Mercredi 17 septembre 2008
Similitudes

Exercice 1 Soit E un plan euclidien que l'on identifie, par le choix d'une base orthonormée, au plan complexe $\mathbb{C}$. Pour chacune des familles de transformations suivantes, donnez sa définition géométrique, puis son expression en fonction de l'affixe z du point.
(1) les translations,
(2) les rotations,
(3) les homothéties,
(4)* les réflexions (symétries par rapport à une droite).

Exercice 2 Soient a, b, c trois nombres complexes distincts. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) a, b, c sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral,
(2) $j = e^{2i\pi/3}$ ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c$,
(3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$,
(4) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

(*La difficulté principale est l'équivalence de (1) et (2). Démontrez que ABC est un triangle équilatéral direct (resp. indirect) ssi j^2 (resp. j) est racine de $az^2 + bz + c$.*)

Exercice 3 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes distincts et z'_1, z'_2 deux autres nombres complexes distincts. Montrez qu'il existe une unique similitude directe qui envoie z_1 sur z'_1 et z_2 sur z'_2.

Exercice 4 Dans cet exercice, on indique une méthode pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on note $C(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r. Soient O l'origine, E le point d'affixe 1, F le point d'affixe $i/2$, $\mathcal{C} = C(O, 1)$ et $\mathcal{C}' = C(F, 1/2)$. On désigne par une grande lettre les points et par une petite lettre leurs affixes.

(1) Soit le nombre $\psi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (notez que $\varphi = \psi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or). Donnez l'équation unitaire du second degré à coefficients rationnels dont ψ est une racine.
(2) Déterminez l'affixe x de $X = \mathcal{C}' \cap [EF]$ ainsi que le module de $x - 1$.
(3) Soit $\mathcal{C}''$ le cercle de centre E et passant par X. Calculez l'affixe y de Y, point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$ à partie imaginaire positive.
(4) Soit f la similitude directe telle que $f(0) = y$ et $f(y) = 1$. Montrez que $z := f(1)$ est le point de l'axe réel d'affixe ψ.
(5) Déduisez-en que les triangles $T_1 = EYZ$, puis $T_2 = OZY$, sont isocèles.
(6) Calculez l'argument de y.
(7) Expliquer comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

Exercice 5 Soit ABC un triangle direct et D un point à l'intérieur de ABC. Soient E et F les points tels que BAE et ACF soient directement semblables à BCD. Montrer que $AEDF$ est un parallélogramme.