

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)

*préparée à l'Institut Fourier*

*Laboratoire de mathématiques  
UMR 5582 CNRS-UJF*

SUR QUELQUES ASPECTS DES CHAMPS DE  
REVÊTEMENTS DE COURBES ALGÈBRIQUES

**Matthieu ROMAGNY**

*Soutenue à Grenoble devant le jury :*

*José BERTIN (Université de Grenoble I), Directeur*

*Michel BRION (Université Grenoble I, CNRS)*

*Pierre DÈBES (Université de Lille I)*

*Laurent MORET-BAILLY (Université de Rennes I), Président*

*Emmanuel PEYRE (Université de Grenoble I)*

*Au vu des rapports de Pierre DÈBES et Laurent MORET-BAILLY*



# Remerciements

Je veux remercier ici toutes les personnes qui, à des degrés divers, ont partagé avec moi un bout de chemin mathématique.

Je remercie d'abord José, le « chef » qui m'a dirigé avec conviction et patience vers une voie mathématique faite d'éclectisme et de passion.

A l'occasion de quelques unes des conférences qui jalonnent nos années, j'ai croisé Pierre Dèbes et Laurent Moret-Bailly. Je les retrouve au bout du chemin car ils ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie chaleureusement pour le mal qu'il se sont donné et pour l'honneur qu'ils me font en prenant part aujourd'hui au jury.

A ce même jury, ont également accepté de participer Michel Brion et Emmanuel Peyre. C'est un grand plaisir pour moi, et c'est aussi l'occasion de les remercier pour le dynamisme et la bienveillance avec lesquels ils animent la vie des équipes de Géométrie Algébrique à l'Institut Fourier.

J'en viens à mes principaux compagnons de route : Pierre-Emmanuel, Sophie et David. Au cours de ces trois ans ils m'ont énormément apporté, je les en remercie et leur souhaite les plus belles maths qui soient.

Pour diverses discussions mathématiques et nombreux encouragements, je dois aussi une grande reconnaissance à Ariane Mézard, Stefan Wewers, Michel Imbert, Michel Matignon, Qing Liu, et Bertrand Toen.

Enfin j'associe à ces remerciements d'autres membres du labo ; je pense en particulier à Laurent Manivel et Laurent Bonavéro qui se sont toujours intéressés à mon travail.

Il y a une dizaine d'années Jacquot me fit mordre à l'hameçon... Qui sait si un jour il reconnaîtra son nom dans ces lignes, avec un grand merci ?

# Dédicace

Je dédie cette thèse à tous mes proches et amis, peu familiers pour la plupart du contenu de mon travail, qui néanmoins s'y sont intéressés et m'ont permis de le mener à bien. Leur soutien a été décisif à certains moments.

Mes pensées vont vers mon père, ma mère, Barbara ; ma famille ; Hélène, Sophie, Pierre-Emmanuel ; Benoît et Nico ; Anne et Costia ; Cui, Paolo, Guillaume, Grand Stéphane.

Et vers quelques amis plus lointains...

A tous, merci.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Champs algébriques et actions de groupes</b>	<b>15</b>
1	Rappel des définitions et propriétés essentielles . . . . .	15
1.1	Groupoïdes . . . . .	15
1.2	Espaces algébriques . . . . .	16
1.3	Champs algébriques . . . . .	16
1.4	Champs algébriques vus comme quotients de groupoïdes . . . . .	20
2	Actions de groupes sur des champs . . . . .	20
2.1	Actions de schémas en groupes sur des champs . . . . .	20
2.2	Champs de points fixes, cas des groupes finis constants . . . . .	23
2.3	Champs quotients . . . . .	24
2.4	Champs quotients, deuxième construction . . . . .	28
3	2-quotient d'un champ algébrique dont les objets contiennent un groupe fixé d'automorphismes . . . . .	31
<b>II</b>	<b>Champs de revêtements de courbes algébriques</b>	<b>35</b>
1	Courbes algébriques . . . . .	36
1.1	Définitions : marquages, tagages . . . . .	36
1.2	Champs de courbes stables et courbes stables pointées . . . . .	37
2	Champs de revêtements sur $\mathbb{Z}$ . . . . .	39
2.1	Définitions de $\mathcal{H}_{g,G}$ . . . . .	40
2.2	Le morphisme discriminant . . . . .	41
3	Compactification des champs de revêtements modérés . . . . .	49
3.1	Revêtements modérés de courbes stables . . . . .	49
3.2	Le champ des revêtements modérés de courbes lisses . . . . .	51
3.3	Compactification du champ des revêtements modérés . . . . .	52
3.4	Déformations des revêtements modérés et discriminant . . . . .	53
4	Champs de courbes avec structures de niveau . . . . .	55
4.1	Structures de niveau sur les courbes lisses . . . . .	56
4.2	Structures de niveau sur les courbes stables . . . . .	58
4.3	Compactification modulaire de $\mathcal{M}_g(G)$ . . . . .	59
5	Algébricité et compactification du champ de Hurwitz $\mathcal{H}_{g,G}$ sur $\mathbb{Z}$ . . . . .	60
5.1	Algébricité . . . . .	61
5.2	Algébricité : une nouvelle preuve . . . . .	61
5.3	Compactification . . . . .	64

<b>III</b>	<b>Réduction des actions de groupes au-dessus d'un anneau de valuation discrète</b>	<b>67</b>
1	Préliminaires : actions de schémas en groupes . . . . .	69
1.1	Schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète . . . . .	69
1.2	Actions de schémas en groupes sur des schémas . . . . .	69
1.3	Noyaux . . . . .	71
1.4	Les groupes $\mathcal{H}_n$ . . . . .	71
1.5	Actions des groupes diagonalisables . . . . .	72
2	Réduction des actions de groupes sur un anneau de valuation discrète (cas propre) . . . . .	73
3	Eclatements de Néron . . . . .	75
3.1	Rappel des propriétés principales . . . . .	76
3.2	Eclatement d'actions . . . . .	78
3.3	Noyau de l'éclatement d'une action . . . . .	79
4	Réduction des actions de groupes sur un anneau de valuation discrète (cas affine) . . . . .	80
5	Exemple : réduction des revêtements de degré $p$ . . . . .	82
5.1	Description de $C$ . . . . .	83
5.2	Formes réduites . . . . .	84
5.3	Le processus d'éclatements . . . . .	86
<b>IV A</b>	<b>moduli space for wild covers in positive characteristic</b>	<b>89</b>
1	Preliminaries on Dickson's theorem . . . . .	91
2	Potts curves and their automorphisms . . . . .	93
2.1	Tame case. Hyperellipticity . . . . .	94
2.2	Wild case . . . . .	101
3	Moduli space : tame case . . . . .	103
3.1	Proof of the main result . . . . .	104
3.2	Reduction modulo a prime not dividing $2N$ . . . . .	108
3.3	Modular Picard group . . . . .	108
3.4	Compactification by stable curves . . . . .	110
4	Moduli space : wild case $N = p$ . . . . .	111
4.1	Moduli space in characteristic $p$ . . . . .	112
4.2	Moduli space in mixed characteristic . . . . .	116

# Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude, en familles, des actions de groupes sur les courbes algébriques. Le cadre adapté pour cette étude est celui de la théorie des modules.

