 Emmanuel Ferrand, Laurent Koelblen, Matthieu Romagny

Lundi 6 octobre 2008

Groupes - généralités

Exercice 1 Montrez que le groupe des éléments inversibles de l'anneau $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

Exercice 2 Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrez que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique en n lettres $\mathfrak{S}_n$. Décrivez explicitement l'injection du groupe $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dans $\mathfrak{S}_8$.

Exercice 3 (1) Décrivez les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrez que l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x^k = 1$ pour tout $x \in G$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrez qu'il existe un plus petit entier $a > 0$ dans cet ensemble et que $a|n$. On appelle cet entier l'*exposant* de G.

Exercice 4 Montrez que tout groupe d'exposant 2 est abélien.

Exercice 5 Soit G un groupe. Quels sont les sous-groupes de G qui sont le noyau d'un morphisme $f : G \to H$?

Exercice 6 Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments. Montrez que tout groupe abélien G d'exposant p possède une structure naturelle de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel (et réciproquement). Montrez que si $\dim_{\mathbb{F}_p}(G) = n < \infty$ alors $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 7 Montrez que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ engendré par les éléments

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est fini. Donnez son ordre et sa table de multiplication (ou *table de Cayley*). On notera $k = ij$.