Lundi 10 novembre 2008
Actions de groupes

Exercice 1 On considère un groupe G agissant sur un ensemble X.
(1) Soit $x \in X$, G_x son stabilisateur et $\mathcal{O}(x)$ son orbite. Montrez qu'il existe une bijection $G/G_x \to \mathcal{O}(x)$. Déduisez-en que si G est fini, le cardinal de G/G_x est le même pour les points x d'une même orbite.
(2) Si x et y sont dans la même orbite, montrez que G_x et G_y sont conjugués. Retrouvez ainsi le résultat de la question précédente.
(3) On suppose que G et X sont finis et on note X^G l'ensemble des points de X fixes sous G, c'est-à-dire les x tels que $gx = x$ pour tout $g \in G$. On suppose aussi que $|G|$ est une puissance d'un nombre premier p (on dit que G est un *p-groupe*). En considérant la partition de X en orbites, montrez que $|X|$ est congru à $|X^G|$ modulo p.

Exercice 2 Dans cet exercice, on utilise le résultat de l'exercice précédent pour démontrer le *lemme de Cauchy* : si G est un groupe fini d'ordre divisible par un nombre premier p, alors il existe dans G un élément d'ordre p. Les données de G et p sont fixées dans tout l'exercice.
(1) Soit le groupe $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dont on fixe un générateur σ. On considère l'ensemble

$$X = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p \ , \ x_1 \ldots x_p = 1\} \ .$$

Montrez qu'on peut définir une action de H sur X en posant $\sigma(x_1, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$.
(2) Décrivez l'ensemble des points fixes X^H et, en utilisant le résultat de l'exercice précédent, déduisez-en le lemme de Cauchy.
(3) Le lemme de Cauchy reste-t-il vrai si p n'est pas premier ?

Exercice 3 Soit G un groupe de centre Z. Montrez que si G/Z est cyclique, alors G est abélien.

Exercice 4 Soit G un groupe fini, que l'on fait agir sur lui-même par conjugaison.
(1) Décrivez, pour cette action, tous les objets en jeu dans la bijection $G/G_x \to \mathcal{O}(x)$ (pour $x \in G$), ainsi que l'ensemble de points fixes G^G.
(2) Écrivez l'égalité entre cardinaux qui découle de la partition de G en orbites, en des termes ne faisant intervenir que G et ses sous-groupes.
(3) On suppose que G est un *p-groupe*, c'est-à-dire que son ordre est une puissance de p. En utilisant le résultat de l'exercice 1, démontrez que le centre de G n'est pas réduit à $\{1\}$.
(4) Donnez toutes les classes d'isomorphisme de groupes d'ordre p^2. Pour cela, vous considèrerez le quotient de G par son centre.

Exercice 5 On cherche à calculer, à isomorphisme près, le groupe des déplacements de l'espace (isométries positives) qui laissent invariant un cube. On notera G ce groupe, S l'ensemble des sommets du cube, et D l'ensemble de ses *grandes diagonales*, c'est-à-dire les diagonales de longueur $\sqrt{3}$ fois la longueur du côté.
(1) Justifiez que G agit sur S et sur D.
(2) En considérant des rotations d'axe passant par les centres de deux faces opposées, montrez que G agit transitivement sur S. Décrivez le stabilisateur d'un sommet pour cette action, et, à l'aide de la formule $|G|/|G_x| = |\mathcal{O}(x)|$, déduisez-en l'ordre de G.
(3) Montrez que l'action de G sur D est *fidèle*, c'est-à-dire que le morphisme $G \to S_D$ correspondant est injectif. Déduisez-en la classe d'isomorphisme de G.