

Lundi 8 septembre 2008

Logique et raisonnement mathématique

La logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité.

Soit X un ensemble. Un *énoncé*, ou une *proposition*, est une phrase mathématique dépendant des éléments de X . Un énoncé peut avoir deux valeurs, dépendant des éléments de X : *vrai* ou *faux* (1 ou 0). On associe à chaque énoncé P la partie de X des éléments tels que P est vrai.

Exemple : pour l'énoncé « $x \geq 3$ » la partie correspondante de \mathbb{R} est $[3; +\infty[$.

Par définition, si cette partie est X tout entier l'énoncé « $\forall x \in X, P(x)$ » est vrai.

De même, si cette partie n'est pas vide, l'énoncé « $\exists x \in X, P(x)$ » est vrai.

Correspondance entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes :

Logique	Ensemble	Symbole
P		
non P		$\neg P$
P ou Q		$P \vee Q$
P et Q		$P \wedge Q$
P implique Q = (non P) ou Q		$P \Rightarrow Q$ = $\neg P \vee Q$
P équivaut à Q = (P implique Q) et (Q implique P)		$P \Leftrightarrow Q$ = ...

Complétez par vous-mêmes la deuxième colonne en dessinant l'interprétation ensembliste de chaque connecteur : si la partie de X des éléments tels que P est vrai est notée A , et celle associée de même à Q est notée B , alors la partie associée à P ou Q est...

1 Remarques, exemples

(1) En mathématiques le *ou* est inclusif, c'est-à-dire que $(P \text{ ou } Q)$ est vraie si et seulement si P est vraie, ou Q est vraie, ou P et Q sont vraies (alors qu'en français, si on dit « prendre fromage ou dessert », en général cela veut dire qu'on ne prend pas les deux).

(2) On ajoute souvent un indice à une variable quantifiée par \exists : « $\exists x_0 \in X, \dots$ » pour insister sur le fait qu'on pointe là un élément *particulier*. A contrario, avec le quantificateur \forall on utilise souvent une lettre neutre (sans indice) : « $\forall x \in X, \dots$ » pour souligner que c'est un élément *quelconque*. C'est très utile pour faciliter la compréhension.

(3) Il faut bien faire la différence entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est l'un des deux qualificatifs « vrai » ou « faux »). Par exemple la proposition dépendant des nombres entiers « $n(n + 1)$ est impair » est un énoncé correct du point de vue des règles de logique, bien que faux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples (1) $X = \mathbb{N}$ et $P(n)$: n est pair ou n divise $2n$

(2) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $Q(k, n)$: $(k \text{ divise } n) \iff (\exists n' \in \mathbb{N}, n = n'k)$

(3) $X = \mathbb{R}$ et $P(x)$: $x^2 + 5x + 1 = 0$

(4) P : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$

(5) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et $P(n, x)$: $n \geq x$

(6) $X = \mathbb{R}$ et $P(x)$: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq x$

(7) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, n \leq x$

(8) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$

(9) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$

(10) $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall y \in \mathbb{R}, x \leq y^2) \Rightarrow x \leq 0$

(11) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y^2 \Rightarrow x \leq 0)$

- Un énoncé peut être vrai avec $\exists x \in X$ et faux avec $\forall x \in X$. (3)
- Le choix de l'ensemble des éléments est (bien sûr) très important. (4)
- Un énoncé peut porter aussi sur les éléments de plusieurs ensembles. (5)
- Soit un énoncé P dépendant des éléments de plusieurs ensembles : $P(x, y, z, \dots)$. Alors en écrivant « $\forall x \in X, P(x, y, z, \dots)$ » ou « $\exists x_0 \in X, P(x, y, z, \dots)$ » on forme un nouvel énoncé $Q(y, z, \dots)$ qui dépend de tous les ensembles de départ *sauf* X . (5 et 6)
- L'ordre des quantificateurs est très important : d'ailleurs une proposition qui est vraie (7) peut être fausse si on le change (8). En revanche, on peut toujours échanger deux quantificateurs identiques (9).
- L'utilisation de parenthèses est parfois nécessaire, et des parenthèses placées différemment donnent des énoncés différents (éventuellement l'un vrai (10) et l'autre faux (11)).
- La négation de \forall est \exists et la négation de \exists est \forall . Plus précisément, la négation de $(\forall x \in X, P(x))$ est $(\exists x_0 \in X, \text{non } P(x_0))$. La négation de $(\exists x_0 \in X, P(x_0))$ est $(\forall x \in X, \text{non } P(x))$.
- Dans un énoncé du type « $\forall x \in X, P(x)$ » ou « $\exists x \in X, P(x)$ », la variable x est muette c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre sans changer l'énoncé.
- Si $P \Rightarrow Q$ est vrai on dit que Q est une *condition nécessaire* de P , ou que P est une *condition suffisante* de Q . Si $P \iff Q$ on dit que P est une *condition nécessaire et suffisante* de Q (ou l'inverse).

