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{5g-6} \\ (x : y : z) &\longmapsto (x^{3r-9-j} y^i z^{j-i})_{\substack{0 \leq i \leq r-1 \\ 0 \leq j \leq 3r-9}} \end{aligned}$$

On propose de regarder l'image de X par ce morphisme dans le cas particulier de $r = 4$, i.e. le plus petit r pour lequel le raisonnement que l'on a fait s'applique. On obtient alors $g = 3$.

On considère le morphisme ϕ défini précédemment en ordonnant la base de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ de la manière suivante :

$$(x : y : z) \longmapsto (x^3 : x^2z : xz^2 : z^3 : yz^2 : xyz : x^2y : xy^2 : y^3 : y^2z)$$

Dans ces conditions, l'image de X par ϕ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 = \mathbb{C}[x_0 : \dots : x_9]$ défini par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0x_2 - x_1^2 = 0 \\ x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_0x_4 - x_1x_5 = 0 \\ x_0x_5 - x_1x_6 = 0 \\ x_3x_8 - x_4x_9 = 0 \\ x_6x_8 - x_7^2 = 0 \\ x_0x_3x_7 - x_1x_4x_6 = 0 \\ x_0^4x_9^4 + x_1^4x_8^4 - x_1^4x_9^4 = 0 \end{array} \right.$$

Ce schéma est bien évidemment non universel et toute transformation de celui-ci par un élément du groupe projectif linéaire est également un choix valide.

1.3 Généralisation aux courbes projectives lisses

Pour l'instant, on n'a traité ici que les courbes lisses sur un corps algébriquement clos. On souhaite maintenant généraliser le résultat aux courbes projectives lisses sur B , au sens de la définition 0.2.2.

Le passage du résultat précédent au résultat sur les courbes projectives lisses sur B se fait via un résultat de Grothendieck que l'on énonce ici sans démonstration (cette proposition est issue de 0, §5 [GIT] d'après 3, §7 [EGA3b], puis généralisée par des résultats de §8 [EGA4c]).

Proposition 1.3.1. *Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme propre et de présentation finie de schémas. Soit \mathcal{L} un faisceau cohérent sur X , plat sur Y . On suppose que pour tout $y \in Y$, $H^1(X_y, \mathcal{L}_y) = 0$. Alors $f_*(\mathcal{L})$ est faisceau localement libre sur Y et la formation de f_* commute au changement de base. En particulier, pour tout $y \in Y$, on a $f_*\mathcal{L} \otimes \overline{k(y)} \simeq H^0(X_{\overline{y}}, \mathcal{L}_{\overline{y}})$.*

On s'intéresse ici au cas particulier, appliqué à la courbe projective lisse $\pi : Z \rightarrow B$ et au faisceau tricanonique $\omega_{X/B}^{\otimes 3}$, noté $\omega^{\otimes 3}$.

Comme les fibres géométriques de la courbe sont des courbes lisses de genre g sur $\overline{k(b)}$, on peut appliquer les résultats de la section 1.1. aux fibres. En particulier, la dualité de Serre et le lemme 1.1.3. donnent la condition de la propriété. On en déduit donc que $\pi_*(\omega^{\otimes 3})$ est un faisceau localement libre et que $\pi_*(\omega^{\otimes 3}) \otimes \overline{k(b)} \simeq H^0(X_{\overline{b}}, \omega^{\otimes 3} \otimes \mathcal{O}_{X_{\overline{b}}})$. $\omega^{\otimes 3}$ est donc un faisceau inversible. Son degré est donné par la proposition 1.1.9. par un calcul sur les fibres. Il vaut $5g - 5$. Ainsi, on obtient un morphisme $f : Z \rightarrow \mathbb{P}_B^{5g-6}$.

Pour montrer que ce morphisme est une immersion fermée, on utilise le lemme suivant.

Lemme 1.3.2. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini entre deux B -schémas de présentation finie, tel que X est plat sur B . On suppose que pour tout $b \in B$, $f_b : X_b \rightarrow Y_b$ est une immersion fermée, alors $f : X \rightarrow Y$ est une immersion fermée.*

La section 1.1. permet de dire que chacun des f_b est une immersion fermée. Ainsi, par ce lemme, f est une immersion fermée.

La démonstration du lemme utilise le résultat suivant que l'on admet : la formation de l'image schématique d'un morphisme de B -schémas $f : X \rightarrow Y$, fini et non ramifié, commute aux changements de bases de B . Pour montrer ce résultat, on remarque qu'il est de nature local sur X et Y et qu'il suffit de le montrer dans le cas où X , Y et B sont affines. Il s'agit alors d'un résultat d'algèbre commutative dont la démonstration passe par l'utilisation des idéaux de Fitting.

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ vérifiant les hypothèses du lemme. Soit $y \in Y$ et b l'image de y par le morphisme structurel de Y . Alors on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X_b & \xrightarrow{\quad} & f_b & \xrightarrow{\quad} & Y_b \\
 \downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
 & & X_y & \longrightarrow & \text{Spec}(k(y)) \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\quad} & f & \xrightarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

Comme f_b est une immersion fermée, $X_y \rightarrow \text{Spec}(k(y))$ est une immersion fermée, donc non ramifié. Ainsi f est non ramifié. Puisqu'il est fini par hypothèse, on peut appliquer le résultat évoqué précédemment. Soit Z l'image schématique de f et $\bar{f} : X \rightarrow Z$ le morphisme induit. Alors \bar{f}_b et \bar{f}_b sont isomorphes. De plus \bar{f}_b est un isomorphisme (puisque f_b est une immersion fermée). Ainsi, \bar{f}_b est un isomorphisme et donc plat. Ceci étant vrai pour tout b , \bar{f} est plat par le critère de platitude par fibres (11.3.10 [EGA4c]), applicable ici puisque X et Y sont de présentation finie. Mais comme \bar{f} est fini, plat et de présentation finie, il est localement libre. Son degré se calcule dans les fibres et vaut 1, c'est donc un isomorphisme et f est une immersion fermée. \square

Chapitre 2

Espace de modules des courbes

On s'intéresse, dans ce chapitre, à la construction d'une solution au problème d'espace de modules des courbes évoqué en introduction, mais sous une forme légèrement modifié. La solution que l'on construit maintenant est un champ algébrique.

On commence par introduire la théorie des champs algébriques. Puis, on montre quelques résultats intéressants en ce qui concerne les quotients. On utilise ensuite ces résultats pour construire un champ algébrique de modules fin des courbes. Enfin, on montre qu'il « englobe » le schéma de modules grossier des courbes construit par Mumford dans [GIT].

2.1 Champs algébriques

La théorie des champs algébriques permet, via une certaine généralisation de la théorie des schémas, d'obtenir des propriétés assez intéressantes en particulier en ce qui concerne les quotients. Les champs algébriques ont été introduits en 1969 par Deligne et Mumford [DM] afin de construire l'espace de modules fin de courbes. Aujourd'hui, la notion de champ algébrique peut avoir différentes significations, on l'utilise ici au sens de champ algébrique de Deligne-Mumford.

