Z	1	2	3	4	5	6	7	L 8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1	1	1	1
2	φ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
T 8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Rangs paralleles

Triangle Arithmetique

Rangs perpendiculaires

ESPERANCE

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{x \in X} p(x) \cdot Z(x) \,.$$

TRAITE DV TRIANGLE ARITHMETIQVE,

AVEC QVELQVES AVTRES PETITS TRAITEZ SVR LA MESME MATIERE.

Par Monſieur ***PASCAL.***

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë ſaint Iacques, à Saint Proſper.

M. DC. LXV.

VSAGE DV TRIANGLE ARITHMETIQVE,

Pour determiner les partys qu'on doit faire entre deux Ioüeurs qui ioüent en plusieurs parties.

POVR entendre les regles des partys, la premiere chose qu'il faut considerer, est, que l'argent que les ioüeurs ont mis au jeu, ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la proprieté; mais ils ont receu en reuanche le droit d'attendre ce que le hazard leur en peut donner, suiuant les conditions dont ils sont conuenus d'abord.

Mais comme c'est vne loy volontaire, ils la peuuent rompre de gré à gré, & ainsi en quelque terme que le jeu se trouue, ils peuuent le quitter, & au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant renoncer à l'attente du hazard, & rentrer chacun en la proprieté de quelque chose; Et en ce cas, le reglement de ce qui doit leur appartenir, doit estre tellement proportionné à ce qu'ils auoient droit d'esperer de la fortune, que chacun d'eux trouue entierement égal de prendre ce qu'on luy assigne, ou de continuer l'auanture du jeu, & cette iuste distribution s'appelle le Party.

Le premier principe qui fait connoistre de quelle sorte on doit faire les partis, est celuy-cy.

Si vn des joüeurs se trouue en telle condition, que quoy qu'il arriue, vne certaine somme luy doit appartenir en cas de perte & de gain, sans que le hazard la luy puisse oster, il n'en doit faire aucun party, mais la prendre entiere comme asseurée, parce que le party deuant estre proportionné au hazard, puis qu'il n'y a nul hazard de perdre, il doit tout retirer sans party.

Le second est celuy-cy. Si deux joüeurs se trouuent en telle condition, que si l'vn gagne il luy appartiendra vne certaine somme, & s'il pert elle appartiendra à l'autre; Si le jeu est de pur hazard, & qu'il y ait autant de hazards pour l'vn que pour l'autre, & par consequent non plus de raison de gagner pour l'vn que pour l'autre, s'ils veulent se separer sans joüer, & prendre ce qui leur appartient legitimement, le party est qu'ils separent la somme qui est au hazard par la moitié, & que chacun prenne la sienne.

Corollaire premier.

Si deux joüeurs joüent à vn jeu de pur hazard, à condition que si le premier gagne il luy reuiendra vne certaine somme, & s'il pert il luy en reuiendra vne moindre, s'ils veulent se separer sans ioüer, & prendre chacun ce qui leur appartient; le party est, que le premier prenne ce qui luy reuient en cas de perte, & de plus la moitié de l'excez, dont ce qui luy reuiendroit en cas de gain surpasse ce qui luy reuient en cas de perte.

Par exemple, si deux joüeurs joüent à condition que si le premier gagne il emportera huit pistoles, & s'il pert il en emportera deux; Ie dis que le party est qu'il prenne ces deux, plus la moitié dont huit surpasse deux, c'est à dire plus 3. car 8. surpasse 2. de 6. dont la moitié est 3.

Car par l'hypothese s'il gagne il emporte 8. c'est à dire 6 † 2. & s'il pert il emporte 2. donc ces 2. luy appartiennent en cas de perte & de gain; Et par consequent par le premier principe, il n'en doit faire aucun party, mais les prendre entieres. Mais pour les 6. autres elles dependent du hazard; de sorte que s'il luy est fauorable, il les gagnera, sinon elles reuiendront à l'autre, & par l'hypothese il n'y a pas plus de raison qu'elles reuiennent à l'vn qu'à l'autre; Donc le party est qu'ils les separent par la moitié, & que chacun prenne la sienne, qui est ce que i'auois proposé.

Donc pour dire la mesme chose en d'autres termes, il luy appartient le cas de la perte, plus la moitié de la difference des cas de perte & de gain.

Et partant s'y en cas de perte il luy appartient A, & en cas de gain A † B, le party est qu'il prenne A † $\frac{1}{2}$ B.

Corollaire second.

Si deux joüeurs sont en la mesme condition que nous venons de dire, Ie dis que le party se peut faire de cette façon qui reuient au mesme, que l'on assemble les deux sommes de gain & de perte, & que le premier prenne la moitié de cette somme; c'est à dire qu'on ioigne 2. auec 8. & ce sera 10. dont la moitié 5. appartiendra au premier.