Plus précisément, ce travail a pour but de définir et d'étudier en détail les champs de revêtements de courbes, tant en caractéristique 0 qu'en caractéristique  $p > 0$ . Le parti pris technique est d'utiliser à plein le vocabulaire des champs algébriques, et de s'intéresser aux espaces modulaires grossiers seulement ensuite. Une justification pour ce choix (sans doute la meilleure possible) est que les champs algébriques sont particulièrement bien adaptés aux problèmes modulaires : ils ont été créés pour cela. Ce sont ceux qui reflètent le mieux la géométrie des objets qu'ils classifient, et ils sont finalement aussi simples (ou compliqués : selon le point de vue...) à construire que les espaces modulaires grossiers associés. Une de leurs caractéristiques principales est de garder la trace des automorphismes des objets ; or précisément, c'est souvent parmi les objets qui ont des automorphismes que se passent des choses intéressantes. D'un point de vue technique, les champs algébriques résolvent souvent bien les problèmes de quotient et ont une description souple en termes de groupoïdes. Il semble que dans la dernière décennie, l'intérêt de faire de la géométrie directement sur les champs soit largement reconnu.

La première construction véritablement algébrique d'espaces de modules de revêtements de courbes (désignés par le terme générique d'*espaces de Hurwitz* dans la suite) est due à Fulton dans sa thèse [Fu].

Parmi les motivations pour étudier les espaces de Hurwitz, la première historiquement est celle concrétisée par Fulton (en caractéristique  $p > g$ ) consistant à déduire la connexité de l'espace des modules des courbes  $\mathcal{M}_g$  de celle de certains espaces de Hurwitz.

Puis les travaux de Fried [Fr] ont montré qu'ils étaient des objets centraux dans l'étude du problème inverse de Galois et dans d'autres questions arithmétiques. En liaison avec ces questions, Fried a suggéré d'étudier l'arithmétique de tours modulaires d'espaces de Hurwitz généralisant les tours de courbes modulaires  $X_1(p^n)$ ,  $X_0(p^n)$  et  $X(p^n)$ .

D'un certain point de vue on peut envisager les espaces de Hurwitz comme extensions naturelles de l'espace des modules des courbes. Ceci légitime l'idée d'étudier leur géométrie pour elle-même. Sur les traces des travaux accomplis pour  $\mathcal{M}_g$ , on peut souhaiter étudier l'existence de bonnes compactifications pour les espaces de Hurwitz ; leur groupe de Picard ; leur nombre de composantes connexes ; leur cohomologie ; leur anneau de Chow... Pour les revêtements modérés des résultats sont déjà accessibles, mais très peu de choses sont connues dans le cas sauvage (qui pose par ailleurs des problèmes arithmétiques bien spécifiques, et passionnants).

Enfin les espaces de Hurwitz ont des liens forts avec les espaces de modules de structures de niveau sur les courbes, et peuvent aider à approfondir leur connaissance, comme dans les travaux de Oort-Van Geemen, de Jong-Pikaart, Abramovitch-Corti-Vistoli (voir bibliographie).

\*\*\*

Décrivons maintenant le contenu de la thèse.

## Chapitre I

Le langage des champs algébriques est largement utilisé. Dans le chapitre I on rappelle tout d'abord les définitions de base et les propriétés essentielles nécessaires pour la suite. Ensuite on complète la théorie par des résultats sur les opérations de groupes sur les champs.

Précisément, soit une action d'un  $S$ -schéma en groupes  $G$  sur un  $S$ -champ algébrique  $\mathcal{M}$ . On montre tout d'abord (voir I.2.2.1) l'existence d'un champ algébrique de points fixes  $\mathcal{M}^G$  lorsque  $G$  est constant fini (le cas d'un groupe général semble plus difficile) :

**Théorème** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford) muni d'une action d'un groupe fini constant  $G$ . Alors il existe un champ de points fixes  $\mathcal{M}^G$  qui est un champ algébrique (resp. un champ de Deligne-Mumford), et le morphisme  $\mathcal{M}^G \rightarrow \mathcal{M}$  est un morphisme représentable, séparé, et quasi-compact (resp. et non ramifié).*

Ensuite, on montre l'existence d'un champ quotient  $\mathcal{M}/G$  pour  $G$  séparé, plat et de présentation finie. On note que lorsque  $G$  est constant et fini, le quotient d'un espace modulaire grossier pour  $\mathcal{M}$  donne un espace modulaire grossier pour le quotient  $\mathcal{M}/G$ ; si de plus l'action est libre, la description des objets du champ quotient correspond à l'intuition (voir I.2.4.1). Dans cette étude des quotients, deux points de vue différents sont abordés : d'une part la définition du champ  $[X/G]$  de Deligne-Mumford par des toseurs, et d'autre part le point de vue des groupoïdes. Le résultat principal sur les quotients est le suivant (voir I.2.3.4) :

**Théorème** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique muni d'une action d'un  $S$ -schéma en groupes  $G$ . On suppose que  $G$  est séparé, plat et de présentation finie sur  $S$ . Alors  $\mathcal{M}/G$  est un  $S$ -champ algébrique et  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$  est un quotient catégorique de  $\mathcal{M}$ ; en fait,  $\pi$  est le  $G$ -torseur universel au-dessus de  $\mathcal{M}/G$ . Si les points géométriques de  $\mathcal{M}$  ont des stabilisateurs finis et réduits, alors  $\mathcal{M}/G$  est un champ de Deligne-Mumford.*

En fin de chapitre, on s'intéresse à une situation un peu différente, dans laquelle il n'y a pas à proprement parler d'action sur le champ  $\mathcal{M}$ . On suppose que le groupe fini  $G$  est, de manière canonique, sous-groupe du groupe d'automorphismes de chaque objet du champ. Il y a alors une construction, présente à quelques endroits dans la littérature, qui fournit un champ  $\mathcal{M}//G$  « débarrassé » de ces automorphismes. On donne en détail la construction et les propriétés de  $\mathcal{M}//G$ .