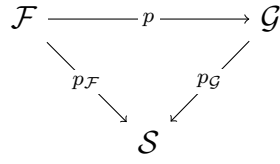
2.1.1 Groupoïdes sur S

Premières définitions

Définition 2.1.1. *Une S -catégorie est la donnée d'une catégorie \mathcal{F} ainsi que d'un foncteur covariant $p_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow S$.*

Définition 2.1.2. *Soit $(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ et $(\mathcal{G}, p_{\mathcal{G}})$ deux S -catégories. Un morphisme de S caté-*

gories est un foncteur p , compatible avec la structure de S -catégorie, i.e. tel que



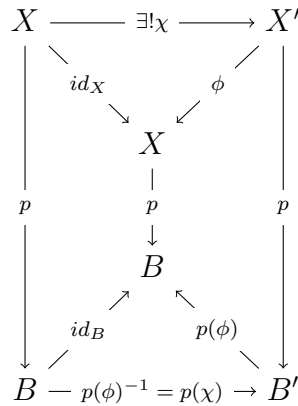
Un morphisme p est un isomorphisme si c'est une équivalence de catégorie.

Définition 2.1.3. Un groupoïde sur S est une S -catégorie (\mathcal{F}, p) telle que :

$$1. \quad \begin{array}{ccc}
 \exists X' \dashrightarrow \exists \phi \rightarrow X & & \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 B' \xrightarrow{f} B & & \text{où } f \text{ morphisme dans } \mathcal{S} \text{ et } \phi \text{ morphisme dans } \mathcal{F}.
 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccccc}
 X' & \dashrightarrow \exists! \chi & \dashrightarrow & X'' & \\
 \downarrow \phi & & & \downarrow \psi & \\
 & X & & & \\
 \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\
 & B & & & \\
 \downarrow p(\phi) & & \downarrow p(\psi) & & \\
 B' & \xrightarrow{h=p(\chi)} & B'' & &
 \end{array} \quad \text{où } h \text{ morphisme dans } \mathcal{S} \text{ et } \phi, \psi \text{ morphismes dans } \mathcal{F}.$$

Dans cette définition, 2. implique que $\phi : X' \rightarrow X$ est un isomorphisme si et seulement si $p(\phi) : B' \rightarrow B$ en est un. En effet, la première implication est immédiate et l'implication inverse est donné par $\phi^{-1} = \chi$ dans le diagramme



Définition 2.1.4. On note $\mathcal{F}(B)$ la sous-catégorie composée des objets X tels que $p(X) = B$ et des morphismes f tels que $p(f) = id_B$.

Par ce qui précède, $\mathcal{F}(B)$ est un groupoïde, i.e. une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes (d'où le nom de S -groupoïdes).

De plus, 2. implique l'unicité de X' dans 1. à isomorphisme canonique près, via le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{\exists! \chi} & & \longrightarrow & X'' \\
 & \searrow \phi & & \swarrow \psi & \\
 & & X & & \\
 & & \downarrow p & & \\
 & & B & & \\
 & \nearrow f & & \nwarrow f & \\
 B' & \xrightarrow{id_{B'} = p(\chi)} & & \longrightarrow & B'
 \end{array}$$

X' est donc vu comme un pull-back de X via f et noté f^*X . On peut alors définir pour tout morphisme $f : B' \rightarrow B$ de S -schémas un foncteur induit $f^* : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(B')$ via

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^*X & \xrightarrow{\quad} & f^*s & \xrightarrow{\quad} & f^*Y & & \\
 & \searrow \phi & & \swarrow \psi & & & \\
 & & X & \xrightarrow{s} & Y & & \\
 & & \downarrow p & & \downarrow p & & \\
 & & B & \xrightarrow{id_B} & B & & \\
 & \nearrow f & & \nwarrow f & & & \\
 B' & \xrightarrow{\quad} & id_{B'} & \xrightarrow{\quad} & B' & &
 \end{array}$$

Groupoïde associé à un schéma

Une classe intéressante de groupoïdes est celle des groupoïdes définis par des foncteurs contravariants.

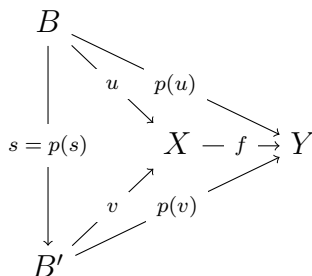
Soit $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \underline{Ens}$ un foncteur contravariant. On peut définir un groupoïde dont les objets sont des couples (B, β) où B est un objet de \mathcal{S} et $\beta \in \mathcal{F}(B)$. Un morphisme $(B', \beta') \rightarrow (B, \beta)$ est un S -morphisme $f : B' \rightarrow B$ tel que $\mathcal{F}(f)(\beta) = \beta'$. On note

ce groupoïde \mathcal{F} comme le foncteur et on remarque d'ailleurs que $\mathcal{F}(B)$ au sens du groupoïde est le même que $\mathcal{F}(B)$ au sens du foncteur.

En particulier, si X est un S -schéma, on peut appliquer la construction précédente à son foncteur de points. On note alors \underline{X} le groupoïde associé. Cette nouvelle structure s'identifie, en tant que catégorie, à la catégorie des X -schémas. Le foncteur $p_{\underline{X}}$ est simplement un foncteur d'oubli qui voit des X -schémas comme S -schémas.

Maintenant, on peut voir les morphismes de S -schémas comme des morphismes de S -groupoïdes associés à des schémas (les notions de morphismes et d'isomorphismes de S -groupoïdes étant identiques à celles pour les S -catégories).

En effet, tout morphisme de S -schéma $f : X \rightarrow Y$ induit naturellement un morphisme de S -groupoïdes $p : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$. Il suffit de voir les X -schémas et les morphismes de X -schémas comme des Y schémas et des morphismes de Y -schémas.



Réciproquement, si $p : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est un morphisme de S -groupoïdes, alors il est induit par un certain morphisme de S -schémas f . En effet, p préserve la projection sur \mathcal{S} donc $p(id_X) = f : X \rightarrow Y$ pour un morphisme f , mais alors le lemme de Yoneda permet de conclure que p est induit par le morphisme f en question.

Cette construction naturelle permet donc de considérer les groupoïdes comme une extension de la notion de schéma (c'est ce l'on voulait). Elle permet également de conserver les isomorphismes.

Proposition 2.1.5. *Soit X et Y des S -schémas. Alors le morphisme de S -schémas $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme de S -groupoïdes induit $p : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ est un isomorphisme.*

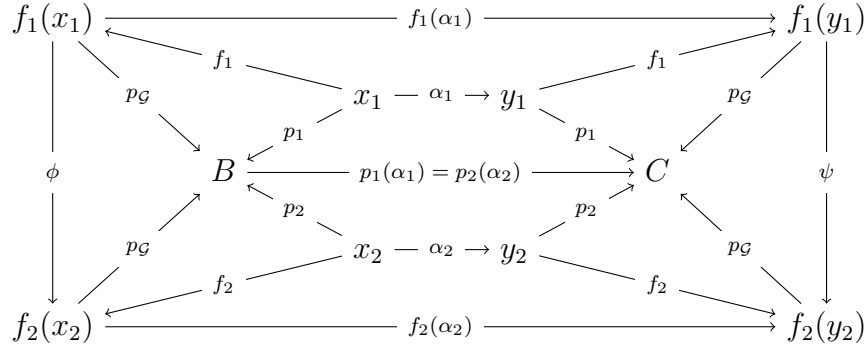
Démonstration. En effet, si f est un isomorphisme alors le foncteur induit p est une équivalence forte de catégorie : le foncteur q induit par f^{-1} vérifie $pq = id_Y$ et $qp = id_X$.

