Lundi 21 septembre 2009
Similitudes

Corrigé ex. 1 (1) Si $f(z) = az + b$, alors pour tous nombres complexes z, z' on a

$$|f(z) - f(z')| = |az - az'| = |a|\,|z - z'|$$

donc f multiplie les distances par $k := |a|$. Si $f(z) = a\overline{z} + b$ on trouve la même conclusion.
(2) Si f vérifie $|f(z) - f(z')| = k|z - z'|$ pour tous z, z' alors il est clair que

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{f(z_3) - f(z_4)}\right| = \frac{k|z_1 - z_2|}{k|z_3 - z_4|} = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right|$$

donc f préserve les rapports de distances.

(3) a) Posons $u = f(0)$ et $v = f(1)$, alors la transformation $g(z) = (v - u)z + u$ convient.

b) On commence par observer que par choix de g, l'application h fixe les points 0 et 1. Comme f (par hypothèse) et g et g^{-1} (par les questions 1 et 2) préservent les rapports de distances, la quantité $|z_1 - z_2|/|z_3 - z_4|$ est envoyée par f sur une quantité égale, puis par g^{-1} sur une quantité encore égale. Il s'ensuit que h préserve les rapports de distances :

$$(\star) \qquad \left|\frac{h(z_1) - h(z_2)}{h(z_3) - h(z_4)}\right| = \frac{k|z_1 - z_2|}{k|z_3 - z_4|} = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right| \quad .$$

En faisant $z_1 = z$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = 1$ on trouve $|h(z)| = |z|$, c'est-à-dire que h préserve le module. En faisant $z_2 = z_3 = 1$ et $z_4 = 0$ on trouve $|h(z) - 1| = |z - 1|$. En élevant au carré, il vient $(h(z) - 1)(\overline{h(z)} - 1) = (z - 1)(\overline{z} - 1)$ ce qui donne $Re(h(z)) = Re(z)$, c'est-à-dire que h préserve la partie réelle.

c) De la question précédente, il résulte que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a ($h(z) = z$ ou $h(z) = \overline{z}$). Prenez garde au fait que ceci n'est pas la même chose que de dire :

$$\text{(pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ on a } h(z) = z) \text{ ou (pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ on a } h(z) = \overline{z}) \text{ !}$$

Supposons que $h(i) = i$. Alors, par injectivité on a $h(-i) = -i$. En faisant $z_2 = i$, $z_3 = 1$, $z_4 = 0$ dans $(\star)$, on trouve $|h(z) - i| = |z - i|$. En élevant ceci au carré, il vient $(h(z) - i)(\overline{h(z)} + i) = (z - i)(\overline{z} + i)$ ce qui donne $Im(h(z)) = Im(z)$. Dans ce cas, on a donc $h(z) = z$ pour tout z. Supposons maintenant que $h(i) = -i$ donc par injectivité $h(-i) = i$. Alors en faisant $z_2 = -i$, $z_3 = 1$, $z_4 = 0$ on trouve $|h(z) + i| = |z - i|$. En élevant ceci au carré, il vient $(h(z) + i)(\overline{h(z)} - i) = (z - i)(\overline{z} + i)$ ce qui donne $Im(h(z)) = -Im(z)$. Dans ce cas, on a donc $h(z) = \overline{z}$ pour tout z.

d) Pour conclure, on revient à $f = g \circ h$. On a vu que les seules possibilités pour h sont l'identité, auquel cas $f(z) = az + b$, et la conjugaison complexe, auquel cas $f(z) = a\overline{z} + b$.

Corrigé ex. 2 (1) Il est facile de voir qu'une telle transformation est injective et même bijective, en donnant explicitement sa bijection inverse $F(z) = a^{-1}(z-b)$, resp. $F(z) = \overline{a}^{-1}(\overline{z}-\overline{b})$. Par ailleurs, rappelons que l'angle orienté $(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ est égal à l'argument de $(t-r)/(s-r)$ où r, s, t sont les affixes de R, S, T. Si $f(z) = az + b$ pour tout z, on calcule

$$\frac{f(t)-f(r)}{f(s)-f(r)} = \frac{at-ar}{as-ar} = \frac{t-r}{s-r}\ .$$

L'égalité des arguments montre que f préserve les angles orientés. On montre facilement que $f(z) = a\overline{z} + b$ les renverse.

