Lundi 3 novembre 2008

Groupes monogènes, groupes symétriques

Groupes monogènes et cycliques

Exercice 1 On dit qu'un groupe est *monogène* s'il peut être engendré par un seul élément.
(1) Montrer qu'un groupe monogène est isomorphe, soit à $\mathbb{Z}$, soit à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier $n \geq 1$.
(2) Montrez que le groupe $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ n'est pas monogène.

Exercice 2 (1) Montrez que l'ordre de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $n/\operatorname{pgcd}(k, n)$.
(2) Calculez l'ordre de (k, ℓ) dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $1 \leq k \leq n$ premiers avec n (la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est appelée *fonction indicatrice d'Euler*).
(1) Montrer que pour tout entier relatif non nul $a \in \mathbb{Z}$, premier avec n, on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (n)$.
(2) Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'on a $a^p \equiv a \ (p)$.

Exercice 4 (1) Montrer que le groupe additif $\mathbb{Q}$ n'est pas monogène.
(2) En déduire que le groupe additif $\mathbb{R}$ n'est pas monogène.
(3) Montrer que $\mathbb{Q}$ est engendré par l'ensemble $\{\frac{1}{n!}\}_{n \geq 1}$.
(4) Montrer que tout sous-groupe monogène non nul de $\mathbb{Q}$ est infini.
(5) Montrer que tout sous-groupe de type fini, non nul, de $\mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Montrez que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, on a un isomorphisme $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Est-ce vrai lorsque m et n ne sont pas premiers entre eux ?

Groupes symétriques

Exercice 6 (1) Soit σ un r-cycle dans le groupe symétrique S_n, $n \geq 2$. Pour quelles valeurs de k entier, $1 \leq k \leq r - 1$, la permutation σ^k est-elle un cycle ?
(2) On note $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r)$. Étant donné $\tau \in S_n$, montrez que $\tau\sigma\tau^{-1}$ est le cycle

$$(\tau(i_1)\tau(i_2)\dots\tau(i_r)) \ .$$

(3) Soit $\sigma_1 = (12\dots n)$ la *permutation circulaire* et $\tau_1 = (12)$. Pour k entier, calculez σ_1^k puis $\sigma_1^k \tau_1 \sigma_1^{-k}$. En déduire que les permutations σ_1 et τ_1 engendrent S_n.

Exercice 7 Calculez la décomposition en cycles à supports disjoints et la signature des permutations suivantes :
(1) La multiplication par 3 dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$;
(2) La multiplication par 2 dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$;
(3) La multiplication par 5 dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$;