

Lundi 22 septembre 2008

# Homographies

**Corrigé ex. 1** (2) La coordonnée  $z$  de  $M$  est l'affixe complexe de la projection de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}$ , notée  $m$ . Notons  $O$  l'origine de l'espace, on voit que le point  $M' = \sigma(M)$  est sur le plan contenant  $O$ ,  $M$  et  $N$ . En particulier, en tant que point de  $\mathcal{P}$  il appartient à la demi-droite  $[Om)$ , donc son affixe est de la forme  $\lambda z$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle  $ONM'$  on trouve

$$\frac{t}{1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

donc  $\lambda = \frac{1}{1-t}$ . Finalement  $\sigma(z, t) = \frac{z}{1-t}$ .

(3) Notons  $z'$  l'affixe du point  $M' \in \mathcal{P}$ . Les mêmes considérations que précédemment dans le plan  $(OMN)$  montrent que  $M = \sigma^{-1}(M')$  a des coordonnées de la forme  $(\mu z', t)$  pour un certain  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . On a les deux contraintes supplémentaires

- (i)  $\mu^2 |z'|^2 + t^2 = 1$  car  $M \in S^2$ , et
- (ii)  $\frac{\mu z'}{1-t} = z'$  car  $\sigma(M) = M'$ .

De (ii) on tire  $\mu = 1 - t$ . En remplaçant  $t = 1 - \mu$  dans (i) on trouve

$$\mu^2 |z'|^2 + \mu^2 - 2\mu = 0 .$$

Le cas  $\mu = 0$  correspond à  $z' = 0$ , et dans le cas  $\mu \neq 0$  on trouve

$$\mu = \frac{2}{|z'|^2 + 1} \quad \text{et enfin} \quad \sigma^{-1}(z') = \left( \frac{2z'}{|z'|^2 + 1}, \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \right) .$$

Cette dernière expression est valable sans restriction sur  $z'$ , le traitement à part du cas  $\mu = 0$  n'était que temporaire.

(4) Comme  $\sigma$  est une bijection, il est clair qu'on définit une bijection par

$$\begin{aligned} M \in S^2 \setminus \{N\} &\mapsto \sigma(M) \\ M = N &\mapsto \infty . \end{aligned}$$

**Corrigé ex. 2** (1) On voit qu'il y a deux cas à distinguer, selon que  $c = 0$  ou  $c \neq 0$ . Dans le premier cas,  $h$  est une similitude directe, son ensemble de définition est  $\mathbb{C}$  et son image est  $\mathbb{C}$  également.

Si  $c \neq 0$  l'ensemble de définition de  $h$  est  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ . On voit ici que  $h$  induit une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$  d'inverse  $g(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}$ . Donc  $h$  a pour image  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ .

(2) On va garder la lettre  $h$  pour l'extension à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Si  $c = 0$ , c'est-à-dire que  $h$  est une similitude directe, alors c'est une bijection de  $\mathbb{C}$  et il suffit de poser  $h(\infty) = \infty$  pour obtenir une bijection de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  qui fixe  $\infty$ .

Si  $c \neq 0$  on a vu que  $h$  induit une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ . Si on pose  $h(-d/c) = \infty$  et  $h(\infty) = a/c$ , on obtient une bijection de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et l'inverse est  $g(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}$  avec  $g(\infty) = -d/c$  et  $g(a/c) = \infty$ .

(3) On va montrer que  $\mathcal{H}$  est un sous-groupe du groupe des bijections de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . L'identité appartient à  $\mathcal{H}$ , car c'est l'homographie correspondant à  $a = d = 1$  et  $b = c = 0$ . On a déjà vu que l'inverse (pour la composition) d'une homographie est une homographie, et on a donné sa formule. Il reste à voir que la composée de deux homographies  $h, h'$  est une homographie. Or

$$h(h'(z)) = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}.$$

Montrons que  $\mathcal{H}$  est engendré par les similitudes directes et par  $i(z) = 1/z$ . Soit  $h$  une homographie. Si c'est une similitude directe il n'y a rien à démontrer. Sinon, on a  $c \neq 0$  et on écrit

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

On voit donc que  $h$  est composée de  $z \mapsto cz + d$ , puis  $i$ , puis  $z \mapsto \frac{bc-ad}{c}z + \frac{a}{c}$ . C'est bien une composée de similitudes directes et de  $i$ .