(2) a) Comme f (par hypothèse) et g (par la question précédente) préservent les angles orientés, il en va de même de h. Ceci donne l'égalité d'arguments demandée dans l'énoncé.

b) En appliquant l'égalité de la question précédente avec $z' = 0$ et $z'' = 1$, on trouve que $Arg(h(z)) = Arg(z)$, c'est-à-dire que h préserve les arguments. Ainsi $h(z)$ et z sont proportionnels par un rapport $c(z)$ réel strictement positif.

c) Écrivons maintenant $h(z) = cz$ où $c = c(z)$. En faisant $z' = 1$ et $z'' = 0$, on trouve $Arg(cz-1) = Arg(z-1)$. Ceci peut encore s'écrire $\frac{cz-1}{|cz-1|} = \frac{z-1}{|z|-1}$. En élevant au carré et en simplifiant, on trouve l'égalité $Im(z)(1-c) = 0$. Ainsi, si $Im(z) \neq 0$ on trouve $c = 1$. Ceci signifie que $h(z) = z$.

d) Compte tenu du résultat de la question précédente, en faisant $z' = i$ et $z'' = 1+i$, on trouve $Arg(cz-i) = Arg(z-i)$ ou encore $\frac{cz-i}{|cz-i|} = \frac{z-i}{|z|-i}$. En élevant au carré et en simplifiant, on trouve l'égalité $Re(z)(1-c) = 0$. Si $Re(z) \neq 0$ on trouve alors $c = 1$, donc $h(z) = z$. Finalement, que l'on ait $Im(z) \neq 0$ ou $Re(z) \neq 0$ ou $z = 0$, on a toujours $h(z) = z$. Ainsi h est l'identité donc $f = g \circ h = g$ est une transformation de la forme $g(z) = az + b$.

Corrigé ex. 4 Soit M un point qui est centre d'une similitude directe f envoyant C_1 sur C_2. Le rapport k de cette similitude doit être égal au rapport R_2/R_1 des rayons des cercles. Par ailleurs f fixe M et envoie O_1 sur O_2, donc envoie le segment $[MO_1]$ sur le segment $[MO_2]$. On doit donc avoir $MO_2/MO_1 = k = R_2/R_1$. Réciproquement, si $MO_2/MO_1 = R_2/R_1$, prenons pour origine du plan le point M et notons les affixes par des petites lettres. Alors la similitude $f(z) = (o_2/o_1)z$ fixe l'origine M, envoie O_1 sur O_2 et est de rapport $MO_2/MO_1 = R_2/R_1$ donc elle envoie C_1 sur C_2. Donc M est centre d'une similitude directe envoyant C_1 sur C_2.

Il ne reste plus qu'à décrire l'ensemble des points M tels que $MO_2/MO_1 = k$ où $k = R_2/R_1$. C'est un problème de ligne de niveau assez classique. Cette égalité est équivalente à $(MO_2)^2 - k^2(MO_1)^2 = 0$, ou encore à $(\overrightarrow{MO_2} + k\overrightarrow{MO_1}).(\overrightarrow{MO_2} - k\overrightarrow{MO_1}) = 0$, et on trouve la ligne de niveau en introduisant le barycentre I des points pondérés (O_1, k) et $(O_2, 1)$, et J barycentre des points pondérés $(O_1, -k)$ et $(O_2, 1)$.

Ces barycentres existent dès que la somme des poids est non nulle. On voit donc qu'il faut traiter à part le cas $k = 1$ car alors J n'est pas défini ; dans ce cas, l'ensemble des points M tels que $MO_2/MO_1 = 1$ est la médiatrice de $[O_1O_2]$. Lorsque $k \neq 1$, les points I et J sont définis par les égalités :

$$\overrightarrow{IO_2} + k\overrightarrow{IO_1} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{JO_2} - k\overrightarrow{JO_1} = \overrightarrow{0}\ .$$

On peut alors écrire

$$\overrightarrow{MO_2} + k\overrightarrow{MO_1} = (\overrightarrow{MO_2} + k\overrightarrow{MO_1}) - (\overrightarrow{IO_2} + k\overrightarrow{IO_1}) = (k+1)\overrightarrow{MI}$$

et de même
$$\overrightarrow{MO_2} - k\overrightarrow{MO_1} = (-k+1)\overrightarrow{MJ} \ .$$
Finalement, l'égalité $(MO_2)^2 - k^2(MO_1)^2 = 0$ se ramène à $(1-k^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$. L'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$, c'est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Corrigé ex. 5 (1) La solution la plus rapide est de vérifier directement que le point d'affixe $a+b+c$ est sur les trois hauteurs (deux suffisent). Or, un point M d'affixe z est sur la hauteur issue de A ssi (MA) est perpendiculaire à (BC), c'est-à-dire ssi $(z-a)(\overline{b}-\overline{c})$ est imaginaire pur. Pour $z = a+b+c$ on doit donc montrer que le nombre suivant est imaginaire pur :
$$(b+c)(\overline{b}-\overline{c}) = b\overline{b} + c\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{c} \ .$$
Comme l'origine du plan est fixée au centre du cercle circonscrit, on a $OA = OB = OC$ et en particulier $b\overline{b} = c\overline{c}$. Finalement notre nombre est $z = c\overline{b} - b\overline{c}$ qui est clairement imaginaire pur puisqu'il vérifie $\overline{z} = -z$. Des calculs tout à fait symétriques, obtenus par permutation des rôles de a, b, c, montrent que le point d'affixe $a+b+c$ est aussi sur les autres hauteurs, c'est donc l'orthocentre.