## Chapitre II

Dans le chapitre II, on étudie divers aspects des champs de revêtements galoisiens de courbes : construction sur  $\mathbb{Z}$  ; compactification ; étude de la ramification. On utilise fortement les résultats techniques du chapitre I.

Etant donnée une courbe relative lisse  $C$  sur une base  $S$ , et une action fidèle fibre à fibre d'un groupe fini  $G$ , soit  $\pi : C \rightarrow C/G$  le quotient. On étudie tout d'abord les diviseurs de ramification  $R \subset C$  et de branchement  $B \subset C/G$ , sans faire d'hypothèse sur les caractéristiques des corps résiduels de  $S$ . Nous proposons une expression conjecturale de diviseurs « essentiels »  $R^*$  et  $B^*$  qui coïncident avec les diviseurs réduits  $R_{\text{réd}}$  et  $B_{\text{réd}}$  si le revêtement est modéré. Ceci suggère la bonne expression du morphisme discriminant, qui à la courbe  $C$  avec action, associe la courbe  $C/G$  marquée par le diviseur  $B^*$ .

Ensuite nous rappelons, pour utilisation ultérieure, le procédé de compactification de l'espace de Hurwitz  $\mathcal{H}_{g,G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$  des revêtements galoisiens *modérés* par adjonction des revêtements de courbes stables. Nous ajoutons, pour être complets, la description locale du discriminant (toujours dans le cas modéré). Ces résultats de J. Bertin sur la compactification de l'espace de Hurwitz modéré sont extraits de la prépublication [BR].

Nous donnons une application de la théorie de Hurwitz modérée aux structures de niveau (quelconques), utilisant l'analogie entre celles-ci et les revêtements étales. La question a été posée par divers auteurs de trouver une compactification « modulaire » du champ des structures de niveau de Deligne-Mumford,  $\mathcal{M}_g(G)$ . Nous répondons par le théorème suivant (voir les notations de II.4.3.4) :

**Théorème** *Le  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ -champ  $\overline{\mathcal{N}}_g(G) := \overline{\mathcal{H}}_{\bar{g},G,\emptyset} // Z(G)$  est une compactification modulaire lisse de  $\mathcal{M}_g(G)$ . Il y a un morphisme propre, birationnel qui est une désingularisation*

$$\overline{\mathcal{N}}_g(G) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g(G)$$

*vers le champ de Deligne-Mumford  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ , obtenu par normalisation. Lorsque  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  est représentable (par exemple lorsque  $G$  domine un niveau abélien  $n \geq 3$ ), c'est l'espace modulaire grossier de  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$ .*

Enfin, le chapitre est conclu par une application de ce résultat au champ de Hurwitz  $\mathcal{H}_{g,G}$  (non modéré). Aucune bonne compactification de ce champ n'est connue en les caractéristiques qui divisent  $|G|$ . Nous donnons une construction de  $\mathcal{H}_{g,G}$  à l'aide des champs de structures de niveau. Le théorème précédent est alors naturellement utilisé pour en proposer dans le même temps une compactification (voir notations dans II.5.3.1) :

**Théorème** *Choisissons un entier  $n \geq 3$ , premier à l'ordre de  $G$ . On obtient un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -champ propre qui contient  $\mathcal{H}_{g,G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$  comme ouvert dense, en considérant la somme suivante*

$$\coprod_{i \in \mathbb{I}} \frac{\overline{\mathcal{N}}_g^i(n)^G}{Z_n^i(G)}$$

*(En particulier, ceci inclut les caractéristiques qui divisent l'ordre de  $G$ .)*

### Chapitre III

On se pose la question dans ce chapitre de décrire, localement, l'action d'un groupe sur une courbe, en situation de ramification sauvage. Précisément, soit  $R$  un anneau de valuation discrète,  $K$  son corps des fractions et  $k$  son corps résiduel, de caractéristique  $p > 0$ . Soit un groupe fini  $G$  dont l'ordre est multiple de  $p$  (par exemple, un  $p$ -groupe). Soit une courbe propre et plate sur  $R$ , munie d'une action génériquement fidèle de  $G$ . Par exemple, ce peut être le modèle stable d'une courbe lisse sur  $K$ . On souhaite donner le plus d'informations possible sur l'action sur la fibre spéciale : par exemple, que se passe-t-il au voisinage d'un point double ? On s'autorise donc à remplacer la courbe par un voisinage affine d'un point de la fibre spéciale.

On se place dans une situation plus générale, qui ne se limite pas au cas des courbes. Soit une action d'un groupe fini  $G$  sur un  $R$ -schéma  $X$  de type fini (ou localisé, ou complété d'un schéma de type fini). On suppose que l'action sur la fibre générique  $X_K$  est fidèle. On propose tout d'abord un procédé effectif pour exhiber, lorsque  $X$  est affine et  $G$  abélien, un modèle  $\tilde{G}$  dominé par  $G$  (c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de  $R$ -schémas en groupes finis plats  $G \rightarrow \tilde{G}$  qui est l'identité sur la fibre générique) et qui agit universellement fidèlement sur  $X$  (voir théorème III.4.1). Pour y parvenir on utilise la technique des éclatements de Néron, que l'on développe pour les actions de groupes. Le bon fonctionnement du processus décrit ci-dessus est conditionné par une meilleure connaissance du comportement du noyau des actions par ces éclatements.

Notons qu'un résultat semblable est obtenu, de manière plus élémentaire, lorsque  $X$  est propre sur  $R$ . Cependant dans le cas où  $X$  est une courbe stable, on a  $\tilde{G} = G$  car  $\text{Aut}_R(X)$  est non ramifié ; c'est donc bien localement sur  $X$  qu'il faut regarder. Puis on applique cette technique au cas des courbes (voir III.5.1, et III.1.4 pour la définition du groupe  $\mathcal{H}_m$ ) :

**Théorème** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$ , où  $A = R[[t]]$ , un germe de courbe lisse sur  $R$ . Soit  $\phi : Y_K \rightarrow X_K$  un revêtement galoisien de groupe  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ;  $Y_K$  est une  $R$ -algèbre formellement lisse et  $\phi$  est génériquement étale. Soit  $Y = \text{Spec}(B)$  obtenu par normalisation de  $X$  dans  $Y_K$ ; le groupe  $G$  agit sur  $Y$ . On suppose que la fibre spéciale de  $Y$  est intègre. Les anneaux locaux  $A_{(\pi)}$  et  $B_{(\pi)}$  des points génériques des fibres spéciales de  $X$  et  $Y$  sont des anneaux de valuation discrète ; soit  $\delta$  la valuation de la différentielle de l'extension correspondante. Alors, on a  $\delta = (s - m)(p - 1)$  pour un  $m \in \{0, \dots, s\}$ , et  $X$  est le quotient de  $Y$  par  $\mathcal{H}_m$  agissant universellement fidèlement.*

### Chapitre IV

Le dernier chapitre est l'étude d'un exemple, au carrefour des questions abordées dans les chapitres précédents. Il s'agit de l'étude des modules d'une famille de courbes, revêtements cycliques de degré  $N$  de  $\mathbb{P}^1$ , appelées courbes de Potts. Ce travail a fait l'objet d'une prépublication de l'Institut Fourier 2001 [Rom].