Réciproquement, soit $p : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un isomorphisme de S -groupoïdes de quasi-inverse $q : \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$. Alors p et q sont induits par f et g respectivement et on a $qp(id_X) = gf$. Comme q et p sont des équivalences de catégorie, il en est de même pour qp et id_X est isomorphe à gf comme X -schémas. Ainsi gf est un automorphisme. Un raisonnement symétrique donne que fg est un automorphisme. f est donc bien un isomorphisme. \square

Produit fibré

La notion de produit fibré est un peu différente de la notion usuelle (celle que l'on utilise pour les schémas) car on travaille ici avec des 2-catégories.

Définition 2.1.6. Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{G} des S -groupoïdes. Si $f_1 := \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{G}$ et $f_2 := \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{G}$ sont des morphismes de groupoïdes alors on définit le produit fibré $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ comme étant le S -groupoïde dont les objets sont des triplets (x_1, x_2, ϕ) , où x_1 et x_2 sont des objets de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 respectivement et ϕ est un morphisme de \mathcal{G} , et les morphismes sont les $(\alpha_1, \alpha_2) : (x_1, x_2, \phi) \rightarrow (y_1, y_2, \psi)$, tels que



B et C étant des S -schémas. La projection étant la projection naturelle.

Une écriture plus classique donne :

1. Les objets sont des triplets (x_1, x_2, ϕ) où $(x_1, x_2) \in \mathcal{F}_1(B) \times \mathcal{F}_2(B)$ pour un certain S -schéma B (i.e. $p_1(x_1) = p_2(x_2)$) et $\phi := f_1(x_1) \rightarrow f_2(x_2)$ est un morphisme de $\mathcal{G}(B)$ (i.e. sa projection sur \mathcal{S} est id_B).
2. Soit (y_1, y_2, ψ) un second objet lié à un S -schéma C . Un morphisme de (x_1, x_2, ϕ) vers (y_1, y_2, ψ) est une paire (α_1, α_2) de morphismes avec $\alpha_i : x_i \rightarrow y_i$ se projetant sur un même morphisme $s : B \rightarrow C$ (i.e. $p_1(\alpha_1) = p_2(\alpha_2) = s$) telle que $\psi \circ f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2) \circ \phi$.

C'est parce que les S -groupoïdes forment une 2-catégorie que l'on ne définit pas le produit fibré de la manière usuelle. En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_1 \\ \downarrow q & & \downarrow f_1 \\ \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{G} \end{array}$$

ne commute pas a priori. En effet, on a $f_1(p(x_1, x_2, \phi)) = f_1(x_1)$ et $f_2(q(x_1, x_2, \phi)) = f_2(x_2)$, les objets $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$ n'étant pas nécessairement égaux, simplement isomorphes. On résout ce problème en redéfinissant quelques notions pour les groupoïdes.

Définition 2.1.7. On dit qu'un diagramme de morphismes de S -groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & \mathcal{H} & \end{array}$$

commute s'il est donné un isomorphisme de foncteurs $g \simeq h \circ f$.

Maintenant, si on a un diagramme commutative de S -groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

il existe un unique morphisme $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ à isomorphisme canonique près. Si c'est un isomorphisme on dit que le diagramme est cartésien.

On remarque que la notion de produit fibré pour les groupoïdes est bien compatible avec la notion de produit fibré pour les schémas au sens où $\underline{X} \times_{\underline{Z}} \underline{Y}$ est isomorphe à $\underline{X} \times_{\underline{Z}} \underline{Y}$ pour tous S -schémas X, Y et Z .

2.1.2 Champs algébriques

Champs

Maintenant que l'on a défini les groupoïdes, on souhaite affiner cette définition afin d'y intégrer les caractéristiques d'un faisceau.

Définition 2.1.8. Soit (\mathcal{F}, p) un S -groupoïde. B un S -schéma, X et Y dans $\mathcal{F}(B)$. On définit un foncteur contravariant $\underline{Iso}_B(X, Y) : (Sch/B) \rightarrow \underline{Ens}$ qui associe à un morphisme $f : B' \rightarrow B$ l'ensemble des isomorphismes de $\mathcal{F}(B')$ entre f^*X et f^*Y .

La construction de $\underline{Iso}_B(X, Y)(B') \rightarrow \underline{Iso}_B(X, Y)(B'')$ associé à $B'' \rightarrow B'$ se fait de manière naturelle. En effet, on considère le diagramme de B -schémas

$$\begin{array}{ccc} B'' & \xrightarrow{h} & B' \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & B & \end{array}$$

Alors la construction du pull-back donne des isomorphismes canoniques ψ_X et ψ_Y

$$\begin{array}{ccccc}
h^* f^* X & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & f^* X \\
\downarrow p & \searrow \psi_X & & \swarrow & \downarrow p \\
& & g^* X & \longrightarrow & X \\
& & \downarrow p & & \downarrow p \\
& & B'' & \xrightarrow{g} & B \\
& \nearrow id_{B''} & & \nwarrow f & \\
B'' & \xrightarrow{\quad} & h & \xrightarrow{\quad} & B'
\end{array}$$

Ce qui permet de définir $\underline{Iso}_B(X, Y)(B') \rightarrow \underline{Iso}_B(X, Y)(B'')$ par

$$\left(f^* X \xrightarrow{\phi} f^* Y \right) \mapsto \left(g^* X \xrightarrow{\psi_X^{-1}} h^* f^* X \xrightarrow{h^* \phi} h^* f^* Y \xrightarrow{\psi_Y} g^* Y \right)$$

Définition 2.1.9. Soit (\mathcal{F}, p) un S -groupoïde. On dit que c'est un champ si

1. Pour tout B, X et Y , $\underline{Iso}_B(X, Y)$ est un faisceau pour la topologie étale.
2. Soit $\{B_i \rightarrow B\}$ est un recouvrement étale de B . Soit $X_i \in \mathcal{F}(B_i)$ munis d'isomorphismes dans $\mathcal{F}(B_i \times_B B_j)$

$$\phi_{ij} : X_j|_{B_i \times_B B_j} \rightarrow X_i|_{B_i \times_B B_j}$$

vérifiant la condition de cocycle. Alors, il existe un objet $X \in \mathcal{F}(B)$ ainsi que des isomorphismes $X|_{B_i} \simeq X_i$ tels que

$$\phi_{ij} = (\psi_i|_{B_i \times_B B_j}) \circ (\psi_j|_{B_i \times_B B_j})^{-1}$$

Un groupoïde associé à un foncteur est un champ si et seulement si c'est un faisceau pour la topologie étale. En particulier, \underline{X} est un champ pour tout S -schéma X .