(4) L'application  $A \mapsto f(A) = h$  de l'énoncé envoie la matrice identité sur la transformation identité de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . De plus, en comparant l'expression du produit matriciel de deux matrices  $A$  et  $A'$  avec l'expression de la composée des homographies  $h = f(A)$  et  $h' = f(A')$ , on voit que  $f$  est un morphisme de groupes. Par définition des homographies, ce morphisme est surjectif. Calculons son noyau. Soit  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  et  $h = f(A)$  telle que  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$  pour tout  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Alors on a  $az + b = cz^2 + dz$  pour tout  $z$ , et cette égalité de polynômes en  $z$  implique  $c = 0$ ,  $a = d$ ,  $b = 0$ . Ceci signifie que  $A$  est une matrice d'homothétie. Le noyau de  $f$  est le sous-groupe des homothéties.

**Corrigé ex. 3** (1) Une homographie qui possède  $a$  pour 0 et  $c$  comme pôle est de la forme  $h(z) = \lambda \frac{z-a}{z-c}$ . Si on veut de plus  $h(b) = 1$  alors nécessairement  $1 = \lambda \frac{b-a}{b-c}$  donc  $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$ . Finalement l'homographie  $h$ , si elle existe, est uniquement déterminée par  $h(z) = \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}$ , et cette homographie envoie  $a, b, c$  sur  $0, 1, \infty$  comme demandé, donc elle convient.

(2) L'unique homographie  $h$  qui envoie  $0, 1, \infty$  sur  $0, 1, \infty$  est l'identité, donc  $[0, 1, \infty, z] = h(z) = z$ .

(3) L'homographie  $g = hf^{-1}$  envoie  $f(a)$  sur  $h(a) = 0$ ,  $f(b)$  sur  $h(b) = 1$  et  $f(c)$  sur  $h(c) = \infty$ . Donc par définition du birapport, on a  $[f(a), f(b), f(c), z] = g(z)$  pour tout  $z$ , en particulier  $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = (hf^{-1})(f(d)) = h(d) = [a, b, c, d]$ .

(4) On l'a déjà vue dans la première question : l'unique homographie qui envoie  $a, b, c$  sur  $0, 1, \infty$  est  $h(z) = \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}$  donc  $[a, b, c, d] = h(d) = \frac{b-c}{b-a} \frac{d-a}{d-c}$ .

**Corrigé ex. 4** (1) L'homographie  $g = \frac{[a, b, c, d]}{h}$  envoie  $c$  sur 0,  $d$  sur 1 et  $a$  sur  $\infty$  donc  $[c, d, a, b] = g(b) = \frac{[a, b, c, d]}{h(b)} = [a, b, c, d]$  puisque  $h(b) = 1$ .

(2) L'homographie  $g = \frac{1}{[a, b, c, d]} h$  envoie  $a$  sur 0,  $d$  sur 1 et  $c$  sur  $\infty$  donc  $[a, d, c, b] = g(b) = \frac{1}{[a, b, c, d]}$ .

(3) L'homographie  $g = 1 - h$  envoie  $b$  sur 0,  $a$  sur 1 et  $c$  sur  $\infty$  donc  $[b, a, c, d] = g(d) = 1 - h(d) = 1 - [a, b, c, d]$ .

