DM à rendre pour le lundi 30 novembre

L'objectif de ce devoir est d'étudier quelques sous-groupes finis du groupe des homographies.

$\therefore$

On désigne par $\mu_n(\mathbb{C})$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité, et par $\mu_n^*(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mu_n(\mathbb{C})$ des racines *primitives* de l'unité, c'est-à-dire celles qui engendrent $\mu_n(\mathbb{C})$.

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de taille $(2,2)$ à coefficients complexes. Pour une telle matrice A, on note $\mathrm{tr}(A)$ la trace, $\det(A)$ le déterminant, et h_A l'application de la droite projective complexe dans elle-même définie par $h_A(z) = \frac{az+b}{cz+b}$. Une telle application $h = h_A$ est appelée une *homographie* ; l'ensemble des homographies est un groupe pour la composition, noté $\mathcal{H}$. Si $h \in \mathcal{H}$, les coefficients d'une matrice A telle que $h = h_A$ ne sont déterminés qu'à multiplication simultanée par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}^*$ près. L'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$ qui envoie A sur h_A induit un morphisme de groupes surjectif, dont le noyau est le sous-groupe des matrices d'homothétie.

1 Résultats techniques préliminaires

Dans cette partie, on établit des résultats techniques utiles pour la partie suivante.

1) Rappelez à quel groupe familier est isomorphe $\mu_n(\mathbb{C})$, et indiquez le cardinal de $\mu_n^*(\mathbb{C})$.

2) Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et δ une racine carrée de $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$. Calculez les valeurs propres λ^+ et λ^- de A en fonction de δ.

3) On pose $\zeta_A = \lambda^+/\lambda^-$. Montrez que $\zeta_A + \zeta_A^{-1} + 2 = \frac{\mathrm{tr}(A)^2}{\det(A)}$.

4) Soit A une matrice non diagonalisable dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Montrez qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $u \in \mathbb{C}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & u \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. En déduire par récurrence que A^n n'est jamais une homothétie, pour $n > 1$.

2 Une caractérisation des homographies d'ordre fini

Dans cette partie, on souhaite établir le résultat suivant :

Théorème *Soit h une homographie complexe, et A une matrice inversible telle que $h = h_A$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *h est d'ordre fini $n > 1$.*

(b) *h est conjuguée dans $\mathcal{H}$ à l'homographie f définie par $f(z) = \zeta z$, pour un $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{C})$.*

(c) *Il existe $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{C})$ tel que $(\zeta + \zeta^{-1} + 2)\det(A) - \mathrm{tr}(A)^2 = 0$.*

On conserve les données du théorème : $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $h = h_A$.

1) On suppose que h est d'ordre fini $n > 1$. Montrez que A est diagonalisable puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que λA est conjugée à une matrice $\left(\begin{smallmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{C})$.

2) Montrez que (a) est équivalent à (b).

3) Montrez que (a) implique (c).

4) On suppose qu'il existe $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{C})$ tel que $(\zeta+\zeta^{-1}+2)\det(A)-\mathrm{tr}(A)^2 = 0$. On note $\zeta_A = \lambda^+/\lambda^-$, où λ^+ et λ^- sont les valeurs propres de A. Montrez que $\zeta_A + \zeta_A^{-1} = \zeta + \zeta^{-1}$. Déduisez-en que $\zeta_A = \zeta$ ou $\zeta_A = \zeta^{-1}$.

5) Montrez que (c) implique (a).

6) Illustration : montrez que h est d'ordre 2 (respectivement : 3, 4, 6) si et seulement si $\mathrm{tr}(A)^2 = 0$ (respectivement : si et seulement si $\mathrm{tr}(A)^2 = \det(A)$, $\mathrm{tr}(A)^2 = 2\det(A)$, $\mathrm{tr}(A)^2 = 3\det(A)$).

3 Un groupe symétrique dans $\mathcal{H}$

Dans cette partie, on montre que $\mathcal{H}$ contient un sous-groupe isomorphe au groupe symétrique S_4.

On appelle *bipoint* un ensemble $u = \{z_1, z_2\}$ de deux points de la droite projective complexe. Le groupe $\mathcal{H}$ agit naturellement sur l'ensemble des bipoints de la droite projective complexe, par la formule $h(\{z_1, z_2\}) = \{h(z_1, h(z_2)\}$. Un exemple de bipoint est $u := \{t\omega, (1-t)\omega\}$, où $t = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ et $\omega = 1 + i$. On définit trois autres bipoints :

$$\overline{u} = \{t\overline{\omega}, (1-t)\overline{\omega}\} \quad , \quad -u = \{-t\omega, -(1-t)\omega\} \quad , \quad -\overline{u} = \{-t\overline{\omega}, -(1-t)\overline{\omega}\} \ ,$$

et on s'intéresse à l'ensemble à 4 éléments $X = \{u, \overline{u}, -u, -\overline{u}\}$. On note f et g les homographies définies par $f(z) = iz$ et $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$, et G le sous-groupe de $\mathcal{H}$ qu'elles engendrent. Le calcul montre qu'on a le tableau suivant :

Bipoint	Image par f	Image par g
u	$-\overline{u}$	$\overline{u}$
$\overline{u}$	u	u
$-u$	$\overline{u}$	$-u$
$-\overline{u}$	$-u$	$-\overline{u}$

1) Faites un dessin des éléments de X.

2) Montrez que $t^2 = t + \frac{1}{2}$, puis vérifiez deux cases (au choix) du tableau.

3) Déduisez du tableau qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : G \to S_X$, où $G = \langle f, g \rangle$.

4) Si on numérote $1, 2, 3, 4$ les bipoints $u, \overline{u}, -u, -\overline{u}$, quelles sont les permutations de X associées à f et g ? Déduisez-en que φ est surjectif.

5)* Montrez que φ est injectif (on commencera par montrer que si $h \in \ker(\varphi)$, alors $h^2 = \mathrm{id}$).