On montre également que si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{G} sont des champs, alors $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ est un champ. Il suffit de remarquer que par unicité du pull-back, $p \circ f^* = f^* \circ p$ pour tout morphisme p de S -groupoïdes. Ceci donne, pour $X = (x_1, x_2, \phi)$, $f^* X = (f^* x_1, f^* x_2, f^* \phi)$ et f^* commute avec f_1 et f_2 . On vérifie alors que la condition 1. pour $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ est donnée par les trois conditions 1. pour $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{G} . La condition 2. pour $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ se déduit directement des conditions 2. pour $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{G} .

Champs algébriques

Définition 2.1.10. Un morphisme de champs $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est dit représentable si pour tout S -schéma B et tout morphisme $\underline{B} \rightarrow \mathcal{G}$ le produit fibré $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \underline{B}$ est isomorphe à un champ associé à un schéma.

Définition 2.1.11. Soit P une propriété de morphismes de schémas stable par changement de base et $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme représentable de champs. On dit que f a P si pour tout S -schéma B et tout morphisme $\underline{B} \rightarrow \mathcal{G}$, le morphisme de schéma associé à $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \underline{B} \rightarrow \underline{B}$ a P .

Définition 2.1.12. Un champ \mathcal{F} est dit algébrique si

1. la diagonale $\Delta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times_S \mathcal{F}$ est représentable, quasi-compacte et séparée,
2. il existe un schéma U et un morphisme étale surjectif, appelé atlas, $\underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$.

La définition a un sens car $\underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$ est bien représentable par 1. via le lemme qui suit.

Lemme 2.1.13. La diagonale Δ est représentable si et seulement si tout morphisme $\underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$, où U est un S -schéma est représentable.

Démonstration. On suppose que Δ est représentable. Soit $f : X \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : Y \rightarrow \mathcal{F}$ des morphismes avec X et Y des S -schémas. On pose $U = X \times_S Y$. On a un morphisme $(f, g) : \underline{U} \rightarrow \mathcal{F} \times_S \mathcal{F}$. Comme Δ est représentable $\mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{U}$ est isomorphe à un champ associé à un schéma. Mais $\mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{X} \times_S \underline{Y} \simeq \mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{X} \times_S \underline{Y} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F} \simeq \underline{X} \times_{\mathcal{F}} \underline{Y}$. Donc $\underline{X} \times_{\mathcal{F}} \underline{Y}$ est isomorphe à un champ associé à un schéma ce qui montre que f est représentable.

Réciproquement, on suppose que pour tout S -schéma U , tout morphisme $\underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$ est représentable. Soit $f : \underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$. f et g sont représentables. On pose $h = (f, g)$ (tout morphisme $\underline{U} \rightarrow \mathcal{F} \times_S \mathcal{F}$ peut s'écrire de cette façon). Premièrement, on voit que $U \times_{\mathcal{F}} U$ (le produit étant défini par f et g) est isomorphe à un champ associé à un schéma. Deuxièmement, on a comme précédemment $\mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{U} \times_S \underline{U} \simeq \underline{U} \times_{\mathcal{F}} \underline{U}$ et $U \times_{\mathcal{F}} U$ est le produit fibré de \mathcal{F} et $\underline{U} \times_S \underline{U}$ (défini par Δ et $f \times g$). Dernièrement, h se factorise en $(f \times g) \circ \delta$ où δ est la diagonale $\delta : \underline{U} \rightarrow \underline{U} \times_S \underline{U}$. Le diagramme cartésien de schémas définissant le produit fibré $\mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{U}$ se factorise donc pour donner le diagramme cartésien de champs suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{U} & \longrightarrow & \underline{U} \times_{\mathcal{F}} \underline{U} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\
\underline{U} & \xrightarrow{\delta} & \underline{U} \times_S \underline{U} & \xrightarrow{f \times g} & \mathcal{F} \times_S \mathcal{F}
\end{array}$$

Enfinement, $\mathcal{F} \times_{\mathcal{F} \times_S \mathcal{F}} \underline{U}$ est isomorphe à un champ associé à un schéma puisque c'est le produit fibré de tels champs. La diagonale Δ est bien représentable. \square

Théorème 2.1.14. Soit \mathcal{F} un champ sur S tel que

1. Δ est représentable, quasi-compacte, séparée et non ramifiée,
2. il existe un schéma U de type fini sur S et un morphisme surjectif lisse de S -schémas $\underline{U} \rightarrow \mathcal{F}$

Alors \mathcal{F} est un champ algébrique.

Ce théorème possède une pseudo-réciproque. En effet, on peut montrer que la diagonale d'un champ algébrique est non ramifiée (7.15. [V]). On admet la démonstration du théorème. Elle est détaillée dans [Ed] (théorème 2.1) pour le cas noethérien et dans [LMB] (théorème 8.1) pour le cas général.

2.2 Champs algébriques et quotients

Une des raisons qui justifie de l'utilisation des champs algébriques est leur bon comportement en matière de quotients. Après avoir défini la notion de groupoïde quotient, on va donner des conditions suffisantes pour qu'il s'agisse d'un champ ou encore d'un champ algébrique. Ceci permet de montrer, par la suite, que l'espace de module fin que l'on construit est un champ algébrique.

Les définitions, notations et résultats utilisés concernant les notions de schémas en groupe sont donnés en annexe.

Définition 2.2.1. Soit G un S -groupe fppf agissant sur un S -schéma X . Le groupoïde quotient $[X/G]$ est défini comme ayant pour objets les G -fibrés principaux $C \rightarrow B$, munis d'un morphisme G -équivariant $C \rightarrow X$. Un morphisme ϕ de $(C' \rightarrow B', C' \rightarrow X)$ vers $(C \rightarrow B, C \rightarrow X)$ est un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 C' & \xrightarrow{\phi} & C \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B' & \longrightarrow & B
 \end{array}
 \quad \text{tel que } \phi \text{ équivariant et}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 C' & \xrightarrow{\phi} & C \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & X &
 \end{array}$$

La projection vers S envoie c vers B .

On peut remarquer que tout morphisme de $[X/G]$ entre objets de $[X/G](B)$ (pas nécessairement morphisme de $[X/G](B)$) est un isomorphisme. En effet, soit ϕ un morphisme de $c = (C \rightarrow B, C \rightarrow X)$ vers $d = (D \rightarrow B, D \rightarrow X)$, on suppose dans un premier temps que c et d sont des G -fibrés triviaux avec $C = D = G \times_S B$. Dans ce cas, la première condition sur ϕ donne $\phi = (\mu(id_G \times f), id_B)$ pour un certain morphisme $f : B \rightarrow G$ et on obtient $\phi^{-1} = (\mu(id_G \times (\beta \circ f)), id_B)$ qui est bien compatible avec les morphismes vers X puisque ϕ l'est. Mais comme les G -fibrés sont localement triviaux, on a le résultat voulu.

