 Emmanuel Ferrand, Laurent Koelblen, Matthieu Romagny

## Lundi 1$^{er}$ décembre 2008

# Devoir à la maison, à rendre pour le 15 décembre

**Exercice 1** Soit $k$ un corps, $n \geq 1$ un entier, et $X = M_n(k)$ l'anneau des matrices carrées à coefficients dans $k$. Soit le groupe $G = GL_n(k) \times GL_n(k)$, produit du groupe linéaire avec lui-même. Pour tout $g = (P, Q) \in G$ et tout $M \in X$, on pose

$$g.M \stackrel{\text{déf}}{=} PMQ^{-1} \ .$$

Montrez que ceci définit une action de $G$ sur $X$ et décrivez l'ensemble des orbites $X/G$.

**Exercice 2** *Normalisateur d'un sous-groupe.*
Soit $G$ un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. On pose

$$N_G(H) \stackrel{\text{déf}}{=} \{g \in G;\ gHg^{-1} = H\}$$

et on l'appelle le *normalisateur* de $H$ dans $G$.
(1) Montrez que $N_G(H)$ est un sous-groupe de $G$ qui contient $H$.
(2) Montrez que c'est le plus grand des sous-groupes $K \subset G$ tels que $H \lhd K$.
(3) Calculez $N_G(H)$ lorsque $G = A_4$ et $H = \langle (12) \rangle$ ; puis lorsque $G = S_4$ et $H = \langle (12) \rangle$.

**Exercice 3** *Un peu plus de détails sur la conjugaison.*
Soit $G$ un groupe et $g \in G$. On note $c_g : G \to G$ l'application définie par $c_g(x) = gxg^{-1}$.
(1) Montrez que $c_g$ est un automorphisme de groupes.
(2) On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de $G$, qui est lui-même un groupe pour la composition. Montrez que l'application $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$, qui à $g$ associe $c_g$, est un morphisme de groupes.
(3) Calculez le noyau de $c$.
(4) On note $\mathrm{Int}(G)$ l'image de $c$. Ses éléments, les automorphismes de la forme $c_g$, sont appelés les *automorphismes intérieurs*. Montrez que $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.
(5) Donnez un exemple de groupe $G$ tel que $c$ n'est pas surjectif, c'est-à-dire $\mathrm{Int}(G) \neq \mathrm{Aut}(G)$.
(6)$^{**}$ On peut montrer que pour tout $n \neq 6$, on a $\mathrm{Int}(S_n) = \mathrm{Aut}(S_n)$. Montrez-le pour $n = 3$.

**Exercice 4** Soit $G$ un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2.
(1) Montrez qu'il existe $a \in G$ tel que $G = H \amalg aH$.
(2) Montrez que $a \in N_G(H)$, c'est-à-dire $aHa^{-1} = H$.
(3) Déduisez-en que $H \lhd G$.
(4) Application : montrez que $A_n$ est l'unique sous-groupe de $S_n$ d'indice 2.