DM – Corrigé

Ce corrigé est parfois succinct et ne prétend pas être un modèle de rédaction.

J'insère parfois des remarques en italique (*comme ceci*) pour commenter l'esprit de la question, ou donner des remarques que je pense utiles.

1 Résultats techniques préliminaires

0,25 pt 1) Le groupe $\mu_n(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, un isomorphisme $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n(\mathbb{C})$ étant donné par $f(\overline{k}) = \exp(2ik\pi/n)$. L'ensemble des racines primitives $\mu_n^*(\mathbb{C})$ est en bijection 0,25 pt avec l'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui est le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, de cardinal $\varphi(n)$ où φ est l'indicateur d'Euler.

La question étant rédigée ainsi : « Rappelez... », de grands développements n'étaient certainement pas attendus ! Mais certains ont peut-être voulu en profiter pour rédiger la réponse entièrement, faisant ainsi une sorte de révision du cours, et pourquoi pas.

2) Le polynôme caractéristique est défini par $P(X) = \det(X\,\mathrm{id} - A)$. On peut le calculer directement à partir de cette expression, mais on peut aussi observer que de manière générale, pour une matrice de taille (n, n), le coefficient de X^{n-1} dans P est $-\mathrm{tr}(A)$ et le coefficient constant 0,5 pt est $(-1)^n \det(A)$. Ainsi, dans le cas $n = 2$ on a :

$$P(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)\ .$$

0,5 pt Le discriminant de P est $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = \delta^2$. Les racines sont donc $\lambda^+ = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A) + \delta)$ et $\lambda^- = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A) - \delta)$.

Attention : contrairement à ce qu'il se passe avec les nombres réels positifs, il n'existe pas de fonction continue qui associe à un complexe z une racine carrée de z. Ce point est un fait essentiel en mathématiques, qui a des causes et des conséquences profondes ; ce n'est pas une simple « coquetterie ». C'est pour cela qu'on n'utilise jamais de symbole tel que $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, et on dit à la place « une racine carrée de z ». Pour les mêmes raisons, on ne parle pas de fonction « racine n-ième» et on n'écrit pas $z^{1/n}$.

1 pt 3) On a $\zeta_A = \lambda^+/\lambda^- = \frac{\mathrm{tr}(A)+\delta}{\mathrm{tr}(A)-\delta}$ donc $\zeta_A + \zeta_A^{-1} = \frac{\mathrm{tr}(A)+\delta}{\mathrm{tr}(A)-\delta} + \frac{\mathrm{tr}(A)-\delta}{\mathrm{tr}(A)+\delta}$ puis

$$\zeta_A + \zeta_A^{-1} + 2 = \frac{(\mathrm{tr}(A)+\delta)^2 + (\mathrm{tr}(A)-\delta)^2}{\mathrm{tr}(A)^2 - \delta^2} + 2 = \frac{2\,\mathrm{tr}(A)^2 + 2\delta^2}{\mathrm{tr}(A)^2 - \delta^2} + 2 = \frac{4\,\mathrm{tr}(A)^2}{4\det(A)} = \frac{\mathrm{tr}(A)^2}{\det(A)}\ .$$

4) Comme une matrice dont les valeurs propres sont toutes distinctes est diagonalisable, si A n'est pas diagonalisable, elle n'a qu'une valeur propre λ. Comme A est inversible, on a $\lambda \neq 0$. Le théorème de trigonalisation nous dit qu'il existe une matrice (de passage) P telle que $P^{-1}AP$ 1 pt est de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & u\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$, et $u \neq 0$ car sinon A serait diagonalisable. Une observation essentielle est que comme $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, il est équivalent de dire que

- A^n est diagonalisable ou que $(P^{-1}AP)^n$ l'est, et que
- A^n est une homothétie ou que $(P^{-1}AP)^n$ l'est.

Or, on calcule alors facilement par récurrence :

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & nu\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

1 pt Comme $nu\lambda^{n-1} \neq 0$ pour tout $n > 0$, on voit que $(P^{-1}AP)^n$ n'est jamais une homothétie, donc A^n non plus.

N'oubliez pas ce point essentiel (cours, que vous reverrez en algèbre linéaire) : quand on trigonalise une matrice complexe, sur la diagonale on lit les valeurs propres de la matrice.

