Mercredi 17 septembre 2008

Un peu d'histoire

D'un point de vue historique, les concepts familiers de nombres réels, nombres complexes, angles, cosinus, sinus, exponentielles, et même le nombre π, sont apparus de manière plus chaotique que ce que l'enseignement de collège et lycée peut laisser croire. Voici un regard très (trop) rapide sur l'histoire de ces notions...

1 Les nombres

Pour simplifier, faisons commencer l'histoire des nombres avec les grecs. Ils connaissaient les entiers et les rationnels et s'arrêtaient là : Pythagore (572-497 av. JC) sait que la diagonale du carré n'est pas un rationnel, et ne la considère donc pas comme un nombre. Il n'y a de « beau » que les nombres, sous-entendu, entiers.

Aristote (384-322 av. JC) confirme ce point de vue en ménageant tout de même une place à la diagonale du carré. Il distingue deux catégories : les *nombres* et les *grandeurs*. Ce qui justifie cette séparation, pour Aristote, est la conception du *discret*, opposé au *continu*. Les longueurs, aires, angles sont à mettre dans la deuxième catégorie et sont donc avant tout des objets géométriques.

Euclide (environ 300 av JC, on n'en sait pas beaucoup plus sur ses dates de naissance et de mort) entérine la distinction d'Aristote. Dans les *Éléments*, il se base sur l'intuition géométrique du monde qui nous entoure pour définir points, droites et tous autres objets géométriques pour lesquels il énonce plein de beaux théorèmes.

2 Les équations polynomiales et le nombre i

L'apparition du symbole $\sqrt{-1}$ est indissociable de la théorie des équations polynomiales. Depuis longtemps (babyloniens) on sait résoudre l'équation du second degré, avant même en fait que la notion d'équation ne soit mise dans une forme qui ressemble à la forme actuelle. Se pose ensuite le problème de la résolution de l'équation de degré 3. Les italiens del Ferro (1465-1526) et Tartaglia (1499-1557) découvrent la solution indépendamment. Cardan (1501-1576) présente ces travaux dans son ouvrage *Ars Magna*. Dans les formules de del Ferro et Tartaglia interviennent des racines carrées, et les formules ne sont acceptées que lorsque les quantités sous la racine sont positives. Vers 1560, Bombelli (1526-1572) observe que si les quantités sous la racine sont négatives, en faisant intervenir un symbole $\sqrt{-1}$ et en poussant le calcul, les formules donnent parfois des solutions réelles de l'équation de degré 3. Il faut noter cependant que l'utilisation de $\sqrt{-1}$ met assez longtemps à être acceptée par les autres mathématiciens, et par ailleurs il faut encore plus de temps pour qu'il soit conçu comme un nombre.

3 Les réels

Jusqu'à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle, pour décrire et mesurer le monde qui nous entoure, les mathématiciens utilisent les nombres réels en recherchant des approximations rationnelles de ces nombres. Les réels n'ont pas été définis (au sens moderne de la définition), mais concevoir les nombres réels comme des « limites de nombres rationnels » en un sens un peu flou, convient bien à tout le monde. Ce n'est que suite aux travaux de Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857) et d'autres, qui essaient de clarifier les notions de continuité et de convergence, que l'on commence à sentir vraiment que la compréhension que l'on a des nombres réels manque de fondations. Au début du 19$^{\text{ème}}$ siècle, Weierstrass (1815-1897) ébranle encore un peu plus la communauté en construisant un exemple de fonction continue dérivable nulle part. Le problème de définir $\mathbb{R}$ correctement est alors bien posé sur la table, et le $19^{\text{ème}}$ siècle verra plusieurs réponses différentes, quoique équivalentes. Dedekind (1831-1916) propose de construire $\mathbb{R}$ par une théorie des *coupures*. Cantor (1845-1918) construit $\mathbb{R}$ en ajoutant aux rationnels les limites de suites de Cauchy ; c'est le procédé de *complétion* qui est celui que l'on enseigne en général aujourd'hui pour construire le corps des réels. Weierstrass donne lui aussi une construction de $\mathbb{R}$.

4 Le calcul différentiel

Des calculs se rattachant à l'intégration ou a la dérivation (tangentes à des courbes, calculs d'aires ou de volumes) sont faits dès le début du $17^{\text{ème}}$ siècle par Kepler (1571-1630), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665).

Par ailleurs, la volonté de calculer des valeurs approchées de quantités trigonométriques mèn à des calculs de développements en série par les indiens Madhava (1340-1425, fonction arctangente) et Nilakantha (1445-1545, sinus, cosinus et arctangente). Ensuite Wallis (1616-1703), Gregory (1638-1675), McLaurin (1698-1746), Taylor (1685-1731) font des calculs de sommes et de produits infinis, de développements en série de diverses fonctions. Mais les inventeurs du calcul différentiel sont reconnus comme étant Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716), qui ont donné un cadre théorique unifié à cette théorie, ont reconnu que les opérations de dérivation et d'intégration étaient inverses l'une de l'autre, et on utilisé leurs résultats pour résoudre des problèmes qui étaient restés sans solution jusqu'alors.

5 Logarithme et exponentielle

Les fonctions logarithmes sont introduites en 1614 par Napier (1550-1617), dont le nom, qui en latin s'écrit Neper, est à l'origine du terme de « logarithme népérien ». Celui-ci souhaitait trouver une méthode pour faciliter certains calculs de valeurs trigonométriques faisant intervenir des formules d'addition, et a observé qu'il existait des fonctions qui transformaient produits en sommes. Napier dresse des tables de valeurs de ces fonctions et les utilise pour mener à bien des calculs explicites. Par ailleurs diverses personnes avaient calculé l'aire délimité par l'axe des abscisses et l'arc d'hyperbole, sans forcément faire le lien avec les fonctions logarithmes de Napier, et il faut attendre 1661 pour que Huygens (1629-1695) fasse le lien.

Les fonctions exponentielles de base $a > 0$ étaient semble-t-il connues de la communauté en général, bien que je ne sache pas dire si on les avait isolées en tant que classe particulière de fonctions. Puis en 1624 Briggs (1561-1630) donne l'approximation du logarithme décimal d'un nombre qu'il n'identifie pas avec précision, mais qui se révèle être e. Briggs a lu les travaux de Napier sur les logarithmes, et les a poursuivis. C'est Euler (1707-1783) qui donne le développement en série de l'exponentielle, introduit en 1731 la notation avec la lettre e et surtout est le premier à faire intervenir les fonctions trigonométriques et exponentielles comme solutions d'équations différentielles. On lui doit aussi la formule $e^{i\pi} + 1 = 0$.

6 Trigonométrie

Les premiers calculs trigonométriques semblent apparaître dans les travaux d'Hipparque (180-120 av. JC) qui évalue la longueur de cordes d'arcs de cercle, ce qui revient à considérer le sinus de l'angle au centre. Ensuite Ménélaüs (70-130), motivé par l'astronomie, s'intéresse à la trigonométrie sphérique. Au fil de l'histoire des fonctions trigo, nous avons mentionné aussi les calculs de Madhava et Nilakantha sur les développements en série, aux alentours du $15^{\text{ème}}$ siècle. La formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ qui fait le lien entre les fonctions trigonométriques et l'exponentielle est établie par Cotes (1682-1716) en 1714, qui l'énonce sous la forme $\ln(\cos x + i\sin x) = ix$. Enfin, comme on l'a déjà dit, Euler fait intervenir les fonctions trigo et exponentielles comme solution de certaines équations différentielles.