Le premier résultat important est le calcul minutieux du groupe des automorphismes des courbes de Potts (voir IV.2.1.6 et IV.2.2.2). Ce calcul indique la non-représentabilité du champ algébrique correspondant.

Ensuite nous étudions les espaces modulaires grossiers du champ des courbes de Potts, dans les différentes situations correspondant au paramètre  $N$ . Voici un résumé des résultats (voir IV.3.1.1, IV.4.1.2) :

### **Théorème**

(i) Le  $\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$ -champ algébrique des courbes de Potts « modérées » a un espace modulaire grossier qui est la droite affine privée de l'origine  $\mathbb{A}_*^1 \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$ . Son groupe de Picard modulaire est une extension du groupe de Picard de la base par  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})$ ; sa compactification par les revêtements stables a pour espace modulaire grossier  $\mathbb{P}^1$ . L'espace modulaire grossier a bonne réduction en tout premier qui ne divise pas  $2N$ .

(ii) Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Le  $k$ -champ algébrique des courbes de Potts « sauvages » a un espace modulaire grossier qui est la droite affine privée de l'origine  $\mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$ . Plus précisément, l'espace modulaire est le 2-quotient (voir chapitre I) du champ des courbes de Potts par le groupe  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

\*\*\*

Pour finir, indiquons quelques perspectives de travail dans la continuation de ces résultats. Lorsqu'il en est question,  $R$  est un anneau de valuation discrète de caractéristiques mixtes  $(0, p)$ ,  $K$  est son corps de fractions, et  $k$  son corps résiduel.

### **$G$ -champs algébriques**

L'étude des actions de groupes sur des champs, au chapitre I, laisse des pistes de réflexion dans plusieurs directions. Le lien entre l'espace modulaire grossier de  $\mathcal{M}^G$  et les points fixes de l'espace modulaire grossier de  $\mathcal{M}$  (lorsqu'ils existent) doit être éclairci. Ceci étant, la question qui vient tout de suite à l'esprit est celle de la comparaison entre la géométrie de  $\mathcal{M}$ , et la géométrie  $G$ -équivariante de  $\mathcal{M}/G$  ou de  $\mathcal{M}//G$  (dans les situations pertinentes). Il serait intéressant de savoir quels sont les résultats de géométrie des schémas qui se reconduisent (se généralisent, s'améliorent ?) dans ce cadre.

### **Géométrie des champs de Hurwitz**

Le lien établi au chapitre II entre le champ de Hurwitz  $\mathcal{H}_{g,G}$  et les champs de courbes avec structure de niveau, sous la forme des théorèmes II.4.3.4 et II.5.3.1 doit conduire à une description locale des revêtements du bord (issus de structures de niveau sur des courbes stables). En préalable, il est certainement nécessaire d'étudier plus en détail le bord des espaces de courbes avec structure de niveau  $\overline{\mathcal{N}}_g(n)$ . La simplicité du groupe de Galois mis en jeu,  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ , est un atout pour mettre ceci en application.

### **Ramification sauvage au voisinage d'un point double**

Soit  $X$  une courbe semi-stable sur  $R$  avec action d'un  $p$ -groupe fini. On suppose que sur la fibre générique,  $X$  est lisse et l'action fidèle. Au chapitre III, on n'a obtenu de résultats qu'au voisinage d'un point lisse de  $X_k$ ; c'est un premier pas vers l'étude de l'anneau local d'un point double en tant que  $G$ -anneau (qui était la question posée dans l'introduction de III), sur laquelle on doit maintenant pouvoir donner des réponses plus précises.

## Revêtements de groupe $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

Une question est transversale aux trois derniers chapitres : c'est celle de l'étude de revêtements de groupe de Galois  $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ , sur l'anneau de valuation discrète  $R$  de caractéristiques mixtes  $(0, p)$ . Dans le chapitre II, l'expression des diviseurs de ramification et de branchement « essentiels »  $R^*$  et  $B^*$  laisse en suspens la question de montrer que  $B^*$  est un diviseur relatif entier sur la base. Dans le chapitre III, il est possible d'expliciter la suite standard (voir III.3.1.5 et III.3.2.2) du morphisme  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_R \rightarrow \mu_{p^2, R}$ . Elle contient  $p$  fois plus de termes que dans le cas de degré  $p$ . La question se pose alors de décrire la forme locale des revêtements de groupe  $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ . On pourrait alors appliquer ceci au chapitre IV, pour l'étude des courbes de Potts de « niveau »  $N = p^2$ . Comme il est montré dans le chapitre en question (voir IV.2.2), il n'existe pas de courbe de Potts sur  $k$  (en caractéristique  $p$ ), lisse, de niveau  $N = p^2$ . En revanche il est facile de construire de telles courbes si on demande qu'elles soient simplement stables. Ces courbes doivent apparaître comme modèles stables de courbes de Potts sur le corps des fractions  $K$ . Il est tentant d'essayer de formuler cela en termes d'un « modèle » sur  $R$  pour le champ modulaire des courbes de Potts de niveau  $p^2$  sur  $K$ . Une question connexe est, partant d'une courbe de Potts stable sur  $k$ , d'étudier ses déformations. Ceci nécessite d'étudier conjointement les déformations de points doubles et de points de ramification sauvage.

# Notations

Les symboles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  désignent les ensembles de nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes.

Pour désigner le cardinal d'un ensemble fini  $E$ , on utilisera selon le contexte l'une des notations  $\#E$ , ou  $|E|$ , ou  $\text{card}(E)$ .

Les chapitres sont numérotés I, II, III, IV. Une référence comme I.1.3.13 indique le chapitre I, paragraphe 1, sous-paragraphe 3, numéro 13. Les références internes à un chapitre n'indiquent pas le numéro du chapitre (par exemple, « définition 2.3.2 »).

Nous utiliserons de temps en temps la notation « ensembliste » pour des morphismes de schémas, d'espaces ou de champs algébriques, lorsqu'ils sont définis de manière purement catégorique. Par exemple la diagonale d'un  $S$ -champ  $\mathcal{M}$  est  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times_S \mathcal{M}$ ,  $\Delta(x) = (x, x)$ . Aussi, lorsque  $x$  est un objet d'une catégorie  $C$ , nous noterons parfois  $x \in C$  pour  $x \in \text{Ob}(C)$ , s'il n'y a pas de risque de confusion.