2 Une caractérisation des homographies d'ordre fini

1) Si h est d'ordre fini $n > 1$, on a $h^n = \mathrm{id}$ donc la matrice A^n, dont l'homographie image est h^n,
0,5 pt est dans le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$. Dit autrement, c'est une homothétie. Or, d'après la question 4) de la partie précédente, si A n'est pas diagonalisable, A^n n'est une homothétie pour aucun n. Par contraposée, ceci montre que A est diagonalisable.

Par suite, il existe une matrice P telle que $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{smallmatrix}\right)$ où λ^+ et λ^- sont les valeurs
0,5 pt propres de A, non nulles puisque A est inversible. Posons $\lambda := 1/\lambda^-$ et $\zeta := \lambda^+/\lambda^-$. On obtient $P^{-1}AP = \lambda\left(\begin{smallmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. De plus, comme A^n est une homothétie, et donc aussi $P^{-1}A^nP$, on doit avoir $\zeta^n = 1$.

Il nous reste à montrer que ζ est un générateur de $\mu_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que n est exactement
0,5 pt l'ordre de ζ. Or, si ζ est d'ordre $k < n$, la matrice A^k (ou, c'est équivalent, la matrice $P^{-1}AP$) est une homothétie, et on a alors $h^k = \mathrm{id}$. Ceci est impossible, car h est d'ordre n.

2) Si h est d'ordre fini $n > 1$, et si A est une matrice telle que $h = h_A$, d'après la question précédente il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $\zeta \in \mu_n(\mathbb{C})^*$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{smallmatrix}\right)$. En prenant les
1 pt homographies images, on obtient $h_P^{-1} h_A h_P = f$ où $f(z) = \zeta z$. Ceci montre que (a) implique (b). Réciproquement, si h est conjuguée à f définie par $f(z) = \zeta z$ avec $\zeta \in \mu_n(\mathbb{C})^*$, alors il est clair que h est d'ordre n.

3) Si h est d'ordre fini $n > 1$ et si $h = h_A$, d'après la question 1) la matrice A est diagonalisable et le rapport de ses valeurs propres $\zeta = \lambda^+/\lambda^-$ est une racine primitive n-ième de l'unité. D'après
1 pt la question 1.3), on a de plus $\zeta + \zeta^{-1} + 2 = \frac{\mathrm{tr}(A)^2}{\det(A)}$ donc $(\zeta + \zeta^{-1} + 2)\det(A) = \mathrm{tr}(A)^2$. Ceci montre que (a) implique (c).

0,5 pt 4) On a vu que, d'après 1.3), le rapport $\zeta_A = \lambda^+/\lambda^-$ vérifie $\zeta_A + \zeta_A^{-1} + 2 = \frac{\mathrm{tr}(A)^2}{\det(A)}$. S'il existe $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{C})$ tel que $(\zeta + \zeta^{-1} + 2)\det(A) - \mathrm{tr}(A)^2 = 0$, alors $\zeta_A + \zeta_A^{-1} = \zeta + \zeta^{-1}$.

Ceci veut dire que ζ_A est solution de l'équation $x + x^{-1} = \zeta + \zeta^{-1}$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}^*$. Or il est clair que ζ_A et ζ_A^{-1} sont solutions de cette équation ; par ailleurs, cette équation est
1 pt équivalente à $x^2 + 1 = (\zeta + \zeta^{-1})x$, équation du second degré en x qui possède au plus deux solutions. L'ensemble des solutions est donc $\{\zeta_A, \zeta_A^{-1}\}$ et ζ doit être l'une de ces solutions, comme demandé.

5) D'après la question précédente, s'il existe $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{C})$ tel que $(\zeta + \zeta^{-1} + 2)\det(A) - \mathrm{tr}(A)^2 = 0$,
1 pt alors le rapport $\zeta_A = \lambda^+/\lambda^-$ est égal à une racine primitive n-ième de l'unité ζ. En particulier, $\lambda^+ \neq \lambda^-$ et donc la matrice A est diagonalisable, semblable à $\lambda^-\left(\begin{smallmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Il s'ensuit que h est conjuguée à l'homographie f telle que $f(z) = \zeta z$, et elle est donc d'ordre n.

6) On utilise la partie (c) du théorème.

0,25 pt - ordre 2 : la seule racine primitive 2-ième de l'unité est -1, donc h est d'ordre 2 ssi $\mathrm{tr}(A)^2 = 0$.

- ordre 3 : les racines primitives 3-ièmes de l'unité sont $j := \exp(2i\pi/3)$ et $j^2 = \exp(4i\pi/3)$.

