Mercredi 17 septembre 2008
Similitudes

Corrigé ex. 1 (1) La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est la transformation f qui à un point M associe l'unique point $M' = f(M)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$. En termes d'affixes, si l'affixe du vecteur $\overrightarrow{v}$ est noté a, on a $f(z) = z + a$.
(2) La rotation de centre Ω et d'angle θ associe à un point M l'unique point $M' = f(M)$ tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta\ (2\pi)$. En termes d'affixes, si l'affixe de Ω est ω, on a $f(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$. Ceci se voit facilement si l'on observe que $f = t \circ r \circ t^{-1}$, où $t(z) = z + \omega$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ et $r(z) = e^{i\theta}z$ représente la rotation d'angle θ centrée en O. (On se translate en l'origine O, puis on tourne, puis on se retranslate en Ω.)
(3) L'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ associe à un point M l'unique point $M' = f(M)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. En termes d'affixes, on a $f(z) = \lambda(z - \omega) + \omega$.
(4) La réflexion d'axe une droite Δ associe à un point M l'unique point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur Δ. Pour trouver l'expression en termes d'affixes, on note qu'on peut faire tourner l'axe Δ et le translater pour le faire coïncider avec l'axe des réels. (Pour cela on utilise une transformation $r(z) = e^{i\theta}z + a$ dont l'inverse est $r^{-1}(z) = e^{-i\theta}(z - a)$.) La réflexion par rapport à l'axe réel est la conjugaison complexe $c(z) = \overline{z}$. Donc $f = r^{-1} \circ c \circ r$, ce qui donne

$$f(z) = e^{-i\theta}(\overline{e^{i\theta}z + a} - a) = e^{-2i\theta}\overline{z} + e^{-i\theta}(\overline{a} - a) = e^{-2i\theta}\overline{z} - 2ite^{-i\theta}$$

où t est la partie imaginaire de a. Quitte à changer t en $-t$ et θ en $-\theta$, la forme générale d'une réflexion est donc $g(z) = e^{2i\theta}\overline{z} + 2ite^{i\theta}$.

Rappel : Toutes ces transformations sont des *similitudes (affines euclidiennes)*, et toute similitude est composée d'un certain nombre de ces transformations. Rappelons qu'en géométrie affine euclidienne, on appelle *similitude* une transformation qui envoie une figure sur une figure semblable, c'est-à-dire ayant la même forme ; la *forme* étant ce qui est invariant par isométrie et changement d'échelle.

Les similitudes préservent les angles non orientés. On dit qu'une similitude est *directe* si elle préserve l'orientation des angles, et *indirecte* sinon.

Les similitudes directes sont les transformations de la forme $f(z) = az + b$. Si $|a| = 1$, c'est une isométrie. Si $a = 1$, c'est une translation. Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, c'est une rotation. Si $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$, c'est une homothétie. Noter que si $a = 1$, la similitude n'est une rotation, ou une homothétie, que si $b = 0$.

Les similitudes indirectes sont les transformations de la forme $f(z) = a\overline{z} + b$.

Corrigé ex. 2 On aura besoin de l'identité classique $1 + j + j^2 = 0$. Notons aussi que $e^{i\pi/3} = -j^2$ comme on le voit sur le cercle trigonométrique.

On commence par (1) $\iff$ (2). Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$, son expression en complexes est $r(z) = e^{i\pi/3}(z - a) + a = -j^2(z - a) + a$. Alors ABC est un triangle équilatéral direct ssi $r(B) = C$, ssi $-j^2(b-a)+a = c$, ssi $aj + bj^2 + c = 0$. Ceci veut dire que j^2 est racine du polynôme $az^2 + bz + c$. De même on montre que ABC est un triangle équilatéral indirect ssi j est racine de ce polynôme.

(2) $\iff$ (3) : j ou j^2 est racine de az^2+bz+c si et seulement si $(aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c) = 0$. En développant :

$$a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ac)j + (ac + ab + bc)j^2 = 0$$

et comme $1 + j + j^2 = 0$ on trouve bien $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

(3) $\iff$ (4) : pour chasser les dénominateurs dans l'expression de (4), on a l'idée de multiplier par $(a-b)(b-c)(c-a)$ qui est non nul par hypothèse. On trouve :

$$(a-b)(b-c)(c-a)\left[\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right] = (b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c) \ .$$

Après simplification ceci vaut $-a^2 - b^2 - c^2 + ac + bc + ab$. Alors l'équivalence de (3) et (4) est claire.

Corrigé ex. 3 Soit $f(z) = az + b$ la similitude recherchée. On doit résoudre $az_1 + b = z_1'$ et $az_2 + b = z_2'$, on trouve immédiatement $a = (z_1' - z_2')/(z_1 - z_2)$ et $b = z_1' - az_1 = z_1' - (z_1' - z_2')/(z_1 - z_2)z_1$.