2 Techniques de démonstration

Voici un petit résumé des différentes techniques de démonstration à notre disposition.

Lorsqu'on doit montrer...	Les techniques de démonstration sont...
une implication $P \Rightarrow Q$	raisonnement ordinaire raisonnement par contraposée : on montre que $\neg Q \Rightarrow \neg P$. raisonnement par l'absurde : on suppose P et $\neg Q$ et on arrive à une contradiction.
une équivalence $P \Leftrightarrow Q$	raisonnement par double implication : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$
une égalité d'ensembles $A = B$	raisonnement par double inclusion : $A \subset B$ et $B \subset A$
qu'une proposition P est fausse	on montre que non P est vraie
une propriété $P(n)$ dépendant des entiers naturels	raisonnement par récurrence

Enfin voici un *truc* de rédaction vraiment très utile : quand on doit montrer que « $\forall x \in X, \dots$ » on commence par écrire : « Soit $x \in X$ ».

3 Logique et langue courante

Voici diverses formulations en français du quantificateur \forall :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 est positif.

Soit x réel. On a...

Tout réel x vérifie...

Quel que soit $x \in \mathbb{R}, \dots$

Un (quelconque) nombre réel x a son carré positif.

Diverses formulations en français du quantificateur \exists :

Il existe $x_0 \in X$ tel que...

Il y a un $x_0 \in X$ tel que...

Trouvez/on a trouvé x_0 dans X tel que...

« Le nombre entier n est de la forme $2k$ »

pour dire « il existe k tel que $n = 2k$ »... c'est-à-dire simplement « n est pair » !

Diverses formulations en français de l'implication :

Si $x \geq 0$ alors...

Quand (dès que, lorsque) $x \geq 0$, on a...

Soit on a $x < 0$, soit...

(c'est le « soit... soit » qui exprime une alternative, comme « ou bien... ou bien »)

Soit $x \geq 0$. Alors...

(c'est le « soit » qui sert à se donner un élément : il est complètement différent !)

Puisque $x \geq 0$, alors...

On a ... car $x \geq 0$

Il suffit que $x \geq 0$ pour que...

... est nécessaire pour que $x \geq 0$.

Diverses formulations en français de l'équivalence :

P si et seulement si Q

P c'est-à-dire Q

P i.e. Q

On a P exactement lorsqu'on a Q

4 Exercices

Exercice 1 Montrez que

- (a) $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$ est la même chose que $(P \text{ et } (\text{non } Q)) \Rightarrow R$.
- (b) $P \Rightarrow Q$ est la même chose que $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$.
On appelle cette dernière l'*implication contraposée* de $P \Rightarrow Q$.
- (c) $P \iff Q$ est la même chose que $(\text{non } P \iff \text{non } Q)$.

Exercice 2 Écrivez les énoncés suivants sous forme de proposition mathématique avec des quantificateurs (sans autre mot de français que les connecteurs « ou, et »). On rappelle que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ désignent l'ensemble des nombres rationnels, réels, complexes.

- (a) Tout entier relatif est la différence de deux entiers naturels.
- (b) La fonction f n'est pas strictement positive sur \mathbb{R} tout entier.
- (c) Le module d'un nombre complexe est un nombre réel.
- (d) Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré vaut deux.
- (e) Les seuls nombres entiers naturels pairs sont 2, 8 et 44.

Exercice 3 Maman dit à Nicolas : « Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat ». Nicolas range sa chambre, mais Maman ne lui donne pas de chocolat. Pourquoi ?