DM d'Arithmétique

Vacances de Toussaint

Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux.

Le théorème de Bézout nous dit exactement la chose suivante. Si on décidait de n'utiliser que deux types de pièces de monnaie, disons des pièces de a euro et b euro, alors on pourrait payer en espèces tous les montants entiers, en demandant au besoin aux commerçants de rendre la monnaie. Par exemple, supposons que $a = 4$ et $b = 7$. Pour acheter un article à 5€ on peut donner trois pièces de 4€, le commerçant rend une pièce de 7€, et la transaction est terminée.

On suppose dans toute la suite qu'on est dans un système où les commerçants ne rendent pas la monnaie. Il y a alors un certain nombre de prix qu'on ne peut pas payer exactement (dans l'exemple ci-dessus, on perd au moins 2€, en donnant une pièce de 7€) que l'on appellera des *mauvais* prix. Les prix que l'on peut payer exactement sont des *bons* prix ; on considère que 0 est un bon prix.

(1) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = \lambda a + \mu b$ et $0 \leq \lambda \leq b - 1$.

(2) Décrire en termes mathématiques l'ensemble des bons prix.

(3) Pour chaque couple (a, b) d'entiers premiers entre eux tels que $2 \leq a < b \leq 7$, faire la liste des mauvais prix.

(4) Soit m le plus grand mauvais prix (présumé) dans les onze exemples ci-dessus. Pour chaque couple (a, b), indiquer les valeurs de m et de $m + a + b$. Pouvez-vous proposer une formule $m = f(a, b)$ donnant le plus grand mauvais prix ?

(5) Démontrez cette formule en deux étapes : d'abord montrez que $f(a, b)$ n'est pas un bon prix, ensuite, montrez que tout prix $n > f(a, b)$ est un bon prix.

(*Indication* : utilisez le lemme de Gauss puis l'écriture de « Bézout unique » de la question (1).)

(6) Montrez que m est impair.

(7) On sait maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini de mauvais prix ; on veut les compter. Soit E l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m\}$. Montrez que la fonction $i \colon E \to E$ définie par $i(x) = m - x$ échange les mauvais prix et les bons prix.

(*Indication* : utilisez l'écriture de « Bézout unique » de la question (1).)

(8) Déduisez-en le nombre de mauvais prix.

(9) Vérifiez le résultat sur les exemples du tableau.

(10) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tels que le nombre de mauvais prix soit égal à 26.