**Corrigé ex. 5** L'hypothèse signifie que pour tout quadruplet  $(a, b, c, d)$  de complexes dont les trois premiers sont distincts, alors  $f(a), f(b), f(c)$  sont distincts et

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d].$$

En particulier, pour tout  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  on doit avoir

$$[f(0), f(1), f(\infty), f(z)] = [0, 1, \infty, z] = z .$$

On sait qu'il existe une unique homographie  $h$  qui envoie 0 sur  $f(0)$ , 1 sur  $f(1)$  et  $\infty$  sur  $f(\infty)$ . Cette homographie préserve le birapport, d'après la question (3) de l'exercice précédent, donc

$$\begin{aligned} z &= [f(0), f(1), f(\infty), f(z)] = [h(0), h(1), h(\infty), f(z)] \\ &= [h(0), h(1), h(\infty), h(h^{-1}(f(z)))] = [0, 1, \infty, h^{-1}(f(z))] = h^{-1}(f(z)) . \end{aligned}$$

En composant par  $h$  on trouve  $h(z) = f(z)$  pour tout  $z$ , donc  $f$  est égale à l'homographie  $h$ .

**Corrigé ex. 6** (1) On sait que les similitudes directes envoient les cercles de  $\mathbb{C}$  sur des cercles, et les droites sur des droites, donc globalement elles envoient les cercles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  sur des cercles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Comme le groupe des homographies est engendré par les similitudes directes et l'homographie  $h(z) = 1/z$ , si cette dernière préserve la famille des cercles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , il en sera de même de toute homographie.

(2) Le calcul direct donne  $(ghg)(z) = h(z)$ . On peut toujours choisir  $\theta$  de telle sorte que  $\mathcal{C}' = g(\mathcal{C})$  soit symétrique par rapport à l'axe réel : si  $\mathcal{C}$  est un cercle passant par l'infini, c'est-à-dire une droite de  $\mathbb{C}$ , on la fait tourner de façon à la rendre orthogonale à l'axe réel, et si  $\mathcal{C}$  est un cercle ne passant pas par l'infini, c'est-à-dire un cercle de  $\mathbb{C}$ , on le fait tourner de façon à mettre son centre sur l'axe réel. Notre calcul initial dit que  $h(\mathcal{C}) = g(h(\mathcal{C}'))$ . Donc si on sait démontrer que  $h(\mathcal{C}')$  est un cercle, alors comme  $g$  est une similitude directe,  $g(h(\mathcal{C}'))$  est aussi un cercle, donc  $h(\mathcal{C})$  est un cercle. Donc il suffit de démontrer le résultat demandé pour  $\mathcal{C}'$ , en d'autres termes on peut supposer que  $\mathcal{C}$  est symétrique par rapport à l'axe réel. De plus, si  $\mathcal{C}$  est un cercle on peut supposer que son centre est sur le demi-axe  $\mathbb{R}^+$  et si c'est une droite on peut supposer qu'elle coupe le demi-axe  $\mathbb{R}^+$ .

(3) On traite les quatre cas successivement.

$\infty \notin \mathcal{C}$  et  $0 \in \mathcal{C}$  ici  $\mathcal{C}$  est un cercle dont on note  $a \in \mathbb{R}^+$  l'affixe du centre et  $r$  le rayon. L'hypothèse  $0 \in \mathcal{C}$  signifie que  $a = r$ . Les points de  $\mathcal{C}$  sont de la forme  $z = r + re^{i\theta}$  et on a

$$h(z) = \frac{1}{r(1 + e^{i\theta})} = \frac{1}{2r \cos(\theta/2)e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2r \cos(\theta/2)} e^{-i\theta/2} = \frac{1}{2r} (1 - i \tan(\theta/2)) .$$

La quantité  $\tan(\theta/2)$  décrit  $\mathbb{R}$ , et les points  $h(z)$  décrivent la droite d'équation  $\operatorname{Re}(z) = 1/2r$ .

$\infty \in \mathcal{C}$  et  $0 \notin \mathcal{C}$  ici  $\mathcal{C}$  est une droite ne passant pas par l'origine, donc d'équation  $\operatorname{Re}(z) = t$  pour un  $t \in \mathbb{R}^+$ . Notons  $\mathcal{C}'$  le cercle de centre  $a = 1/2t$  et de rayon  $a = 1/2t$ . Le cas précédent montre que  $h(\mathcal{C}')$  est la droite d'équation  $\operatorname{Re}(z) = t$ , donc  $h(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ , donc  $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ . (Noter que  $h^2$  est l'identité !)

