Lundi 1er décembre 2008

Anneaux et corps

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps k. Soit u un endomorphisme de E et $x \in E$ un vecteur. On considère enfin l'anneau $k[X]$ des polynômes à coefficients dans k, et on définit les applications

$$\begin{array}{ll} f : k[X] \to L(E) & \text{telle que } f(P) = P(u) \ , \\ g : k[X] \to E & \text{telle que } g(P) = (P(u))(x) \ . \end{array}$$

Décrivez le noyau et l'image de ses applications en les reliant aux concepts d'algèbre linéaire que vous connaissez. Comparez $\ker(f)$ et $\ker(g)$.

Exercice 2 Soit k un corps et $P \in k[X]$ un polynôme irréductible. Soit l'anneau $A = k[X]/(P)$. Montrez que A est un corps qui contient k, et que P possède une racine dans A.

Exercice 3 Les ensembles suivants sont-ils des anneaux pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles ?
(1) $\left\{ \frac{p}{q} \, , \, q \in \{1, 2, 4\} \right\}$.
(2) $\left\{ \frac{p}{q} \, , \, q \in \{2^n, \, n \in \mathbb{N}\} \right\}$.
(3) $\mathbb{Z}[i] \stackrel{\text{déf}}{=} \{a + bi \, , \, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
(4) $\mathbb{Z} + \sqrt{5}\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (1) Montrez qu'il existe un morphisme de groupes non nul de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, mais qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux unitaires de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
(2) Montrez que tout morphisme d'anneaux entre deux corps est injectif.
(3) Montrez que tout corps possède un plus petit sous-corps. On appelle ce sous-corps le *corps premier.*

Exercice 5 (1) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires et $I \lhd A$, $J \lhd B$ deux idéaux. Montrez que l'image $f(I)$ n'est pas un idéal de B en général, mais l'est si f est surjectif. Montrez que la préimage $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.
(2) Soit A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. Montrez que l'application qui à un idéal $J \supset I$ associe l'idéal J/I de A/I établit une bijection entre l'ensemble des idéaux de A contenant I et l'ensemble des idéaux de A/I.

Exercice 6 (1) Soit p un nombre premier et k un entier tel que $1 \leq k \leq p - 1$. Montrez que p divise le coefficient binômial $\binom{p}{k}$.
(2) Soit p un nombre premier et A un anneau commutatif unitaire dans lequel $p = 0$ (on dit que A est de caractéristique p). Montrez que l'application $F : A \to A$ définie par $F(x) = x^p$ est un morphisme d'anneaux unitaires. On l'appelle l'*endomorphisme de Frobenius* de A.