Lundi 23 novembre 2009
Anneaux

Exercice 1 Soit $A = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \text{ t.q. } (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrez que A est un anneau. Est-il intègre ? Est-ce un corps ? En utilisant la multiplicativité de l'application module, déterminez les inversibles de A.

Exercice 2 Soient $a < b$ deux réels et $A = C^0([a;b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrez que A est un anneau, pour les lois habituelles que vous rappellerez. Quels sont ses éléments neutres 0 et 1 ?

(2) Décrivez les éléments inversibles de A. L'anneau A est-il intègre ? Est-il un corps ?

(3) Soit $x \in [a;b]$ et $m_x = \{f \in A,\ f(x) = 0\}$. Montrez que m_x est un idéal de A et identifiez l'anneau quotient A/m_x.

(4) Pour tout $f \in A$, on note $Z(f) = \{x \in [a;b],\ f(x) = 0\}$. Si l'intérieur de $Z(f)$ est non vide, on dira que f *s'annule sur un ouvert*. Montrez que les diviseurs de zéro dans A sont les fonctions $f \neq 0$ qui s'annulent sur un ouvert.

Exercice 3 Donnez un exemple d'anneau non intègre.

Exercice 4 On note $A = \mathbb{C}[X,Y]$ l'anneau des polynômes en deux indéterminées X, Y à coefficients complexes. Quels sont ses éléments inversibles ? Est-il intègre ? Est-ce un corps ? Montrez que A n'est pas principal.

Exercice 5 L'application $\varphi : C^0([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ est-elle un morphisme d'anneaux ?