$\infty \notin \mathcal{C}$  et  $0 \notin \mathcal{C}$  ici  $\mathcal{C}$  est un cercle dont on note  $a \in \mathbb{R}^+$  l'affixe du centre et  $r$  le rayon, avec  $a \neq r$ . On doit préparer le calcul par une petite réflexion. L'image de  $\mathcal{C}$  va être un cercle, et la difficulté principale est de trouver son centre. Pour cela on regarde l'image du diamètre situé sur l'axe réel, qui est le segment  $[a - r; a + r]$ . On a  $h(a - r) = 1/(a - r)$  et  $h(a + r) = 1/(a + r)$ , et le segment  $[h(a - r); h(a + r)]$  a pour milieu :

$$\alpha := \frac{\frac{1}{a-r} + \frac{1}{a+r}}{2} = \frac{a}{a^2 - r^2} .$$

Les points de  $\mathcal{C}$  sont de la forme  $z = a + re^{i\theta}$ . Pour vérifier que  $h(z)$  est sur un cercle de centre  $\alpha$ , on calcule

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z} - \frac{a}{a^2 - r^2} \right| &= \left| \frac{1}{a + re^{i\theta}} - \frac{a}{a^2 - r^2} \right| = \left| \frac{a^{\cancel{z}} - r^2 - a^{\cancel{z}} - are^{i\theta}}{(a + re^{i\theta})(a^2 - r^2)} \right| \\ &= \frac{r}{|a^2 - r^2|} \left| \frac{r + ae^{i\theta}}{a + re^{i\theta}} \right| = \frac{r}{|a^2 - r^2|} \left| e^{i\theta} \frac{a + re^{-i\theta}}{a + re^{i\theta}} \right| = \frac{r}{|a^2 - r^2|} \end{aligned}$$

car  $a + re^{-i\theta}$  et  $a + re^{i\theta}$ , étant complexes conjugués, ont même module. On a démontré que  $h(\mathcal{C})$  est le cercle de centre  $a/(a^2 - r^2)$  et de rayon  $r/|a^2 - r^2|$ .

$\infty \in \mathcal{C}$  et  $0 \in \mathcal{C}$  ici  $\mathcal{C}$  est la réunion de l'axe des imaginaires purs et de  $\{\infty\}$ . Ses éléments s'écrivent  $z = it$  pour  $t \in \mathbb{R}$  (sauf  $\infty$ ). On a  $h(z) = 1/(it) = (-1/t)i$  et  $h(\infty) = 0$ . Ces points décrivent l'axe imaginaire pur donc  $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ .

Dans chacun des quatre cas considérés,  $h(\mathcal{C})$  est un cercle (au sens des cercles de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ).

(4) L'énoncé est un peu imprécis car si deux ou plus des points sont confondus, le birapport n'est pas défini. Mais dans ce cas, les points sont cocycliques (au fait, pourquoi ?), donc on laisse de côté ce cas particulier. L'observation clé est que trois points distincts  $a, b, c$  sont sur un cercle  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  et un seul : s'ils sont alignés,  $\mathcal{C}$  est la droite en question, et sinon,  $\mathcal{C}$  est le cercle circonscrit au triangle  $abc$ . Alors,  $a, b, c, d$  sont cocycliques ou alignés ssi  $d \in \mathcal{C}$ .

Appelons  $h$  l'homographie qui envoie  $a, b, c$  sur  $0, 1, \infty$ , de sorte que  $h(d) = [a, b, c, d]$ . Alors  $d \in \mathcal{C}$  ssi  $h(d) \in h(\mathcal{C})$ . Or  $h(\mathcal{C})$  est un cercle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  d'après les questions précédentes, contenant  $0, 1, \infty$ , donc c'est en fait l'axe réel. On a donc trouvé :

$$a, b, c, d \text{ cocycliques ou alignés ssi } [a, b, c, d] = h(d) \in h(\mathcal{C}) = \mathbb{R}.$$