On construit un morphisme naturel de S -groupoïdes $p : \underline{X} \rightarrow [X/G]$ de la manière suivante. Si $s : B \rightarrow X$ est un objet de $\underline{X}(B)$ alors $p(s)$ est le G -fibré principal $G \times_S B \rightarrow B$ où G agit par translation à gauche sur lui-même et trivialement sur B , ainsi que le

morphisme $G \times_S B \rightarrow X$ G -équivariant $\sigma \circ (id_G \times s)$ où σ représente l'action de G sur X . Si $f : B' \rightarrow B$ est un morphisme dans \underline{X} alors $p(f)$ est le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times B' & \xrightarrow{id_G \times f} & G \times B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Proposition 2.2.2. *Soit G un S -groupe affine et lisse agissant sur un S -schéma X . Alors le groupoïde quotient $[X/G]$ est un champ.*

Démonstration. Soit $f : B' \rightarrow B$ un morphisme de S -schémas. Soit $c = (C \rightarrow B, C \rightarrow X)$ et $d = (D \rightarrow B, D \rightarrow X)$ des objets de $[X/G](B)$. On s'intéresse à l'ensemble des isomorphismes de $[X/G]$ entre c et d . Par ce qui a été dit précédemment, c'est exactement l'ensemble des morphismes de $[X/G]$ entre c et d . Si l'on regarde la question de manière ensembliste, on voit qu'un tel morphisme est identifiable à un élément de $C \times_B D \times_{X \times_S X} X$ quotienté par le produit des actions de G sur X , C et D . En effet, soit $a \in C$, un morphisme de G -fibrés est déterminé par l'image $\phi(a) \in D$ et le couple $(a, \phi(a))$ est dans $C \times_B D$. Le fait que ce morphisme soit compatible avec les morphismes G -équivariants vers X se traduit par le fait qu'il existe un x tel que $(a, \phi(a), x)$ soit dans $C \times_B D \times_{X \times_S X} X$. Et le choix de a passe au quotient et (a, b, x) définit le même morphisme que $(\sigma_C(g, a), \sigma_D(g, b), \sigma_X(g, x))$ d'où le résultat. Maintenant, comme les morphismes que l'on considère sont des morphismes de schémas, que l'on peut recoller des morphismes de schémas munis d'une donnée de descente, et que, pour $f : B' \rightarrow B$, $f^*c = (C \times_B B' \rightarrow B', C \times_B B' \rightarrow X)$, $\underline{Iso}_B(c, d)$ est bien un faisceau pour la topologie étale.

Soit $\{B_i \rightarrow B\}$ un recouvrement étale de B . Soit c_i des objets de $[X/G](B_i)$ et des isomorphismes satisfaisant les conditions de 2. On ne s'intéresse d'abord qu'au G -fibrés principaux $C_i \rightarrow B_i$ et aux isomorphismes induits. Alors comme $G \rightarrow S$ est affine, chacun des $C_i \rightarrow B_i$ est affine et la théorie de la descente donne un unique $C \rightarrow B$ et des isomorphismes $C \times_B B_i \simeq C_i$ induisant les isomorphismes précédents (Exp.VIII 2.1. [SGA1]). $C \rightarrow B$ est un G -fibré principal par définition. Enfin, le recollement $C \rightarrow X$ des $C_i \rightarrow X$ est équivariant car les $C_i \rightarrow X$ le sont. On a donc montré le point 2. \square

Lemme 2.2.3. *Soit G un S -groupe affine et lisse agissant sur un S -schéma X . Alors la projection naturelle associée $p : \underline{X} \rightarrow [X/G]$ est représentable.*

Démonstration. Soit B un S -schéma et $q : \underline{B} \rightarrow [X/G]$ un morphisme de champs. Il s'agit de montrer que le produit fibré $\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{X}$, défini par p et q , est isomorphe à \underline{C} pour un certain S -schéma C .

Comme q est un morphisme de champs, il conserve les projections structurelles. Le G -fibré principal $q(id_B)$ est donc de la forme $c = (C \rightarrow B, C \rightarrow X)$. Si $f : B' \rightarrow B$ est un morphisme de S -schémas alors $q(f) = (f^*C \rightarrow B', f^*C \rightarrow X)$.

Maintenant, on considère les objets de $\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{X}$. Par la définition du produit fibré et par les définitions des projections structurales de \underline{B} et \underline{X} , il s'agit des triplets $(B' \xrightarrow{f} B, B' \rightarrow X, \phi)$ tels que ϕ est un isomorphisme entre $q(B' \xrightarrow{f} B)$ et $p(B \rightarrow X)$. Mais cette condition signifie que $G \times_S B' \simeq f^*C$. A cet objet, on peut donc associer l'objet de \underline{C} donné par la composée $B' \rightarrow G \times_S B' \simeq f^*C \rightarrow C$, où la première flèche est $e \times id_{B'}$. Réciproquement, soit $B' \rightarrow C$ un objet de \underline{C} , alors $(B' \rightarrow C \rightarrow B, B' \rightarrow C \rightarrow X, G \times_S B' \xrightarrow{\phi} f^*C)$ est un objet de $\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{X}$, puisque ϕ est un morphisme entre objets de $[X/G](B')$ donc un isomorphisme. Le morphisme p est donc représentable. \square

Proposition 2.2.4. *Soit G un S -groupe affine lisse de type fini sur S agissant sur un S -schéma X noethérien de type fini, tels que les stabilisateurs des points géométriques de X sont réduits et finis. Alors $[X/G]$ est un champ algébrique.*

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on va utiliser le théorème 2.1.14. de la section précédente.

On a montré dans le lemme précédent que le morphisme $p : \underline{X} \rightarrow [X/G]$ est représentable. En utilisant les mêmes notations que dans la démonstration précédente, le morphisme de schéma associé au morphisme de champs $\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{X} \rightarrow \underline{B}$ est le morphisme $C \rightarrow B$ donné par $q(id_B)$. Mais comme $C \rightarrow B$ est un G -fibré principal ce morphisme est surjectif. De plus la lissité (et le caractère affine d'ailleurs) de $G \rightarrow S$ se transmet aux G -fibrés. Donc p est un morphisme surjectif lisse au sens de la définition 2.1.11. ce qui remplit la condition 2. du théorème puisque X est de type fini par hypothèse.

On va, à nouveau, utiliser le lemme précédent ainsi que le lemme 2.1.13. pour montrer que la diagonale Δ est représentable. Soit B et B' des S -schémas, $q : \underline{B} \rightarrow [X/G]$ et $q' : \underline{B}' \rightarrow [X/G]$ des morphismes de S -groupoïdes. Par la démonstration du lemme, on a des S -schémas C et C' tels que $\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{X} \simeq \underline{C}$ et $\underline{B}' \times_{[X/G]} \underline{X} \simeq \underline{C}'$. On obtient donc un diagramme cartésien de S -groupoïdes, donné par la composition des trois diagrammes cartésiens des produits fibrés.

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{C} \times_{\underline{X}} \underline{C}' & \longrightarrow & \underline{B}' \times_{[X/G]} \underline{X} & \longrightarrow & \underline{B}' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{X} & \longrightarrow & \underline{X} & \xrightarrow{p} & \underline{B}' \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\underline{B} & \xrightarrow{q} & & & [X/G]
\end{array}$$

Ainsi $\underline{B} \times_{[X/G]} \underline{B}' \simeq \underline{C} \times_{\underline{X}} \underline{C}'$ ce dernier étant naturellement associé au schéma $C \times_X C'$. La diagonale est alors représentable par le lemme 2.1.13.