# Chapitre I

## Champs algébriques et actions de groupes

Dans ce chapitre préliminaire, nous détaillons quelques opérations sur les champs algébriques, nécessaires pour la suite (chapitre II) mais peu ou pas expliquées dans la littérature. Pour cela on ne peut se passer de rappeler les bases de la théorie des champs ; le côté technique des démonstrations est une raison supplémentaire pour donner des définitions précises dès le départ. Cependant nous avons essayé d'être concis, et par ailleurs, avons rassemblé dans le seul paragraphe 1 la partie de la théorie qui est classique et bien exposée dans d'autres textes comme [DM], [Ar2], [Vi], [L-MB]. De cette façon, le lecteur « expert » peut commencer directement au paragraphe 2.

Nous ne considérons que des espaces algébriques et des champs algébriques *quasi-séparés*, conformément à [L-MB]. Nous supposons connues la théorie de la descente et la notion de topologie de Grothendieck, sujets sur lesquels nous ne faisons aucun rappel et nous contentons de renvoyer à [SGA1] et [SGA4]. En particulier, de la notion de *site*, nous ne rappelons que le fait qu'il s'agit d'une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.

Dans cette brève présentation, nous favorisons le rôle donné aux espaces algébriques, dans bien des endroits où les schémas apparaissaient traditionnellement. Dans les problèmes de passage au quotient en Géométrie Algébrique, les espaces algébriques s'avèrent en effet d'un usage plus naturel et plus souple. C'est le point de vue utilisé dans de nombreux travaux récents ([Kol], [KeMo], [MB]).

### 1 Rappel des définitions et propriétés essentielles

#### 1.1 Groupoïdes

Un *groupoïde* est une catégorie  $C$  dans laquelle les morphismes sont tous des isomorphismes. Soit  $X_0 = \text{Ob}(C)$  et  $X_1 = \text{Hom}(C)$ . Il y a des applications  $s, b : X_1 \rightarrow X_0$  donnant la source et le but d'un morphisme, et  $i : X_1 \rightarrow X_1$  donnant l'inverse d'un morphisme.

Par exemple, une relation d'équivalence  $R$  sur un ensemble  $X$  (vue comme sous-ensemble de  $X \times X$ ) détermine un groupoïde  $C$  tel que  $\text{Ob}(C) = X$  et  $\text{Hom}(C) = R$ . La composition des morphismes est fournie par la transitivité de  $R$ , et l'inversion des morphismes, par la symétrie. Un groupoïde  $C$  « est » une relation d'équivalence si et seulement si  $\delta = (s, b) : X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$  est un monomorphisme.

Soit  $X_2 = X_1 \times_{b, X_0, s} X_1$  la classe des applications composables. Lorsque  $X_0$  est un ensemble, ce que nous supposons dans ce paragraphe, il en va de même de  $X_1$  et  $X_2$ . Outre

les deux projections, il y a une troisième application  $X_2 \rightarrow X_1$  donnée par la composition des morphismes. On extrait donc de  $\mathcal{C}$  un diagramme

$$X_2 \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{array} X_0$$

On vérifie que la donnée de ce diagramme et de l'application  $i$ , satisfaisant certains diagrammes commutatifs traduisant les axiomes des catégories (voir [DG]), déterminent  $\mathcal{C}$ . Lorsqu'un groupoïde est donné par un tel diagramme, on le note plus simplement  $X_1 \rightrightarrows X_0$ .

## 1.2 Espaces algébriques

Soit  $\text{Sch}$  la catégorie des schémas. Soit  $S \in \text{Sch}$  ; nous l'identifierons systématiquement, à l'aide du foncteur de Yoneda  $h(S) = \text{Hom}_{\text{Sch}}(\cdot, S)$ , au foncteur (ou au champ  $\text{Sch}/S$ , à partir de 1.3) qu'il définit.

Un *espace sur  $S$* , ou  *$S$ -espace*, est un faisceau d'ensembles sur le site  $S_{\text{ét}}$ , i.e. un foncteur contravariant  $X : \text{Sch}/S \rightarrow \text{Ens}$  qui vérifie la propriété de faisceau pour les recouvrements étales de  $S$ . Conformément à l'identification ci-dessus, nous dirons que  $X$  « est » un schéma s'il appartient à l'image essentielle de  $h$ . Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  d'espaces sur  $S$  est dit *schématique* si pour tout  $T \in \text{Sch}/S$  et tout morphisme  $T \rightarrow Y$ , le produit fibré  $X \times_Y T$  est un schéma. Pour un tel morphisme, on sait définir ce que veut dire *vérifier la propriété  $\mathbf{P}$* , si celle-ci est une propriété des morphismes de schémas, stable par changement de base, par exemple le fait d'être étale, quasi-compact, surjectif...

**Définition 1.2.1** Un  *$S$ -espace algébrique* est un  $S$ -espace  $X$  tel que

- (i) le morphisme diagonal  $X \rightarrow X \times_S X$  est schématique quasi-compact,
- (ii) il existe un schéma  $U$  et un morphisme  $U \rightarrow X$  étale surjectif.

Dans (ii), il faut noter que par (i) tout morphisme d'un schéma vers  $X$  est schématique (voir aussi proposition 1.3.8).

Un  $S$ -espace algébrique est un objet « assez proche » d'un schéma. Il possède par exemple un sous-espace ouvert dense qui est un schéma. De plus, comme un schéma, un espace algébrique est un faisceau fpqc, et a fortiori un faisceau fppf.

## 1.3 Champs algébriques

### Définitions

La notion de *champ* peut être vue comme une généralisation de la notion de *faisceau* sur  $S_{\text{ét}}$ . C'est, si l'on veut, un « faisceau en catégories » sur  $S_{\text{ét}}$ . Un autre angle de vue revient à considérer la notion de *champ algébrique* comme une généralisation de celle de *quotient par une relation d'équivalence* : c'est, en effet, un quotient par un groupoïde quelconque, comme il sera rappelé dans 1.4.

Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie et  $p : \mathcal{M} \rightarrow S$  un foncteur. Pour tout  $T \rightarrow S$ , on définit une *catégorie-fibre*  $\mathcal{M}(T)$  dont les classes d'objets et de morphismes sont  $p^{-1}(T)$  et  $p^{-1}(\text{id}_T)$ . Les objets de  $\mathcal{M}(T)$  sont appelés *sections de  $\mathcal{M}$  au-dessus de  $T$* .

