Vendredi 4 septembre 2008
Nombres complexes

Exercice 1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$.

Exercice 2 On s'intéresse à la résolution de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c et l'inconnue z complexes. On se concentre sur la difficulté principale, qui est de calculer les racines carrées du discriminant $\Delta \in \mathbb{C}$. On écarte le cas $\Delta = 0$.
(1) (en polaires) On écrit $\Delta = \rho e^{i\theta}$. Résolvez l'équation $\delta^2 = \Delta$ d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$ écrite sous la forme $\delta = \sigma e^{i\varphi}$.
(2) (en cartésiennes) On écrit $\Delta = f + ig$. Soit $\delta = x + iy$ l'inconnue. Démontrez que

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{f^2 + g^2} \\ x^2 - y^2 = f \\ xy \text{ et } g \text{ sont de même signe.} \end{cases}$$

Expliquez comment on peut en déduire le calcul pratique des solutions de l'équation $\delta^2 = \Delta$.
(3) Résolvez l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 + (1 - 2i)z - 7i = 0$.

Exercice 3 (1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez que $Re(z) \leq |z|$ et décrivez le cas d'égalité.
(2) Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$, et démontrez-la :
- soit par récurrence sur n,
- soit directement. Pour cela introduisez $\theta := \mathrm{Arg}(z_1 + \cdots + z_n)$, traduisez la condition sur les z_k en termes des $y_k := e^{-i\theta} z_k$, et utilisez (1).

Exercice 4 Soient $a \leq b$ deux réels et $f : [a; b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une fonction continue. Montrez que $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ ssi l'argument de $f(t)$ est constant. Pour la preuve, on pourra s'inspirer de l'exercice précédent (introduire l'argument θ de $\int_a^b f(t)\,dt$ puis $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$).

Exercice 5 Soit $n \geq 0$ un entier et θ un réel. Calculez $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 6 Soit E un plan euclidien que l'on identifie, par le choix d'une base orthonormée, au plan complexe $\mathbb{C}$. Soient M_1 et M_2 des points d'affixes z_1 et z_2. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) les vecteurs $\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ sont orthogonaux,
(ii) $z_1 \overline{z}_2 \in i\mathbb{R}$,
(iii) $\frac{1}{2}(z_1 \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1) = 0$.