On peut vérifier dans les conditions de la proposition 2.2.2. que $\underline{Iso}_B(c, d)$ est un schéma et que $\underline{Iso}_B(c, d) \rightarrow B$ est un G -fibré principal. On peut également vérifier que

si la diagonale Δ est représentable alors il est équivalent de dire que Δ a une propriété P , que de dire que pour tout B et pour tout c et d dans $[X/G](B)$, $\underline{Iso}_B(c, d) \rightarrow B$ a la propriété P . Mais si $G \rightarrow S$ est affine, alors tout G -fibré principal est affine donc Δ est affine, donc a fortiori quasi-compacte et séparée.

Enfin, on veut montrer que Δ est non ramifiée, i.e. que $\underline{Iso}_B(c, d) \rightarrow B$ est non ramifié. Comme ceci se vérifie sur les fibres on peut supposer que $B = \text{Spec}(k)$ pour un corps k et on peut même prendre k algébriquement clos. En effet si \bar{k} est une clôture algébrique de k , alors $\text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow \text{Spec}(k)$ est fidèlement plat et donc, par théorie de la descente, tout $C \rightarrow \text{Spec}(k)$ est non ramifié si et seulement si le morphisme obtenu par changement de base $\bar{C} \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$ est non ramifié.

De plus, on a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de $[X/G](B)$ et l'ensemble des orbites des points géométriques $B \rightarrow X$ (la démonstration de ce point précis est faite dans la démonstration de la proposition 2.4.2.). Ainsi, si c et d ne correspondent pas à la même orbite, alors $\underline{Iso}_B(c, d)$ est vide donc, a fortiori, non ramifié. Par contre, si c et d correspondent à la même orbite, alors $\underline{Iso}_B(c, d)$ est isomorphe au stabilisateur de c . Comme les stabilisateurs sont finis et réduits, $\underline{Iso}_B(c, d)$ est fini et réduit sur k . Mais, sur un corps algébriquement clos, fini réduit signifie étale et implique donc non ramifié, ce qui était le résultat souhaité. \square

2.3 Champ algébrique de modules des courbes

On dispose enfin de tous les outils nécessaires pour construire le champ algébrique de modules des courbes projectives lisses de genre g . On commence par le définir en tant que groupoïde, puis on utilise les résultats précédents pour montrer qu'il s'agit d'un champ algébrique.

Dans cette section, S désigne le schéma affine $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

Définition 2.3.1. *Le groupoïde de modules des courbes projectives lisses de genre g est le S -groupoïde \mathcal{M}_g dont les objets sont les courbes projectives lisses de genre g et les morphismes entre $Z \rightarrow B$ et $Z' \rightarrow B'$ sont des diagrammes cartésiens*

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

Le foncteur de projection $\mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{S}$ envoie une courbe $Z \rightarrow B$ vers sa base B .

Ce groupoïde n'est pas le groupoïde associé au foncteur F définissant le problème de modules des courbes projectives lisses en 0.3.3. En effet, un si $Z \rightarrow B$ est une courbe

équipée d'automorphismes non triviaux alors $\mathcal{M}_g(B)$ possèdent des morphismes non triviaux et ne peut coïncider avec $F(B)$ défini en introduction qui est un ensemble, i.e. tous ses morphismes sont des identités.

Le groupoïde associé à ce foncteur F n'est d'ailleurs pas un champ (donc a fortiori un champ algébrique) puisqu'il n'est pas un faisceau pour la topologie étale (cf. 0.3.3).

Le groupoïde \mathcal{M}_g , par contre, est un champ algébrique. Pour montrer ce résultat, on va utiliser la proposition 2.2.4. La première étape est donc de montrer que \mathcal{M}_g est isomorphe à un groupoïde quotient approprié.

On explique, en annexe, qu'il existe un sous-schéma, noté H_3 , du schéma de Hilbert $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$, tel que $H_3(B)$ corresponde aux courbes projectives lisses de genre g plongées tricanoniquement dans \mathbb{P}_B^{5g-6} . De plus, on dit que $\mathbf{PGL}(5g-5)$ agit naturellement sur H_3 . On peut donc définir un champ quotient $[H_3/\mathbf{PGL}(5g-5)]$ via la proposition 2.2.2.

Théorème 2.3.2. $\mathcal{M}_g \simeq [H_3/\mathbf{PGL}(5g-5)]$

Démonstration. On va construire un morphisme de S -groupoïdes de $q : [H_3/\mathbf{PGL}(5g-5)] \rightarrow \mathcal{M}_g$ et montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, i.e. une équivalence de catégorie. Pour cela, on montre qu'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. Dans la suite, on note G pour signifier $\mathbf{PGL}(5g-5)$.

Soit $c = (C \xrightarrow{s} B, C \xrightarrow{t} H_3) \in [H_3/G]$. Alors $C \xrightarrow{t} H_3$ est un objet de $\underline{H}_3(C)$, on peut donc le voir comme un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z_C & \xleftarrow{i} & \mathbb{P}_C^{5g-6} \\ & \searrow \pi_C & \swarrow \\ & & C \end{array}$$

où π_C est un morphisme projectif lisse. De plus, on remarque que le fait que le morphisme t soit G -équivariant est équivalent au fait que π_C soit G -équivariant pour les actions induites naturellement et qu'il définisse une donnée de descente pour le morphisme fppf s . Mais alors on obtient un morphisme $\pi : Z \rightarrow B$ qui est projectif lisse par descente fppf, comme illustré dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z_C & \xrightarrow{\pi_C} & C \\ \downarrow & & \downarrow s \\ Z & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Le morphisme $Z \rightarrow B$ est un objet de $\mathcal{M}_g(B)$. On définit $q(B)$ comme étant cet objet.

Maintenant, si ϕ est un morphisme de $[H_3/G]$ de c vers $c' = (C' \xrightarrow{s'} B', C' \xrightarrow{t'} H_3)$, alors on a la donnée de deux diagrammes cartésiens, le premier étant celui de

la définition de ϕ et le deuxième traduisant le fait que ϕ commute aux morphismes équivariants.

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\phi} & C \\ \downarrow s' & & \downarrow s \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Z_{C'} & \longrightarrow & Z_C \\ \downarrow \pi_{C'} & & \downarrow \pi_C \\ C' & \xrightarrow{\phi} & C \end{array}$$

qui induisent, à leur tour, un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

Ce diagramme cartésien est, ainsi, un morphisme de \mathcal{M}_g de $q(c')$ vers $q(c)$. On définit $q(\phi)$ comme étant ce morphisme.

On vérifie immédiatement que le morphisme q ainsi défini est pleinement fidèle. Pour ce faire, il suffit de raisonner sur le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z & \longleftarrow & Z_C & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ & & B & \longleftarrow & C & \longleftarrow & \mathbb{P}_C^{5g-6} \\ & \nearrow & & & & & \\ Z & \longleftarrow & Z_{C'} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & & & \\ B' & \longleftarrow & C' & \longleftarrow & \mathbb{P}_{C'}^{5g-6} & & \end{array}$$

Pour montrer qu'il est essentiellement surjectif, il suffit de construire, pour tout $\pi : Z \rightarrow B$ dans $\mathcal{M}_g(B)$, un G -fibré principal $s : C \rightarrow B$ adapté.