**Définition 1.3.1** Soit  $S$  un schéma. Une *catégorie fibrée en groupoïdes sur  $S$*  est la donnée d'une catégorie  $\mathcal{M}$  et d'un foncteur  $p = p_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow S$  tels que

- (i) pour tout morphisme  $f : T \rightarrow U$  de  $S$ -schémas et tout  $\zeta \in \mathcal{M}(U)$ , il existe  $\varphi : \eta \rightarrow \zeta$  tel que  $p(\varphi) = f$ .

(ii) pour tous morphismes  $\varphi : \eta \rightarrow \zeta$  et  $\psi : \xi \rightarrow \zeta$  tels qu'il y a un triangle commutatif  $p(\psi) \circ h = p(\varphi)$  de  $S$ -schémas, il existe un unique  $\chi : \eta \rightarrow \xi$  tel que  $\psi \circ \chi = \varphi$  et  $p(\chi) = h$ .

**1.3.2** L'axiome (ii) a pour conséquences que les catégories-fibres sont des groupoïdes, et également, que l'objet  $\eta$  dans (i) est déterminé de manière unique à unique isomorphisme près. On le note parfois  $\eta = f^*\zeta$ . Par ailleurs, pour tout morphisme  $\varphi : \eta \rightarrow \zeta$  tel que  $p(\varphi) = f$ , il existe – par (ii) – un unique isomorphisme  $\alpha : \eta \xrightarrow{\sim} f^*\zeta$  tel que  $\varphi = c_{f,\zeta} \circ \alpha$  où  $c_{f,\zeta}$  est « le » changement de base  $f^*\zeta \rightarrow \zeta$ . (On sait qu'on peut définir un foncteur changement de base, et que pour les savants, un tel foncteur est défini à 1-équivalence de catégories près, l'équivalence étant définie à 2-isomorphisme unique près (...). Nous passerons sous silence ces complications de vocabulaire et parlerons, sans conséquence ennuyeuse, « du » foncteur changement de base.)

Pour conserver, sur cette structure fibrée  $p : \mathcal{M} \rightarrow S$ , les propriétés de faisceau des espaces algébriques, on est amené à énoncer la définition ci-dessous qui signifie essentiellement que si  $\mathcal{M}$  est un *champ*, les objets et morphismes de  $\mathcal{M}(T)$  peuvent être définis localement. Soit le foncteur défini sur  $T_{\text{ét}}$ , pour tout couple d'objets  $\eta, \zeta \in \mathcal{M}(T)$ , par  $T' \mapsto \text{Hom}_{T'}(\eta \times_T T', \zeta \times_T T')$ . Ce foncteur est noté  $\underline{\text{Hom}}_T(\eta, \zeta) = \underline{\text{Isom}}_T(\eta, \zeta)$  (il y a égalité avec le foncteur Isom car les fibres de  $\mathcal{M}$  sont des groupoïdes).

**Définition 1.3.3** Un *champ* sur  $S$  est une catégorie fibrée en groupoïdes  $p : \mathcal{M} \rightarrow S$  telle que

(i) pour tout  $T/S$  et tous objets  $\eta, \zeta \in \mathcal{M}(T)$ , le foncteur  $\underline{\text{Hom}}_T(\eta, \zeta)$  est un faisceau sur  $T_{\text{ét}}$ .

(ii) soit  $\{T_i \rightarrow T\}$  un recouvrement étale, et  $\eta_i \in \mathcal{M}(T_i)$ ; toute donnée de descente  $(f_{ij})$  pour  $(\eta_i)$  est effective.

**Remarque 1.3.4** Si  $p : \mathcal{M} \rightarrow S$  satisfait seulement l'axiome (i) de la définition ci-dessus, on dit que c'est un préchamp. Par un procédé de faisceautisation on sait lui associer un champ  $\widetilde{\mathcal{M}}$  ([L-MB, chap. 3]), et pour  $k$  un corps algébriquement clos, les catégories-fibres  $\mathcal{M}(k)$  et  $\widetilde{\mathcal{M}}(k)$  sont identiques.

Nous noterons  $\text{Ch}/S$  la catégorie des champs sur un schéma  $S$ . Un foncteur contravariant  $\text{Sch}/S \rightarrow \text{Ens}$  définit une catégorie sur  $S$  qui est un champ si et seulement si ce foncteur est un faisceau étale; de plus un champ est isomorphe à un foncteur si et seulement si pour tout  $T \rightarrow S$ , le groupoïde  $\mathcal{M}(T)$  est équivalent à un ensemble, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'automorphisme non trivial dans  $\mathcal{M}(T)$ .

**Définition 1.3.5** Un *morphisme de champs* est un foncteur  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  tel que  $p_{\mathcal{N}} \circ f = p_{\mathcal{M}}$ . C'est un isomorphisme si, pour tout  $T \in \text{Sch}/S$ ,  $f(T)$  est une équivalence de catégories. Une condition nécessaire et suffisante pour être un isomorphisme est d'être un monomorphisme et un épimorphisme, c'est-à-dire un foncteur pleinement fidèle et « localement essentiellement surjectif » (voir [L-MB, prop. 3.7]). Les champs sur  $S$  forment une 2-catégorie (voir [Hak], chapitre I pour un résumé assez complet sur les 2-catégories). Cela signifie essentiellement qu'il existe des 2-morphismes entre 1-morphismes. Pour cette raison la définition de la commutativité des diagrammes est la suivante : un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{c} & \mathcal{P} \end{array}$$

est *2-commutatif* si on s'est donné un 2-isomorphisme  $\alpha : c \circ a \simeq b$ .

Le lemme de Yoneda reste valable pour les champs sous la forme suivante : pour tout schéma  $X$  et tout champ  $\mathcal{M}$ , on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}/S}(X, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}(X)$$

On a donc la situation suivante : (Schémas)  $\subset$  (Faisceaux étales)  $\subset$  (Champs).

**Définition 1.3.6** Un morphisme de  $S$ -champs  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  est dit *représentable* si pour tout schéma  $Y$  sur  $S$ , le produit fibré  $\mathcal{M} \times_{\mathcal{N}} Y$  est (représentable par) un espace algébrique.

Comme dans 1.2, si  $f$  est représentable et  $\mathbf{P}$  est une propriété de morphismes d'espaces algébriques stable par changement de base, on sait donner sens à l'assertion «  $f$  vérifie  $\mathbf{P}$  ». Lorsque  $f$  n'est pas représentable, il faut être un peu plus astucieux mais on peut tout de même transposer la plupart des propriétés des morphismes de schémas, cf [DM].

