Vendredi 25 septembre 2009
Homographies

Corrigé ex. 1 (1) On voit qu'il y a deux cas à distinguer, selon que $c = 0$ ou $c \neq 0$. Dans le premier cas, h est une similitude directe, son ensemble de définition est $\mathbb{C}$ et son image est $\mathbb{C}$ également.

Si $c \neq 0$ l'ensemble de définition de h est $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. On voit ici que h induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ d'inverse $g(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}$. Donc h a pour image $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.
(2) On va garder la lettre h pour l'extension à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si $c = 0$, c'est-à-dire que h est une similitude directe, alors c'est une bijection de $\mathbb{C}$ et il suffit de poser $h(\infty) = \infty$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui fixe ∞.

Si $c \neq 0$ on a vu que h induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Si on pose $h(-d/c) = \infty$ et $h(\infty) = a/c$, on obtient une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et l'inverse est $g(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}$ avec $g(\infty) = -d/c$ et $g(a/c) = \infty$.

Comme il est beaucoup plus agréable de travailler avec des bijections, on considère en général une homographie comme application de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, plutôt que comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

(3) On va montrer que h est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, pour la loi de composition des applications. L'identité appartient à $\mathcal{H}$, car c'est l'homographie correspondant à $a = d = 1$ et $b = c = 0$. On a déja vu que l'inverse (pour la composition) d'une homographie est une homographie, et on a donné sa formule. Il reste à voir que la composée de deux homographies h, h' est une homographie. Or

$$h(h'(z)) = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} .$$

Montrons que $\mathcal{H}$ est engendré par les similitudes directes et par $i(z) = 1/z$. Soit h une homographie. Si c'est une similitude directe il n'y a rien à démontrer. Sinon, on a $c \neq 0$ et on écrit

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d} .$$

On voit donc que h est composée de $z \mapsto cz + d$, puis i, puis $z \mapsto \frac{bc-ad}{c}z + \frac{a}{c}$. C'est bien une composée de similitudes directes et de i.
(4) L'application $f : A \mapsto h_A$ de l'énoncé envoie la matrice identité sur la transformation identité de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. De plus, en comparant l'expression du produit matriciel de deux matrices A et A' avec l'expression de la composée des homographies $h = f(A)$ et $h' = f(A')$, on voit que f est un morphisme de groupes. Par définition des homographies, ce morphisme est surjectif. Calculons son noyau. Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $h = f(A)$ telle que $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$ pour tout $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors on a $az + b = cz^2 + dz$ pour tout z, et cette égalité de polynômes en z implique $c = 0$, $a = d$, $b = 0$. Ceci signifie que A est une matrice d'homothétie. Le noyau de f est le sous-groupe des homothéties.

Corrigé ex. 2 (1) L'homographie identité $h(z) = z$ possède le plan complexe tout entier de points fixes. Passons à une homographie non identique $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si $c = 0$, l'homographie est une similitude directe que l'on préfère écrire $h(z) = az + b$. le point ∞ est fixe, et il y a un autre point fixe si et seulement si l'équation $az + b = z$ a une solution, ce qui se produit lorsque $a \neq 1$ (noter que si $a = 1$ alors $b \neq 0$ puisqu'on a écarté l'homographie identique). En résumé, si $a \neq 1$ alors h a deux points fixes (similitude directe à centre), et si $a = 1$ alors h n'a qu'un point fixe (translation).

Si $c \neq 0$, le point ∞ n'est pas fixe. Le ou les point(s) fixe(s) sont déterminés par l'équation $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $az + b = cz^2 + dz$. On trouve $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$. Si $\Delta \neq 0$ il y a deux points fixes, et si $\Delta = 0$ il y a un point fixe.

En conclusion, mise à part l'identité, une homographie possède un ou deux points fixes.

(2) h fixe ∞ ssi $a/c = \infty$ ssi $c = 0$. Le groupe $\mathcal{H}_\infty$ est le sous-groupe des homographies de la forme $h(z) = az + b$, c'est-à-dire des similitudes directes.

(3) h fixe 0 et ∞ ssi $h(z) = az+b$ et $b = 0$. Le groupe $\mathcal{H}_{0,\infty}$ est le sous-groupe des homographies de la forme $h(z) = az$, c'est-à-dire des homothéties de centre 0.

(4) Les points fixes de $h(z) = \frac{-1}{z+2}$ vérifient $-1 = z^2 + 2z$. Il n'y a que le point $z = -1$. Choisissons une homographie γ qui envoie -1 sur ∞, par exemple $\gamma(z) = \frac{1}{z+1}$. Alors γ^{-1} envoie ∞ sur -1, puis h l'envoie sur lui-même (point fixe), puis γ l'envoie sur ∞. Donc $\gamma \circ h \circ \gamma^{-1}$ fixe ∞, donc est dans $\mathcal{H}_\infty$.

Il est facile de voir que h et $\gamma h \gamma^{-1}$ ont nécessairement le même nombre de points fixes. En fait, si l'on note $Fix(h)$ l'ensemble des points fixes de h dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors γ envoie $Fix(h)$ dans $Fix(\gamma h \gamma^{-1})$ puisque si $h(x) = x$ alors $(\gamma h \gamma^{-1})(\gamma(x)) = (\gamma h)(x) = \gamma(x)$. Qui plus est, la restriction de γ à $Fix(h)$ réalise une bijection de $Fix(h)$ dans $Fix(\gamma h \gamma^{-1})$, puisque γ^{-1}, à son tour, envoie $Fix(\gamma h \gamma^{-1})$ dans $Fix(h)$. Par conséquent, pour toute homographie γ, l'homographie $\gamma h \gamma^{-1}$ possède un unique point fixe, donc elle ne peut être dans $\mathcal{H}_{0,\infty}$.

(5) Les points fixes de $h(z) = \frac{z+5}{z+1}$ vérifient $z + 5 = z^2 + z$ donc $z^2 = 5$. Ce sont les points $z_1 = \sqrt{5}$ et $z_2 = -\sqrt{5}$. On voit que quel que soit le choix de γ, l'homographie $\gamma h \gamma^{-1}$ aura deux points fixes, et on peut ainsi espérer avoir $\gamma h \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{0,\infty}$. Choisissons une homographie γ qui envoie $\sqrt{5}$ sur ∞ et $-\sqrt{5}$ sur 0, par exemple $\gamma(z) = \frac{z+\sqrt{5}}{z-\sqrt{5}}$. Il est alors clair que $\gamma h \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{0,\infty}$.