Lundi 7 septembre 2009
Le corps des nombres complexes

1 Construction du corps $\mathbb{C}$

Théorème 1.1 *Il existe un unique corps qui contient $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et possède un élément i tel que $i^2 = -1$. Il est appelé le corps des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.*

Dans cet énoncé, l'unicité signifie que deux corps vérifiant les propriétés indiquées sont isomorphes (en tant que corps et en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels). Rappelons qu'un *corps* est un ensemble muni de deux opérations, appelées l'addition et la multiplication, vérifiant un certain nombre de propriétés familières, et satisfaisant la propriété important que tout élément non nul est inversible. Nous reviendrons sur la notion de corps plus tard dans l'année, c'est pourquoi nous n'en dirons pas plus pour l'instant.

On peut observer que puisque $i^2 = -1$ alors i n'est pas dans le sous-corps $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, de sorte que nécessairement $\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dans la construction qui suit, dous admettons les rudiments de l'algèbre linéaire. La vérification des détails est parfois laissée au lecteur, et il est recommandé de la faire à titre d'exercice.

Démonstration : Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ dont les éléments sont des vecteurs $z = (a, b)$. Munissons-le d'une application $E \times E \to E$ en posant, pour $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$:

$$zz' = (aa' - bb', ab' + a'b) \ .$$

On appelle cette application la *multiplication* de E. Le sous-ensemble de E des éléments de la forme $z = (a, 0)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel stable pour cette multiplication. On l'identifie avec $\mathbb{R}$ et on note donc a au lieu de $(a, 0)$. Si l'on pose $i := (0, 1)$, on arrive à la notation

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi \ .$$

On vérifie que la multiplication que l'on a définie est associative, commutative, distributive sur l'addition, et que $i^2 = -1$. L'ensemble $E = \mathbb{R}^2$, muni de son addition et de sa multiplication, est noté $\mathbb{C}$ et appelé l'ensemble des nombres complexes.

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$, on définit le *conjugué* $\overline{z} = a - bi$. On a les propriétés élémentaires :

$$\text{(i) } z \in \mathbb{R} \text{ ssi } \overline{z} = z \qquad \text{(ii) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \qquad \text{(iii) } \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\, \overline{z}_2 \ .$$

On définit le *module* d'un nombre complexe par $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$; si $z = a + bi$, on a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En particulier, $|z| \geq 0$, et $|z| = 0$ ssi $z = 0$. L'application module $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ est multiplicative. Si un nombre complexe z est non nul, on a $|z| \neq 0$ et $z(|z|^{-2}\overline{z}) = (|z|^{-2}\overline{z})z = 1$ donc z est inversible d'inverse $|z|^{-2}\overline{z}$. Il s'ensuit que $\mathbb{C}$ est bien un corps.

Pour montrer que ce corps est unique à isomorphisme près, considérons deux corps C_1 et C_2 avec les propriétés de contenir $\mathbb{R}$, d'être un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et de posséder un élément i_1 (resp. i_2) tel que $(i_1)^2 = -1$ (resp. $(i_2)^2 = -1$). Alors il est très facile de vérifier que l'application $\mathbb{R}$-linéaire $f : C_1 \to C_2$ telle que $f(1) = 1$ et $f(i_1) = i_2$ est un isomorphisme de corps. $\square$

2 L'exponentielle

Définition 2.1 Pour tout nombre complexe $z = a + bi$, le nombre complexe

$$e^z \stackrel{\text{déf}}{=} e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

est appelé l'*exponentielle* de z. Il est parfois noté aussi $\exp(z)$.

En particulier, noter que $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$.

Proposition 2.2 *Pour tous nombres complexes z_1, z_2 on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.*

Démonstration : En utilisant les formules de trigonométrie usuelles, on trouve que

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{a_1}(\cos(b_1) + i\sin(b_1))e^{a_2}(\cos(b_2) + i\sin(b_2)) \\
&= e^{a_1+a_2}\Big(\big(\cos(b_1)\cos(b_2) - \sin(b_1)\sin(b_2)\big) + i\big(\cos(b_1)\sin(b_2) + \cos(b_2)\sin(b_1)\big)\Big) \\
&= e^{a_1+a_2}(\cos(b_1+b_2) + i\sin(b_1+b_2)) = e^{z_1+z_2} \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposition 2.3 *Pour tout nombre complexe non nul z, de module ρ, il existe un unique élément $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que pour chaque représentant $\theta \in \mathbb{R}$ de α, on a $z = \rho e^{i\theta}$.*

Rappelons qu'un représentant de α est un nombre réel θ dont la classe $\overline{\theta}$ modulo $2\pi\mathbb{Z}$ est égale à α. Pour manipuler l'argument d'un nombre complexe, on en choisira systématiquement un représentant $\theta \in \mathbb{R}$.

L'énoncé ci-dessus signifie que si θ et θ' sont deux représentants de a, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$, ce que l'on note aussi $\theta' \equiv \theta\ (2\pi)$.

Démonstration : Il est immédiat que le complexe $y = \rho^{-1}z$ est de module 1. Écrivons $y = a+bi$, on a donc $a^2 + b^2 = 1$. On sait alors qu'il existe un nombre réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$, et de plus deux tels nombres θ, θ' diffèrent d'un multiple entier relatif de 2π. Donc la classe $\alpha = \overline{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est uniquement déterminée. Finalement, on a

$$z = \rho y = \rho(a + bi) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho e^{i\theta} \quad \square$$

Définition 2.4 L'élément α de la proposition est appelé l'argument de z et noté $\mathrm{Arg}(z)$. L'écriture $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z|$ et $\overline{\theta} = \mathrm{Arg}(z)$ est appelée *forme polaire* de z. Le nombre θ n'est déterminé qu'à 2π près.

3 Le théorème de d'Alembert-Gauss

Le corps des complexes possède la propriété fondamentale d'être *algébriquement clos*, ce qui signifie précisément :

Théorème 3.1 *Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.*

Ce théorème est difficile à démontrer, et nous l'admettons. Notons simplement que par factorisations successives du polynôme donné, on trouve qu'il admet en fait exactement n racines, *comptées avec leur multiplicité.*