0,25 pt Dans les deux cas $\zeta = j$ et $\zeta = j^2$, on a $\zeta + \zeta^{-1} = -1$ de sorte que h est d'ordre 3 ssi

$\mathrm{tr}(A)^2 = \det(A)$.

- ordre 4 : les racines primitives 3-ièmes de l'unité sont i et $-i$. Dans les deux cas $\zeta = i$ et
0,25 pt $\zeta = -i$, on a $\zeta + \zeta^{-1} = 0$ donc h est d'ordre 4 ssi $\mathrm{tr}(A)^2 = 2\det(A)$.

- ordre 6 : les racines primitives 6-ièmes de l'unité sont $\omega = \exp(i\pi/3)$ et $\overline{\omega} = \exp(-i\pi/3)$.
0,25 pt Dans les deux cas $\zeta = \omega$ et $\zeta = \overline{\omega}$, on a $\zeta + \zeta^{-1} = 1$ de sorte que h est d'ordre 6 ssi $\mathrm{tr}(A)^2 = 3\det(A)$.

3 Un groupe symétrique dans $\mathcal{H}$

Cette partie était plus difficile car plus conceptuelle, mais il y avait tout de même un certain nombre de questions faciles pour vous aider à surmonter ces difficultés. La question la plus difficile était la dernière.

0,5 pt 1) Dessin...

0,5 pt 2) $t = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ implique que $\sqrt{3} - 1 = \frac{1}{t}$ donc $\sqrt{3} = \frac{1+t}{t}$. En élevant au carré on trouve $3t^2 = (1+t)^2 = 1 + t^2 + 2t$ puis $2t^2 - 2t - 1 = 0$. On trouve $t^2 = t + \frac{1}{2}$.

Vérifions maintenant deux cases du tableau. D'abord vérifions que $f(u) = -\overline{u}$. On a $f(t\omega) =$
0,5 pt $it\omega = it(1+i) = t(i-1) = -t\overline{\omega}$ et $f((1-t)\omega) = i(1-t)\omega = i(1-t)(1+i) = (1-t)(i-1) = -(1-t)\overline{\omega}$. Ainsi, on a en effet $f(u) = -\overline{u}$.

Vérifions enfin que $g(u) = \overline{u}$: nous allons voir que $g(t\omega) = t\overline{\omega}$ et $g((1-t)\omega) = (1-t)\overline{\omega}$. Pour
0,5 pt cela, on n'oublie pas que $\omega = 1 + i$, donc $\omega\overline{\omega} = 2$ et $\omega + \overline{\omega} = 2$. Alors,

$$g(t\omega) = t\overline{\omega} \iff \frac{t\omega+1}{t\omega-1} = t\overline{\omega} \iff t\omega+1 = t\overline{\omega}(t\omega-1) = 2t^2 - t\overline{\omega} \iff t(\omega+\overline{\omega}) = 2t^2 - 1 = 2t$$

puisque $2t^2 - 1 = 2t$ par la question 2). Comme $\omega + \overline{\omega} = 2$, ceci est bien vrai. De même,

$$g((1-t)\omega) = (1-t)\overline{\omega} \iff \frac{(1-t)\omega+1}{(1-t)\omega-1} = (1-t)\overline{\omega}$$

3) Notons Bip l'ensemble des bipoints de la droite projective complexe. D'après le tableau, les homographies f et g stabilisent l'ensemble X, ce qui veut dire (rappelons-le) que $f(X) \subset X$ et $g(X) \subset X$. Comme f et g sont des bijections, leurs restrictions à X sont injectives et comme
1,5 pt X est fini elles sont en fait bijectives de X dans lui-même (ceci est du cours, mais je redonne les détails !). Maintenant, on peut restreindre à G l'application $\rho : \mathcal{H} \to S_{Bip}$ qui décrit l'action de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble des bipoints, pour obtenir un morphisme $\rho' : G \hookrightarrow \mathcal{H} \to S_{Bip}$. Comme f et g induisent des bijections de X, ce morphisme ρ' induit un morphisme $\varphi : G \to S_X$ qui envoie f sur la restriction $f_{|X}$ et g sur la restriction $g_{|X}$.

4) En transcrivant les données du tableau avec la numérotation $1, 2, 3, 4$ pour $u, \overline{u}, -u, -\overline{u}$, on
1 pt trouve que f correspond à la permutation $(1, 4, 3, 2)$ et g à la permutation $(1, 2)$.

