Lundi 30 novembre 2009
Corps

Exercice 1 Soit $f : K \to K$ un automorphisme d'un corps K. On note k_0 le sous-corps premier de K. Montrez que la restriction de f à k_0 est l'identité.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme du corps des réels.

(1) Montrez que f est croissante.
(*Indication : on utilisera le fait que les nombres réels positifs ou nuls sont les carrés.*)

(2) Montrez que f est l'identité.
(*Indication : on utilisera le fait que* $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.)

Soit K le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\sqrt{2}$.

(3) Décrivez K explicitement.

(4) Montrez qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $i : \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \to K$.

(5) Faites la liste des automorphismes $g : K \to K$.
(*Indication : quelles sont les valeurs possibles pour* $g(\sqrt{2})$ *?*)

Exercice 3 On note $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ la suite des nombres premiers. Pour tout polynôme $A \in \mathbb{Z}[X]$, on note a_i ses coefficients, de sorte que $A(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_rX^r$ où $r = \deg(A)$. Montrez que l'application suivante est bien définie et est un isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}^* \\ & (\epsilon, A) & \mapsto & \epsilon p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} \ . \end{array}$$

Exercice 4 Soit A un anneau intègre. On définit le *corps des fractions* de A de la manière suivante. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires (a, b) avec $a \in A$, $b \in A \setminus \{0\}$ et on le munit des opérations $+$ et $\times$:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd) \qquad \text{et} \qquad (a, b) \times (c, d) = (ac, bd) \ .$$

On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'équivalence suivante :

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \text{ssi} \quad ab' = a'b \ .$$

On note K l'ensemble des classes d'équivalence. Le plus souvent, on note $\frac{a}{b}$ ou a/b la classe d'équivalence de (a, b).

(1) Écrivez la liste précise de ce qu'il faut vérifier pour montrer que les données ci-dessus permettent de munir K d'une structure de corps. On *ne fera pas* les vérifications en séance.

(2) Montrez qu'il y a un morphisme injectif d'anneaux $i : A \hookrightarrow K$.

(3) Soit A un anneau intègre. Identifiez le corps de fractions de l'anneau de polynômes $A[X]$.

(4) Identifiez le corps de fractions de $\mathbb{Z}[i]$.