Lundi 2 novembre 2009
Groupes II
Groupes symétriques

Exercice 1 (1) Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, on considère un r-cycle $\tau = (i_1 i_2 \dots i_r)$ et une permutation quelconque σ. Montrez que

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\tau(i_1)\tau(i_2)\dots\tau(i_r)) \ .$$

Déduisez-en la forme de $\sigma\tau\sigma^{-1}$ pour une permutation τ générale.
(2) On appelle *type* d'une permutation σ la liste $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ des longueurs des cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints. Dans cette liste, l'entier r est le nombre de cycles, qui est aussi le nombre d'orbites non ponctuelles de σ. Montrez que deux permutations τ et τ' ont même type si et seulement si elles sont conjuguées.
(3) Soient σ, τ deux permutations. Montrez que $\tau\sigma$ et $\sigma\tau$ ont même type.

Exercice 2 (1) Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, on considère $\sigma = (12\dots n)$ et $\tau = (12)$. Pour k entier, calculez σ^k puis $\sigma^k\tau\sigma^{-k}$.
(2) Déduisez-en que les permutations σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3 Calculez la décomposition en cycles à supports disjoints et la signature des permutations suivantes :
(1) la multiplication par 3 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;
(2) la multiplication par 6 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;
(3) la multiplication par 3 dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

Exercice 4 Montrez qu'il existe un morphisme injectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{A}_{n+2}$.

Exercice 5 Étant donnés un groupe G et un élément $g \in G$, on définit :
- la *classe de conjugaison* de g : c'est l'ensemble de ses conjugués hgh^{-1} dans G,
- le *centralisateur* de g : c'est l'ensemble $C(g) = \{h \in G\,,\, hg = gh\}$.

(1) Décrivez les classes de conjugaison et les stabilisateurs dans un groupe abélien.
(2) Décrivez les classes de conjugaison et les stabilisateurs dans un groupe diédral $\mathbb{D}_n$.
(3) Montrez que la classe de conjugaison de $\sigma = (12\dots n)$ dans $\mathfrak{S}_n$ possède $(n-1)!$ éléments, et comptez le nombre d'éléments de son centralisateur.

Exercice 6 Soit σ une permutation et $\sigma = \tau_1 \dots \tau_r$ sa décomposition en cycles à supports disjoints. Calculez l'ordre de σ en fonction des longueurs des cycles τ_i.