Car la moitié de la somme de deux nombres est tousiours la mesme que la moindre plus la moitié de leur difference.

Et cela se demonstre ainsi.

Soit A *ce qui reuient en cas de perte, &* $A + B$ *ce qui reuient en cas de gain.*

Ie dis que le party se fait en assemblant ces deux nombres, qui sont $A + A + B$, *& en donnant la moitié au premier qui est* $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$. *Car cette somme égale* $A + \frac{1}{2} B$ *qui a esté prouuée faire le party iuste.*

Ces fondemens estans posez, nous passerons aisement à determiner le party entre deux ioüeurs qui ioüent en tant de parties qu'on voudra en quelque estat qu'ils se trouuent, c'est à dire, quel party il faut faire, quand ils ioüent en deux parties, & que le premier en a vne à point, ou qu'ils ioüent en trois, & que le premier en a vne à point, ou quand il en a deux à point, ou quand il en a deux à vne. Et generalement en quelque nombre de parties qu'ils ioüent, & en quelque gain de parties qu'ils soient & l'vn & l'autre.

Sur quoy la premiere chose qu'il faut remarquer, est que deux ioüeurs qui ioüent en deux parties, dont le premier en a vne à point, sont en mesme condition que deux autres qui ioüent en trois parties, dont le premier en a deux, & l'autre vne: car il y a cela de commun que pour acheuer il ne manque qu'vne partie au premier, & deux à l'autre, & c'est en cela que consiste la difference des auantages, & qui doit regler les partis; de sorte qu'il ne faut proprement auoir égard qu'au nombre des parties qui restent à gagner à l'vn & à l'autre, & non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque comme nous auons déja dit, deux ioüeurs se trouuent en mesme estat, quand ioüant en deux parties, l'vn en a vne à point, que deux qui ioüans en douze parties, l'vn en a vnze à dix.

Il faut donc proposer la question en cette sorte.

Estans proposez deux ioüeurs, à chacun desquels il manque vn certain nombre de parties pour acheuer, faire le party.

I'en donneray icy la methode, que ie poursuiuray seulement en deux ou trois Exemples, qui seront si aisez à continüer, qu'il ne sera pas necessaire d'en donner dauantage.

Pour faire la chose generale sans rien obmettre, ie la prendray par le premier Exemple, qu'il est peut estre mal à propos de toucher, parce qu'il est trop clair, ie le fais pourtant pour commencer par le commencement, c'est celuy-cy.

Le premier principe qui fait connaître de quelle sorte on doit faire les partis est celui-ci. Si un des joueurs se trouve en telle condition, que quoi qu'il arrive, une certaine somme lui doit appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard puisse la lui puisse ôter, il ne doit en faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée, parce que le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti.

Le second est celui-ci. Si deux joueurs se trouvent en telle condition, que si l'un gagne il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre ; si le jeu est de pur hasard, et qu'il y ait autant de hasards pour l'un que pour l'autre, et par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l' autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié, et que chacun prenne la sienne.

In Traité du triangle arithmétique.

Et puis un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici, savoir : la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis, ce qu'on appelle en français *faire les partis des jeux* ; la fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. Et c'est là certes ce qu'il faut d'autant plus chercher par le raisonnement, qu'il est moins possible d'être renseigné par l'expérience. En effet les résultats du sort ambigu sont justement attribués à la contingence fortuite plutôt qu'à la nécessité naturelle. C'est pourquoi la question a erré incertaine jusqu'à ce jour ; mais maintenant, demeurée rebelle à l'expérience, elle n'a pu échapper à l'empire de la raison. Et, grâce à la géométrie, nous l'avons réduite avec tant de sûreté à un art exact, qu'elle participe de sa certitude et déjà progresse audacieusement. Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : *La Géométrie du Hasard*.

PASCAL, *Adresse à l'académie parisienne*, 1654 ;
in *Œuvres complètes*, Lafuma éd., Seuil, pp. 102-103.

≪ estimer l'espérance qu'une personne a d'obtenir quelque chose
autant que ce qui lui permettrait, en l'ayant,
d'atteindre à nouveau le même sort ou la même espérance
en jouant contre quelqu'un à condition égale ≫.

Huygens

« Or quand on travaille pour demain et pour l'incertain
on agit avec raison,
car on doit travailler pour l'incertain
par la règle des partis qui est démontrée. »

« Saint Augustin a vu qu'on travaille pour l'incertain
sur mer, en bataille, etc.
mais il n'a pas vu la règle des partis
qui démontre qu'on le doit. »

Pascal, *Pensées*.

