Lundi 21 septembre 2009

Similitudes

On identifie le plan réel euclidien à $\mathbb{C}$. Tout point M repéré par ses coordonnées (a, b) peut être représenté par son affixe $z = a + ib$. Ainsi, une application f du plan dans lui-même peut être décrite comme une fonction de variable complexe $z \mapsto f(z)$.

On va démontrer ci-dessous que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f multiplie les distances par un nombre réel $k > 0$,
(2) f préserve les rapports de distances,
(3) f préserve les angles non orientés (i.e. préserve les angles orientés ou les inverse),
(4) f a une expression complexe de la forme $f(z) = az + b$ ou $f(z) = a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Une application qui vérifie ces propriétés est appelée une *similitude*.

Exercice 1 (1) Montrez qu'une transformation du plan de la forme $f(z) = az + b$ ou $f(z) = a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, multiplie les distances par un réel $k > 0$.

(2) Montrez qu'une transformation qui multiplie les distances par un réel $k > 0$ est injective et préserve les rapports de distances.

(3) Nous allons voir en quatre étapes a) à d) ci-dessous qu'une transformation qui est injective et préserve les rapports de distances est de la forme $az + b$ ou $a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On se donne donc une transformation f injective préservant les rapports de distances.

a) Montrez qu'il existe une transformation $g(z) = az + b$ qui envoie 0 sur $f(0)$ et 1 sur $f(1)$.

On pose $h = g^{-1} \circ f$.

b) Montrez que h préserve les rapports de distances, le module et la partie réelle.

c) Montrez que si $h(i) = i$ alors h est l'identité, et que si $h(i) = -i$ alors h est la conjugaison.

d) Concluez.

Exercice 2 (1) Montrez qu'une transformation du plan de la forme $f(z) = az + b$ (resp. $f(z) = a\overline{z} + b$) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, est injective et préserve les angles orientés (resp. renverse les angles orientés).

(2) Nous allons voir en quatre étapes a) à d) ci-dessous qu'une transformation du plan qui est injective et préserve les angles orientés est de la forme $az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. (On pourrait montrer de même qu'une transformation du plan qui est injective et renverse les angles orientés est de la forme $a\overline{z} + b$.)

On se donne donc une transformation f injective préservant les angles orientés.

a) On considère une transformation de la forme $g(z) = az + b$ qui envoie 0 sur $f(0)$ et 1 sur $f(1)$, et on pose $h = g^{-1} \circ f$. Montrez que pour tous nombres complexes distincts z, z', z'' on a

$$Arg\left(\frac{h(z) - h(z')}{h(z'') - h(z')}\right) = Arg\left(\frac{z - z'}{z'' - z'}\right) .$$

b) Montrez qu'il existe une fonction $c : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $h(z) = c(z)z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

c) En faisant $z' = 1$ et $z'' = 0$, montrez que si $Im(z) \neq 0$ on a $h(z) = z$.

d) En faisant $z' = i$ et $z'' = 1 + i$, montrez que si $Re(z) \neq 0$ on a $h(z) = z$. Concluez.

Exercice 3 Soient C_1 et C_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 distincts. Déterminer l'ensemble des points du plan qui sont centre d'une similitude directe envoyant C_1 sur C_2.

Exercice 4 On considère un triangle ABC du plan euclidien.

(1) Si on identifie le plan euclidient au plan complexe avec pour origine du plan le centre du cercle circonscrit à ABC, montrez que l'affixe de son orthocentre est $h = a + b + c$.

(2) Démontrez que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit de ABC sont alignés sur la *droite d'Euler*.

Exercice 5 Soient M_1, M_2 deux nombres complexes distincts et M_1', M_2' deux autres nombres complexes distincts. Montrez qu'il existe une unique similitude directe qui envoie M_1 sur M_1' et M_2 sur M_2'. Montrez qu'il existe une unique similitude indirecte possédant cette propriété.

Exercice 6 Soit E un plan euclidien que l'on identifie, par le choix d'une base orthonormée, au plan complexe $\mathbb{C}$. Pour chacune des familles de transformations suivantes, donnez sa définition géométrique, puis son expression en fonction de l'affixe z du point.

(1) les translations,
(2) les rotations,
(3) les homothéties,
(4) les réflexions (symétries par rapport à une droite).

Exercice 7 Soient a, b, c trois nombres complexes distincts. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) a, b, c sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral,
(2) $j = e^{2i\pi/3}$ ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c$,
(3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$,
(4) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

(*La difficulté principale est l'équivalence de (1) et (2). Démontrez que ABC est un triangle équilatéral direct (resp. indirect) ssi j^2 (resp. j) est racine de $az^2 + bz + c$.*)