(2) Dans le même repère que précédemment, le centre du cercle circonscrit a pour abscisse O et le centre de gravité a pour abscisse $\frac{1}{3}(a+b+c)$. Donc, les trois points sont alignés.

Corrigé ex. 6 Soient z_1, z_1', z_2, z_2' les affixes des points. Soit $f(z) = az+b$ la similitude directe recherchée. On doit résoudre $az_1 + b = z_1'$ et $az_2 + b = z_2'$, on trouve immédiatement $a = (z_1' - z_2')/(z_1 - z_2)$ et $b = z_1' - az_1 = z_1' - (z_1' - z_2')/(z_1 - z_2)z_1$. Le calcul est identique pour une similitude indirecte.

Corrigé ex. 7 (1) La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est la transformation f qui à un point M associe l'unique point $M' = f(M)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$. En termes d'affixes, si l'affixe du vecteur $\overrightarrow{v}$ est noté a, on a $f(z) = z + a$.
(2) La rotation de centre Ω et d'angle θ associe à un point M l'unique point $M' = f(M)$ tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \ (2\pi)$. En termes d'affixes, si l'affixe de Ω est ω, on a $f(z) = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$. Ceci se voit facilement si l'on observe que $f = t \circ r \circ t^{-1}$, où $t(z) = z+\omega$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ et $r(z) = e^{i\theta}z$ représente la rotation d'angle θ centrée en O. (On se translate en l'origine O, puis on tourne, puis on se retranslate en Ω.)
(3) L'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ associe à un point M l'unique point $M' = f(M)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. En termes d'affixes, on a $f(z) = \lambda(z-\omega)+\omega$.
(4) La réflexion d'axe une droite Δ associe à un point M l'unique point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur Δ. Pour trouver l'expression en termes d'affixes, on note qu'on peut faire tourner l'axe Δ et le translater pour le faire coïncider avec l'axe des réels. (Pour cela on utilise une transformation $r(z) = e^{i\theta}z + a$ dont l'inverse est $r^{-1}(z) = e^{-i\theta}(z-a)$.) La réflexion par rapport à l'axe réel est la conjugaison complexe $c(z) = \overline{z}$. Donc $f = r^{-1} \circ c \circ r$, ce qui donne
$$f(z) = e^{-i\theta}(\overline{e^{i\theta}z + a} - a) = e^{-2i\theta}\overline{z} + e^{-i\theta}(\overline{a} - a) = e^{-2i\theta}\overline{z} - 2ite^{-i\theta}$$
où t est la partie imaginaire de a. Quitte à changer t en $-t$ et θ en $-\theta$, la forme générale d'une réflexion est donc $g(z) = e^{2i\theta}\overline{z} + 2ite^{i\theta}$.

Corrigé ex. 8 On aura besoin de l'identité classique $1 + j + j^2 = 0$. Notons aussi que $e^{i\pi/3} = -j^2$ comme on le voit sur le cercle trigonométrique.

On commence par (1) $\iff$ (2). Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$, son expression en complexes est $r(z) = e^{i\pi/3}(z-a)+a = -j^2(z-a)+a$. Alors ABC est un triangle équilatéral direct ssi $r(B) = C$, ssi $-j^2(b-a)+a = c$, ssi $aj + bj^2 + c = 0$. Ceci veut dire que j^2 est racine du polynôme $az^2 + bz + c$. De même on montre que ABC est un triangle équilatéral indirect ssi j est racine de ce polynôme.

(2) $\iff$ (3) : j ou j^2 est racine de az^2+bz+c si et seulement si $(aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c) = 0$. En développant :

$$a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ac)j + (ac + ab + bc)j^2 = 0$$

et comme $1 + j + j^2 = 0$ on trouve bien $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

(3) $\iff$ (4) : pour chasser les dénominateurs dans l'expression de (4), on a l'idée de multiplier par $(a-b)(b-c)(c-a)$ qui est non nul par hypothèse. On trouve :

$$(a-b)(b-c)(c-a)\left[\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right] = (b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c)\ .$$

Après simplification ceci vaut $-a^2 - b^2 - c^2 + ac + bc + ab$. Alors l'équivalence de (3) et (4) est claire.