**Exemple 1.3.7** Un exemple essentiel est celui du morphisme diagonal  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times_S \mathcal{M}$ . Si  $X, Y$  sont deux schémas et  $X \rightarrow \mathcal{M}, Y \rightarrow \mathcal{M}$  deux morphismes vers  $\mathcal{M}$  vus comme des objets de  $\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(Y)$ , alors la définition du produit fibré de deux champs montre que  $X \times_{\mathcal{M}} Y$  n'est autre que le foncteur  $\underline{\mathrm{Isom}}_{X \times_S Y}(p_1^* \xi_X, p_2^* \xi_Y)$  des isomorphismes entre les deux objets suscités.

**Proposition 1.3.8** *Le morphisme diagonal  $\Delta$  est représentable si et seulement si tout morphisme d'un schéma vers  $\mathcal{M}$  est représentable, ou encore, si et seulement si les faisceaux  $\underline{\mathrm{Isom}}_T$  de 1.3.3(i) sont représentables.*  $\square$

**Définition 1.3.9** Un  $S$ -champ  $\mathcal{M}$  est appelé *champ algébrique*, sous-entendu, *d'Artin*, (resp. *de Deligne-Mumford*), si

- (i) le morphisme diagonal est représentable, quasicompact et séparé.
- (ii) il existe un espace algébrique  $U$  et un morphisme  $U \rightarrow \mathcal{M}$  lisse et surjectif (resp. étale surjectif). On dit que  $U$  est un *atlas* pour  $\mathcal{M}$ .

Donnons enfin trois résultats qui nous seront utiles pour la suite. Les deux premiers concernent les champs de Deligne-Mumford :

**Théorème 1.3.10 ([L-MB, 8.1])** *Un champ algébrique  $\mathcal{M}$  est un champ de Deligne-Mumford si et seulement si le morphisme diagonal  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  est non ramifié.*  $\square$

**Lemme 1.3.11 ([AV2, 4.17])** *Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme de champs de Deligne-Mumford. Pour que  $f$  soit représentable, il faut et il suffit que, pour tout point à valeurs dans un corps algébriquement clos  $k$  et  $\xi \in \mathcal{M}(k)$ , le morphisme de groupes  $\mathrm{Aut}(\xi) \rightarrow \mathrm{Aut}(f(\xi))$  soit injectif.*  $\square$

Le troisième est une forme du Théorème Principal de Zariski qui nous sera utile au chapitre II :

**Théorème 1.3.12** *Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $S$ -champs algébriques réduits. On suppose  $\mathcal{N}$  normal. Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme représentable, séparé, birationnel, quasi-fini. Alors c'est une immersion ouverte. Si de plus  $f$  est fermé alors c'est un isomorphisme.*

**Preuve :** Les hypothèses et la conclusion sont locales sur  $\mathcal{N}$  au sens lisse. De plus par [L-MB, (A2)]  $f$  est schématique, donc on est ramené au cas où  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  sont des schémas  $X, Y$ . Remplaçant  $Y$  par une de ses composantes connexes  $Y_i$  et  $X$  par  $f^{-1}(Y_i)$ , on est ramené au cas où  $X$  et  $Y$  sont intègres. Alors c'est [EGA4], cor. (8.12.10).  $\square$

### Espaces modulaires grossiers

Pour finir il convient de rappeler la définition d'un espace modulaire grossier qui donne une approximation « par en-dessous » d'un champ algébrique  $\mathcal{M}$  par un schéma :

**Définition 1.3.13** Soit  $\mathcal{M}$  un champ algébrique,  $M$  un espace algébrique et  $q : \mathcal{M} \rightarrow M$  un morphisme. On dit que  $M$  est un *espace modulaire grossier* (ou *espace de modules grossier*) pour  $\mathcal{M}$  si

- (i)  $q$  induit une bijection  $\frac{\mathcal{M}(k)}{\text{isom}} \rightarrow M(k)$  pour tout corps algébriquement clos  $k$ .
- (ii)  $q$  est universel pour les morphismes  $\mathcal{M} \rightarrow N$  à valeurs dans un espace algébrique.

**Théorème 1.3.14 ([KeMo])** *Un champ de Deligne-Mumford séparé a un espace de modules grossier qui est un espace algébrique séparé.*  $\square$

**1.3.15** Voici la description locale correspondante. Soit  $x : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathcal{M}$  un point géométrique de  $\mathcal{M}$  ( $k$  est un corps algébriquement clos). Si  $\mathcal{M}$  est un champ de Deligne-Mumford,  $G := \text{Aut}(x) = x \times_{\mathcal{M}} x$  (1.3.7) est un groupe fini constant. Soit  $\mathcal{O}_{\mathcal{M},x}$  l'anneau local strict de  $x$  (i.e. l'anneau local pour la topologie étale). S'il y a un espace modulaire grossier  $\mathcal{M} \rightarrow M$ , l'anneau local strict de l'image de  $x$  dans  $M$  est  $\mathcal{O}_{M,x} = (\mathcal{O}_{\mathcal{M},x})^G$ . Ceci montre que même si  $\mathcal{M}$  est lisse (comme cela est souvent le cas pour les espaces de modules de courbes ou de revêtements), ce n'est pas nécessairement le cas pour  $M$ . En revanche ce dernier est normal (puisque  $\mathcal{O}_{\mathcal{M},x}$  est l'anneau d'invariants d'un anneau normal). Dans le cas où  $\mathcal{M}$  est un schéma ou un espace algébrique (i.e.  $M$  est un espace de modules *fin*), on a  $\mathcal{O}_{M,x} = \mathcal{O}_{\mathcal{M},x}$ . C'est une autre façon de voir que la présence d'automorphismes pour les objets de  $\mathcal{M}$  est un obstacle à sa représentabilité.

### Faisceaux sur les champs algébriques

Lorsqu'il en est question, les faisceaux sur les champs algébriques (resp. de Deligne-Mumford) sont les faisceaux sur le site lisse-étale (resp. étale) décrit dans [L-MB, ch. 12]. Par exemple, un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur un champ algébrique  $\mathcal{M}$  est la donnée

- (i) de faisceaux inversibles  $\mathcal{L}_U$  sur tous les ouverts lisse-étales  $u : U \rightarrow \mathcal{M}$  (il suffit de se donner  $\mathcal{L}_U$  sur les atlas), et
- (ii) d'isomorphismes  $i^* \mathcal{L}_V \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_U$  (pour tous les morphismes  $i : U \rightarrow V$  entre ouverts) satisfaisant une condition de commutativité bien connue lorsqu'il y a une composition  $U \rightarrow V \rightarrow W$ .

Le *groupe de Picard* de  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur  $\mathcal{M}$ , muni du produit tensoriel.

Les constructions locales préservées par changement de base étale que l'on sait définir sur les schémas (telles que  $\text{Spec}(\mathcal{A})$ ,  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ , normalisation, description d'un sous-schéma fermé par un faisceau d'idéaux...) peuvent être effectuées sur les champs algébriques.