Utilité espérée :

$$U(a) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot u\big(f(x,a)\big) \, .$$

Théorie des perspectives (Kahneman et Tversky) :

$$V(a,c) = \sum_{x \in X} \pi\big(p(x)\big) \cdot u\big(f(x,a),c\big) \, .$$

$c =$ contexte.
$p(x) =$ probabilité de l'état du monde x.
$f(x,a) =$ effet d'une action a dans l'état du monde x.
$u =$ fonction d'utilité.

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour

	6 Parties	5 Parties	4 Parties	3 Parties	2 Parties	1 Partie
La 1re Partie	63	70	80	96	128	256
Les 2 1res Parties	126	140	160	192	256	
Les 3 1res Parties	182	200	224	256		
Les 4 1res Parties	224	240	256			
Les 5 1res Parties	248	256				
Les 6 1res Parties	256					

XVII

De Blaise Pascal a Fermat

Le 29 Juillet 1654.

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis [1], que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

1. Cette lettre ne nous est pas parvenue.

Pierre de Carcavi (?-1684), conseiller au grand conseil de Paris, puis, sous Colbert, bibliothécaire du roi. Il compte parmi les premiers membres de l'Académie des sciences. C'était un grand ami de Pascal, et Baillet a écrit dans sa *Vie de Monsieur Descartes* (t. II, p. 378), à la date de 1649 : « M. Pascal n'avait point encore alors d'ami plus intime que lui (Carcavi), sans en excepter même M. de Roberval ni Messieurs de Port-Royal, qu'il ne connut parfaitement que depuis. Il lui en avait donné des marques depuis peu par le beau présent de la merveilleuse machine d'arithmétique qu'il avait inventée. »

valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se hasarder sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'artrois dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties) qui aient chacun trois faces (puisqu'il y a trois joueurs), l'une marquée *a* favorable au premier, l'autre *b* pour le second, l'autre *c* pour le troisième, il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

a	*a*	*a*	1		
a	*a*	*b*	1		
a	*a*	*c*	1		
a	*b*	*a*	1		
a	*b*	*b*	1	2	
a	*b*	*c*	1		
a	*c*	*a*	1		
a	*c*	*b*	1		
a	*c*	*c*	1		3
b	*a*	*a*	1		
b	*a*	*b*	1	2	
b	*a*	*c*	1		
b	*b*	*a*	1	2	
b	*b*	*b*		2	
b	*b*	*c*		2	
b	*c*	*a*	1		
b	*c*	*b*		2	
b	*c*	*c*			3
c	*a*	*a*	1		
c	*a*	*b*	1		
c	*a*	*c*	1		3
c	*b*	*a*	1		
c	*b*	*b*		2	
c	*b*	*c*			3
c	*c*	*a*	1		3
c	*c*	*b*			3
c	*c*	*c*			3

Or, il ne manque qu'une partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un *a* sont pour lui ; donc il y en a 19.

Il manque deux parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux *b* sont pour lui ; donc il y en a 7.

Il manque deux parties au troisième : donc toutes les assiettes où il y a deux *c* sont pour lui ; donc il y en a 7.

Si de là on concluait qu'il faudrait donner à chacun selon la proportion de 19, 7, 7, on se tromperait trop grossièrement, et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi ;

XXI

De Blaise Pascal a Fermat

Du 27 Octobre 1654.

Monsieur,

Votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait. J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien ; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie.

Mais, Monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations. Pour moi, je vous confesse que cela me passe de bien loin ; je ne suis capable que de les admirer, et vous supplie très humblement d'occuper votre premier loisir à les achever. Tous nos Messieurs les virent samedi dernier et les estimèrent de tout leur cœur. On ne peut pas aisément supporter l'attente de choses si belles et si souhaitables. Pensez-y donc, s'il vous plaît, et assurez-vous que je suis, etc.

Pascal.

La Madeleine d'Euclide présente : un exposé de Pierre Mathieu

Pascal, Fermat, le problème des partis et la naissance du concept d'espérance mathématique

Jeudi 22 juin à 17h dans la salle de séminaire de la FRUMAM

TABLE

DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2e Partie.	63	70	80	96	128	
3e Partie.	56	60	64	64		
4e Partie.	42	40	32			
5e Partie.	24	16				
6e Partie.	8					

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 de mon joueur, pour les	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
La Ire Partie.	63	70	80	96	128	256
2 Ires Parties.	126	140	160	192	256	
3 Ires Parties	182	200	224	256		
4 Ires Parties.	224	240	256			
5 Ires Parties.	248	256				
6 Ires Parties.	256					

Le deuxième exposé du séminaire *La Madeleine de Proust* sera donné par Pierre Mathieu et portera sur la naissance du calcul des probabilités dans la correspondance échangée en 1654 entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat, et sur bien d'autres choses encore…

Si vous avez envie de nous raconter un texte ou un extrait de texte ancien, contactez moi : J-Y Briend,
jean-yves.briend@univ-amu.fr