En effet, $\pi_*(\omega_{Z/B}^{\otimes 3})$ est localement libre de degré $5g - 5$. On définit donc $s : C \rightarrow B$ comme le G -fibré principal qui est localement trivial pour toute telle localisation de B . Le tiré en arrière de π par s donne alors $\pi_C : Z_C \rightarrow C$ qui définit bien un morphisme G -équivariant. On a donc bien le résultat souhaité. \square

Corollaire 2.3.3. \mathcal{M}_g est un champ algébrique.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2.2.4. En effet, toute courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps algébriquement clos à un schéma en groupe d'automorphismes fini et réduit. Cela signifie exactement que les stabilisateurs des points géométriques sont réduits et finis. \square

2.4 Schéma de modules grossier

Dans cette section on montre que la construction précédente de \mathcal{M}_g contient, d'une certaine façon, le schéma de modules grossier M_g construit par Mumford en 1965. Pour cela, on admet entièrement l'existence et la construction de M_g .

On commence par redéfinir la notion de schéma de modules grossier d'un foncteur en terme de champs algébriques. La définition ici n'est pas exactement la même que la définition en introduction puisqu'un champ algébrique n'est pas nécessairement un foncteur. En particulier, on rappelle que \mathcal{M}_g n'est pas un foncteur. Mais on l'adapte en fonction.

Définition 2.4.1. *Soit \mathcal{F} un champ algébrique. Le schéma de modules grossier de \mathcal{F} est un schéma M ainsi qu'un morphisme $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \underline{M}$, tel que*

1. *pour tout corps algébriquement clos k , les classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{F}(\text{Spec}(k))$ sont en bijection avec $\underline{M}(\text{Spec}(k))$,*
2. *cette solution est universelle au sens où, si N est un schéma, tout morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \underline{N}$ se factorise via un morphisme $\underline{M} \rightarrow \underline{N}$.*

On donne une condition suffisante pour qu'un schéma soit le schéma de modules grossier d'un champ algébrique, sous des hypothèses restrictives sur ce champ algébrique, mais qui correspondent au cas auquel on s'intéresse.

Proposition 2.4.2. *Soit G et X comme en proposition 2.2.4. On considère le champ algébrique quotient $[X/G]$. Soit $f : X \rightarrow Y$ un quotient géométrique de X par G . Alors Y est le schéma de modules grossier du champ algébrique $[X/G]$.*

Démonstration. Soit k un corps algébriquement clos. On pose $B = \text{Spec}(k)$. On commence par montrer que l'ensemble des classes d'isomorphismes de $[X/G](B)$ est en bijection avec l'ensemble des orbites de $G(k)$ dans $X(k)$.

Soit $c = (C \xrightarrow{s} B, C \xrightarrow{t} X)$ un objet de $[X/G](B)$, alors on définit une application i telle que $i(c) = t(C(k)) \subset X(k)$. Alors $i(c)$ est une orbite de $G(k)$ dans $X(k)$. De plus cette application passe au quotient quand on considère les classes d'isomorphismes de $[X/G](B)$ par la définition d'un morphisme dans $[X/G]$. i est surjective. En effet, si O est une orbite non vide de $G(k)$ dans $X(k)$, alors on peut choisir un représentant k -rationnel $x : B \rightarrow X$ de O (car X est de type fini). Maintenant O est l'image par i de $c = (G \times_S B \rightarrow B, G \times_S B \rightarrow X)$ où la première flèche est le G -fibré trivial et la deuxième vaut $\mu \circ (id_G \times x)$. i est injective. En effet, on suppose que $i(c) = i(d) = O$ pour un objet $d = (D \rightarrow B, D \rightarrow X)$, alors x se factorise via un point $\gamma \in C$ et $\delta \in D$. Soit ϕ l'unique morphisme équivariant qui envoie γ sur δ . ϕ définit un morphisme de $[X/G]$ entre c et d , donc un isomorphisme de $[X/G](B)$. On a bien le résultat souhaité.

On s'intéresse maintenant au caractère universel de la solution. On remarque d'abord que, par définition, $x = (G \times_S X \xrightarrow{p_2} X, G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X)$ et $y = (X \xrightarrow{f} Y, X \xrightarrow{id_X} X)$ sont

des objets de $[X/G]$ et σ (l'action de G sur X) est un morphisme de $[X/G]$ qui envoie x sur y . De plus si c est un élément de $[X/G]$ avec les notations usuelles, il existe un morphisme ψ de $[X/G]$ qui envoie c sur x , il suffit de prendre $\psi_c = (e_C, t)$ où e_C est la composée du morphisme structural de C par e . Maintenant si $q : [X/G] \rightarrow \underline{N}$ est un morphisme de champs alors il se factorise naturellement via les transformations précédentes, i.e. $q(c) = q(y) \circ q(\sigma) \circ q(\psi_c)$. On a donc bien une factorisation de q via \underline{Y} . \square

On peut maintenant utiliser le théorème de Mumford (5.11. [GIT]) qui donne l'existence de M_g par un quotient, énoncé ici dans le cas particulier que l'on a étudié.

Théorème 2.4.3. *Un quotient géométrique de H_3 par $\mathbf{PGL}(5g - 5)$ existe.*

Et ce quotient c'est $H_3 \rightarrow M_g$. On en déduit, via les résultats de la section précédente, que M_g est le schéma de modules grossier de \mathcal{M}_g .

Annexe A

Schémas en groupes

Définition A.0.4. Soit G un S -schéma et π son morphisme structurel. Soit $\mu : G \times_S G \rightarrow G$, $\beta : G \rightarrow G$ et $e : S \rightarrow G$ des morphismes de S -schémas. On dit que G , muni des morphismes μ , β et e , est un S -groupe s'il vérifie

$$1. \quad \begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{id_G \times \mu} & G \times_S G \\ \mu \times id_G \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Delta} & G \times_S G & \xrightarrow[\beta \times id_G]{id_G \times \beta} & G \times_S G \\ \pi \downarrow & & & & \downarrow \mu \\ S & \xrightarrow{e} & G & & G \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\simeq} & S \times_S G \\ \downarrow \simeq & \swarrow \mu & \downarrow e \times id_G \\ G \times_S S & \xrightarrow{id_g \times e} & G \times_S G \end{array}$$

Définition A.0.5. Soit X un S -schéma et G un S -groupe (avec les notations de la définition précédente). On dit que G agit sur X s'il existe un morphisme de S -schémas $\sigma : G \times_S X \rightarrow X$ tel que

$$1. \quad \begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S X & \xrightarrow{id_G \times \sigma} & G \times_S X \\ \mu \times id_X \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\simeq} & S \times_S X \\ \swarrow \sigma & & \swarrow e \times id_X \\ & G \times_S X & \end{array}$$

On peut toujours faire agir G trivialement sur un S -schéma X donné via la deuxième projection $p_2 : G \times_S X \rightarrow X$. On remarque également que μ est une action de G sur lui-même, dite de translation.