On peut les écrire aussi $(2, 1, 4, 3)$ et $(2, 1)$ et on voit alors que, quitte à renuméroter, ces deux
0,5 pt permutations sont conjuguée simutanément (c'est-à-dire par une même permutation γ pour les deux) à $(1, 2, 3, 4)$ et $(1, 2)$ donc elles engendrent S_4, par un résultat de cours. Il s'ensuit que le morphisme φ est surjectif.

5) Soit $h \in \ker(\varphi)$, nous voulons montrer que $h = \mathrm{id}$. Pour son action sur l'ensemble X de bipoints, h fixe u, $\overline{u}$, $-u$ et $-\overline{u}$. Ceci veut dire que les ensembles correspondants à ces bipoints sont stables : on a $h(\{t\omega, (1-t)\omega\}) = \{t\omega, (1-t)\omega\}$, et des égalités analogues pour les trois
1 pt autres bipoints. Ceci veut dire que l'on a :

- soit $h(t\omega) = t\omega$ et $h((1-t)\omega) = (1-t)\omega$, i.e. *$h$ fixe* les deux points du bipoint,

- soit $h(t\omega) = (1-t)\omega$ et $h((1-t)\omega) = t\omega$, i.e. h *permute* (non trivialement) les deux points du bipoint.

Dans tous les cas, h^2 fixe les deux points : ceci vient juste du fait que comme le groupe $S_{\{t\omega,(1-t)\omega\}}$ des permutations du bipoint est d'ordre 2, tout élément de ce groupe est de carré égal à l'identité. En conséquence, h^2 fixe les points $t\omega, (1-t)\omega$ ainsi que (par un raisonnement analogue) leurs opposés, conjugués, et opposés des conjugués, soient au total 8 points. Comme une homographie qui fixe 3 points est l'identité, on obtient $h^2 = \mathrm{id}$. (Rappelons qu'on a vu en exercice qu'il existe une *unique* homographie qui envoie trois points distincts donnés M, N, P sur trois autres points distincts donnés M', N', P'. Si l'on applique ceci avec $M = M'$, $N = N'$, $P = P'$, on trouve que seule l'identité fixe ces trois points.)

1 pt

Ainsi, d'après la caractérisation des homographies de carré 1 dans la question 6) de la partie précédente, on peut écrire h sous la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz-a}$. Nous utiliserons cela plus tard.

Continuant sur l'idée précédente, si parmi les 4 bipoints il y en a au moins deux qui sont *fixés* par h, alors h possède 4 points fixes et donc $h = \mathrm{id}$, ce qui répond à la question. On suppose pour la suite que h fixe au plus un bipoint pour arriver à une contradiction.

On peut, pour fixer les idées, supposer que les trois bipoints permutés (et non fixés) sont les trois premiers $u, \overline{u}, -u$. En effet, si h fixe un bipoint b (rappelons qu'il ne peut y en avoir qu'un), on peut choisir une homographie j telle que $j(b) = -\overline{u}$ (puisque G agit transitivement sur X, ce que l'on sait car S_4 agit transitivement sur $\{1, \ldots, 4\}$!). Alors, le conjugué $h' = jhj^{-1}$ fixe le bipoint $-\overline{u}$ et permute (non trivialement) les autres $u, \overline{u}, -u$. Comme $h' = \mathrm{id}$ si et seulement si $h = \mathrm{id}$, on peut continuer le raisonnement avec h' au lieu de h.

2 pts

On suppose donc cette modification faite, de sorte que les trois premiers bipoints $u, \overline{u}, -u$ sont permutés non trivialement par h. On a donc :

$$\begin{cases} h(t\omega) = (1-t)\omega \\ h((1-t)\omega) = t\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} h(t\overline{\omega}) = (1-t)\overline{\omega} \\ h((1-t)\overline{\omega}) = t\overline{\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} h(-t\omega) = -(1-t)\omega \\ h(-(1-t)\omega) = -t\omega. \end{cases}$$

On utilise maintenant l'écriture $h(z) = \frac{az+b}{cz-a}$, et (seulement) trois des relations ci-dessus :

(A) $h(t\omega) = (1-t)\omega$ donne $b = -ic - a\omega$

(B) $h(t\overline{\omega}) = (1-t)\overline{\omega}$ donne $b = ic - a\overline{\omega}$,

(C) $h(-t\omega) = -(1-t)\omega$ donne $b = -ic + a\omega$.

Avec (A) et (C) on trouve $a = 0$, puis avec (A) et (B) on trouve $b = c = 0$, ce qui est impossible. On a terminé la preuve du fait que φ est injectif, et G est isomorphe à $S_X \simeq S_4$.