Corrigé ex. 4 (1) On a $2\psi + 1 = \sqrt{5}$ donc $(2\psi + 1)^2 = 5$. Il s'ensuit que $4\psi^2 + 4\psi = 4$ donc $\psi^2 + \psi - 1 = 0$.
(2) Le fait que X soit sur le segment $[EF]$ se traduit par une égalité de la forme $x - i/2 = t(1-i/2)$ pour un $t \in [0;1]$. Comme de plus on doit avoir $|x-i/2| = 1/2$ on trouve $1/2 = t\sqrt{5}/2$, donc $t = \sqrt{5}/5$. Finalement

$$x = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}(1 - \frac{i}{2})$$

et on trouve $|x-1| = \psi$.
(3) Notons $y = a+bi$ avec $|y|^2 = 1$ et $b > 0$. Alors $\psi^2 = |y-1|^2 = (a-1)^2 + b^2 = -2a+2$ donc

$$a = 1 - \frac{\psi^2}{2} = \frac{1+\psi}{2} \ .$$

Je laisse de côté les détails du calcul facile de $b = \sqrt{1-a^2} = \dots$
(4) La similitude d'expression $f(z) = \alpha z+\beta$ doit vérifier $f(0) = y$ donc $\beta = y$, et $f(y) = 1$ donc $\alpha y+y = 1$. On trouve $\alpha = (1-y)/y = \overline{y}-1$, puisque $y^{-1} = \overline{y}$. Finalement $f(z) = (\overline{y}-1)z+y$. Par conséquent $f(1) = \overline{y} - 1 + y = 2\,Re(y) - 1 = \psi$, c'est bien le point de l'axe réel d'affixe ψ.
(5) Soit le triangle $T_3 = YOE$. Par la question précédente, le triangle T_1 est image du triangle T_3 par la similitude f. Comme T_3 est isocèle en O (car $OY = OE = 1$), il en découle que T_1 est isocèle en Y.

On en déduit que $YZ = YE$. Comme ces segments sont images par f de segments de longueur 1 et que f multiplie les longueurs par $|\overline{y} - 1| = |y-1| = |x-1| = \psi$, on trouve que $YZ = YE = \psi$. Comme par ailleurs $OZ = \psi$ (c'est l'affixe de Z), alors le triangle $T_2 = OZY$ est isocèle en Z.
(6) Notons $\alpha = \widehat{EOY}$ et $\beta = \widehat{EZY}$. Puisque EYZ est image de YOE par f on a $\widehat{ZYE} = \widehat{EOY} = \alpha$. La somme des angles dans le triangle T_1, isocèle en Y, donne $\alpha + 2\beta = \pi$.

En utilisant encore le fait que T_2 et T_3 sont isocèles, on voit que la demi-droite $[YZ)$ partage l'angle $\widehat{OYE}$ en deux angles égaux de mesure α. Ainsi $\beta = 2\alpha$.

En joignant ces informations on trouve $5\alpha = \pi$ donc $\alpha = \pi/5$. C'est la valeur de l'argument de y (ou plutôt, l'argument de y est la classe de α modulo 2π, comme on l'a rappelé...).
(7) Jusqu'ici, la construction de Y s'est faite à la règle et au compas. Si on veut, on peut finir avec le seul compas. Sur le cercle $\mathcal{C}$, au compas on reporte le point E_1 tel que $YE_1 = YE$, puis en réglant le compas à la longueur EE_1, à la suite de E_1 on reporte E_2, E_3, E_4, et $E_5 = E$. D'après la question (6), le polygone $EE_1E_2E_3E_4$ est un pentagone régulier, et ses sommets sont les racines cinquièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Corrigé ex. 5 Préliminaire : vérifiez que vous savez bien ce qu'est un triangle « direct »... On va raisonner sur les affixes complexes des points, on note par petite lettre les affixes. Posons $\lambda = \frac{d-b}{c-b}$. Alors (toute la difficulté de l'exercice est là) dire que BAE et ACF sont directement semblables à BCD veut dire que

$$\frac{e-b}{a-b} = \frac{f-a}{c-a} = \lambda \ .$$

Soit on le « voit » : par exemple, l'égalité $\frac{d-b}{c-b} = \frac{e-b}{a-b}$ traduit le fait que, après avoir translaté B en l'origine (ce qui clairement ne change rien), ce ratio λ est le nombre complexe par lequel il faut multiplier c pour obtenir d, ou encore a pour obtenir e.

Soit on le vérifie... ce n'est pas très difficile.

On peut réécrire la définition de λ et les deux égalités ci-dessus sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda(c-b) &= d-b \\ \lambda(a-b) &= e-b \\ \lambda(c-a) &= f-a \ . \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième à la première :

$$\lambda(c-a) = d-e \ ,$$

d'où avec la troisième $f - a = \lambda(c-a) = d - e$. En termes de vecteurs ceci signifie que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{ED}$, ou encore que $AEDF$ est un parallélogramme.