G -fibrés

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas et G un S -groupe agissant sur X et Y . On dit que f est G -équivariant si

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \\ \downarrow id_G \times f & & \downarrow f \\ G \times_S Y & \xrightarrow{\sigma_Y} & Y \end{array}$$

Si l'action de G sur Y est triviale, alors on dit que f est G -invariant.

Si l'on suppose que $X = G \times_S Y$, l'action sur X étant défini comme le produit de la translation de G sur lui-même par l'action triviale sur Y . Alors $f : X \rightarrow Y$, donné par la seconde projection, est appelé un G -fibré trivial.

$f : X \rightarrow Y$ est un G -fibré principal s'il est localement trivial, i.e. il existe un recouvrement $\{Y_i \rightarrow Y\}$ tel que $f_i : G \times_S Y_i \rightarrow Y_i$ est un G -fibré trivial.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux G -fibrés pour la topologie fppf. Les S -groupes que l'on considère sont fppf, c'est-à-dire que leur morphisme structurel π est fppf. Dans ce cas, si $f : X \rightarrow Y$ est un G -fibré, alors f est fppf. Plus généralement, f a toute propriété de π stable par changement de base et descente fppf.

Orbites et stabilisateurs

On considère maintenant un morphisme $f : T \rightarrow X$. On définit le morphisme

$$\psi_f : G \times_S T \rightarrow X \times_S T$$

par $\psi_f = (\sigma \circ (id_G \times f), p_2)$. On pose, en particulier $\Psi = \psi_{id_G} = (\sigma, p_2)$.

Définition A.0.6. On appelle orbite de f , et on note $\text{Orb}(f)$, l'image de ψ_f .

Définition A.0.7. On appelle stabilisateur de f , et on note $\text{Stab}(f)$, le produit fibré défini par

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}(f) & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow (f, id_T) \\ G \times_S T & \xrightarrow{\psi_f} & X \times_S T \end{array}$$

Quotients

Définition A.0.8. Soit G un S -groupe agissant sur un S -schéma X via le morphisme σ . Soit Y un S -schéma et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. On dit que $f : X \rightarrow Y$ est un quotient catégorique de X par G si

$$1. \quad \begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

2. cet objet est universel.

Le quotient catégorique est unique (à isomorphisme canonique près) par définition. Il est noté X/G . Il n'existe pas a priori.

Définition A.0.9. Soit G un S -groupe agissant sur un S -schéma X via le morphisme σ . Soit Y un S -schéma et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. On dit que $f : X \rightarrow Y$ est un quotient géométrique de X par G si

$$1. \quad \begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

2. les fibres géométriques de f sont des orbites (ou de manière équivalente f est surjective et l'image du morphisme $\Psi : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$ est $X \times_Y X$),
3. f est universellement submersive, i.e. $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X et cette propriété est conservé par changement de base,
4. $\mathcal{O}_Y = f_*(\mathcal{O}_X)^G$.

Proposition A.0.10. Un quotient géométrique est un quotient catégorique.

Proposition A.0.11. Si G est fppf alors un G -fibré principal est un quotient géométrique.

Annexe B

Schéma de Hilbert

Définition et existence

Théorème B.0.12. *Soit $f : X \rightarrow Y$ propre de présentation finie. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent Y -plat. Alors la fonction caractéristique d'Euler-Poincaré χ définie par*

$$\chi(\mathcal{F}_y) = \text{rang}(H^0(X_y, \mathcal{F}_y)) - \text{rang}(H^1(X_y, \mathcal{F}_y)) + \text{rang}(H^2(X_y, \mathcal{F}_y)) - \dots$$

est localement constante sur Y .

Proposition B.0.13. *Soit $f : X \rightarrow Y$ projectif. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent Y -plat. Alors la fonction $P_{\mathcal{F}}$ définie par*

$$P_{\mathcal{F}}(m) = \chi(\mathcal{F}(m))$$

est un polynôme à coefficients dans \mathbb{Q} appelé le polynôme de Hilbert de \mathcal{F} .

Si $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_Y^n$ est une immersion, on peut considérer le faisceau $\mathcal{F} = \pi^*(\mathcal{O}(1))$ qui lui est associé. Dans ce cas, on parle simplement du polynôme de Hilbert de π .

Théorème B.0.14. *On considère le foncteur $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_S^n} : \mathcal{S} \rightarrow \underline{\text{Ens}}$ défini par*

$$\text{Hilb}_{\mathbb{P}_S^n}(B) = \{\text{sous-schémas fermés } Z \subset \mathbb{P}_B^n \text{ plats et de présentation finie sur } B\}$$

Alors ce foncteur est représentable par le schéma

$$\text{Hilb}_{\mathbb{P}_S^n} = \coprod_{P \in \mathbb{Q}[t]} \text{Hilb}_{\mathbb{P}_S^n}^P$$

où $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_S^n}^P$ représente le sous-foncteur correspondant aux sous-schémas fermés avec polynôme de Hilbert P .

Soit $\pi : Z \rightarrow B$ une courbe projective lisse sur B . Alors, on a vu dans la section 1.3. que l'on peut définir une immersion fermée $f : Z \rightarrow \mathbb{P}_B^{5g-6}$ tricanonique. Le polynôme de Hilbert associé à f est donné par le théorème de Riemann-Roch $\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g$. On trouve $P(m) = (6m - 1)(g - 1)$.

Théorème B.0.15. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, plat et de présentation finie, alors l'ensemble des points y de Y tels que la fibre X_y est lisse et géométriquement connexe est un ouvert.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de 12.2.4 [EGA4c]. On en déduit la propriété suivante.

Proposition B.0.16. *Il existe un sous-schéma $H_3 \subset \text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}^{(6m-1)(g-1)} \subset \text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$ correspondant aux images de courbes projectives lisses par une immersion tricanonique.*

Enfin, on remarque que l'action naturelle de $\mathbf{PGL}(5g - 5)$ sur $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$ définit une action de $\mathbf{PGL}(5g - 5)$ sur H_3 .

Bibliographie

- [DM] P. Deligne, D. Mumford, *Irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES, **36**, 75-110 (1969).
- [Ed] D. Edidin, *Notes on the Construction of the Moduli Space of Curves*, in *Recent progress in intersection theory (Bologna, 1997)*, 85-113, Trends Math., Birkhäuser (2000).
- [EGA3b] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique, Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. I.H.E.S, **17** (1963).
- [EGA4c] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. I.H.E.S, **28** (1966).
- [EGA4d] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. I.H.E.S, **32** (1967).
- [Ei] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics, **150** (1995).
- [FAG] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental algebraic geometry, Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Surveys and Monographs, **123**, Amer. Math. Soc. (2005).
- [FGAd4] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 6 , Exp. No. **221** (1960-1961).
- [GIT] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory, Third Enlarged Edition*, Springer (1994).
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics, **52** (1977).
- [L] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **6** (2002).
- [LMB] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer (2000).
- [Mi] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Math., **5**, Amer. Math. Soc. (1995).

- [Mu] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes, Second Expanded Edition*, Lecture Notes in Mathematics, **1358**, Springer (1999).
- [SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, (1960-1961), SMF, (2003).
- [V] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and their moduli spaces*, Invent. Math. **97**, 613-670 (1989).