 Matthieu Romagny

Vendredi 13 novembre 2009
Groupes III
Sous-groupes distingués et quotients

Exercice 1 Soit $G = A_4$ le sous-groupe alterné de S_4, noyau de la signature.

(1) Dressez la liste des éléments de G.

(2) Dressez la liste des sous-groupes de G. Lesquels sont distingués ?

(3) Trouvez des sous-groupes $H \lhd G$ et $K \lhd H$ tels que K n'est pas distingué dans G.

(4) Donnez le centre Z de G et identifiez le groupe G/Z.

(5) Soient d, n deux entiers naturels tels que d divise n. Donnez un exemple d'un groupe fini d'ordre n sans sous-groupe d'ordre d.

Exercice 2 On considère le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrez que G est fini en faisant la liste de tous ses éléments. On notera $k = ij$.

(2) Donnez sa table de multiplication (ou *table de Cayley*), qui est le tableau à deux entrées qui donne la valeur du produit gh dans la ligne g et la colonne h.

(3) Donnez le centre Z de G et identifiez le groupe G/Z (par exemple en donnant sa table de multiplication). Déduisez-en que pour tout $x \in G$, on a $x^2 \in Z$.

(4) Faire la liste des sous-groupes de G. Lesquels sont distingués ?

Exercice 3 Soit G un groupe, H un sous-groupe. Montrez qu'il existe un plus petit sous-groupe distingué de G contenant H (on l'appelle le *sous-groupe distingué engendré par H*).

Exercice 4 Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué et $\pi : G \to G/H$ le morphisme quotient. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-groupes de G contenant H, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-groupes de G/H. On définit deux applications :

$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ envoie un sous-groupe $K \subset G$ contenant H sur son image $A = \pi(K)$,
$\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ envoie un sous-groupe $A \subset G/H$ sur sa préimage $K = \pi^{-1}(A)$.

(1) Montrez que φ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

(2) Utilisez ce résultat pour retrouver les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients réels. Indiquez si les sous-groupes suivants sont distingués, et lorsqu'ils le sont, identifiez le groupe G/H à isomorphisme près : $SL_n(\mathbb{R})$; $O_n(\mathbb{R})$; le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 6 Soit k un corps et E l'espace vectoriel k^n, de dimension n sur k, muni de sa base canonique $e_1, \ldots, e_n$. À toute permutation $\sigma \in S_n$, on associe l'endomorphisme linéaire f_σ de E qui est défini par son action sur les vecteurs de base par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

(1) Décrivez la matrice M_σ de f_σ.

(2) Montrez que $\det(f_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

(3) Montrez que l'application qui à σ associe M_σ est un morphisme de groupes injectif de S_n dans $GL_n(k)$.

(4) Déduisez-en une autre manière de définir le morphisme de signature. Cette nouvelle manière n'est-elle pas un peu « de la triche » ?