## 1.4 Champs algébriques vus comme quotients de groupoïdes

Faisons enfin quelques remarques éclairées par un regard rétrospectif sur le paragraphe 1.3. La motivation initiale pour introduire les espaces algébriques, dans les premiers textes d'Artin et de Knutson était de penser ce nouvel objet comme quotient d'un schéma par une relation d'équivalence. Mais dès le début c'est la définition 1.2.1, plus maniable, qui est adoptée. Le point de vue du quotient reste présent dans la littérature [KeMo]. Il peut être prolongé aux champs algébriques, comme suit.

Grothendieck a introduit, pour formaliser les problèmes de quotients en géométrie algébrique, l'utilisation systématique des groupoïdes (plus exactement, des foncteurs en groupoïdes). Un champ algébrique peut être vu comme le quotient d'un groupoïde  $X_1 \rightrightarrows X_0$ , où  $X_0, X_1$  sont des espaces algébriques :

**1.4.1** Soit une relation d'équivalence étale  $R \rightrightarrows U$ , dans les notations de 1.1. Cela veut dire que  $\delta$  est de type fini, et que  $p_1, p_2$  sont étales. Si  $U, R$  sont des schémas, le quotient de cette relation d'équivalence est un espace algébrique. Mieux, si  $U$  et  $R$  sont des espaces algébriques, le quotient est (encore) un espace algébrique. C'est là l'un des résultats essentiels qui montre l'importance de la notion d'espace algébrique.

**1.4.2** Supposons maintenant que  $R \rightrightarrows U$  est un groupoïde lisse (resp. étale), à diagonale séparée quasi-compacte. Il donne naturellement naissance à une catégorie fibrée en groupoïdes  $\mathcal{M}_0$  dont la fibre  $\mathcal{M}_0(T)$  a pour objets  $U(T)$  et pour morphismes  $R(T)$ . Alors, le champ  $\mathcal{M}$  associé à  $\mathcal{M}_0$  est un champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford) [L-MB, 4.3.1]. Il faut y penser comme un quotient de  $R \rightrightarrows U$ . Réciproquement soit  $\mathcal{M}$  un champ algébrique. Soit  $U$  un atlas pour  $\mathcal{M}$ ,  $R = U \times_{\mathcal{M}} U$  et  $T = R \times_{p_2, U, p_1} R = U \times_{\mathcal{M}} U \times_{\mathcal{M}} U$ ; le groupoïde correspondant

$$T \rightrightarrows R \rightrightarrows U$$

est appelé *présentation* pour  $\mathcal{M}$ . Une telle présentation n'est bien sûr pas unique.

## 2 Actions de groupes sur des champs

Dans la suite du chapitre nous étudions trois opérations relatives aux actions de groupes sur des champs algébriques. Les deux premières : champ de points fixes et champ quotient, sont la généralisation des opérations correspondantes sur les variétés ou les schémas. Il convient de noter que, dans le cadre des champs, la théorie du quotient est plus agréable que dans le cadre des schémas (ce qui est naturel puisque, d'une certaine façon, les champs ont été créés pour répondre à ce problème...). La troisième opération est au contraire propre aux champs, elle fera l'objet du paragraphe 3.

### 2.1 Actions de schémas en groupes sur des champs

Nous aurons besoin principalement des notions de champ de points fixes et champ quotient, voici donc les définitions nécessaires. Un commentaire doit être fait sur ces définitions : dans la définition (1) on pourrait demander que les diagrammes commutatifs traduisant les axiomes usuels soient simplement 2-commutatifs, définissant ainsi une notion de  $G$ -champ *faible* ; mais cela entraînerait des complications d'écriture assez importantes, et serait inutile pour l'utilisation que nous aurons à en faire. En effet toutes les actions que nous manipulerons (au chapitre II principalement) seront en fait des actions au sens fort donné ci-dessous (de groupes constants finis qui plus est). En revanche, on ne peut

pas demander que les diagrammes commutatifs définissant les morphismes équivariants de  $G$ -champs soient stricts (c'est-à-dire que les 2-isomorphismes soient les identités), comme il sera clair dès qu'on aura donné la construction des champs de points fixes, car le morphisme  $\mathcal{M}^G \rightarrow \mathcal{M}$  ne serait plus alors un morphisme équivariant (avec action triviale sur  $\mathcal{M}^G$ ). Il faut donc adopter la définition « faible ».

Dans ce qui suit, les produits indiquent des produits dans  $S - \text{Ch}$ , c'est-à-dire des produits fibrés sur  $S$ . Pour un rappel des notions nécessaires sur les 2-catégories, nous renvoyons au chapitre I de [Hak].

### Définitions 2.1.1

Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes (on pourrait prendre plus généralement un  $S$ -espace en groupes). Soit  $m : G \times G \rightarrow G$  la multiplication, et  $e : S \rightarrow G$  la section unité.

(1) Une *action* de  $G$  sur un champ  $\mathcal{M}$  est un morphisme de  $S$ -champs  $\mu : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tel que les diagrammes suivants (associativité et élément neutre) soient commutatifs (i.e. 1-commutatifs) :

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{m \times \text{id}} & G \times \mathcal{M} \\ \text{id} \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M} \\ e \times \text{id} \uparrow & \nearrow \text{pr}_2 & \\ S \times \mathcal{M} & & \end{array}$$

On dit aussi que  $\mathcal{M}$  est un  $G$ -champ.

(2) Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  des  $G$ -champs. Un *morphisme  $G$ -équivariant* ou  $G$ -morphisme entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  est un couple  $(f, \alpha)$  constitué d'un morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  tel que le diagramme usuel suivant soit 2-commutatif (voir 1.3.5) :

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M} \\ \text{id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times \mathcal{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{N} \end{array}$$

où le 2-isomorphisme  $\alpha : \nu \circ (\text{id} \times f) \xrightarrow{\sim} f \circ \mu$  satisfait une condition de compatibilité avec l'associativité. Précisément, de  $\alpha$  découlent des 2-isomorphismes entre les trois 1-morphismes  $G \times G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  donnés, en écriture « naïve », par

$$\lambda_{23}(g, h, x) = g.h.f(x) , \quad \lambda_{13}(g, h, x) = g.f(h.x) , \quad \lambda_{12}(g, h, x) = f(g.h.x)$$

Par exemple le morphisme  $\alpha_1 : \lambda_{13} \rightarrow \lambda_{12}$ , correspondant au diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{id} \times \mu} & G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M} \\ & & (\text{id}, f) \downarrow & & \downarrow f \\ & & G \times \mathcal{N} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{N} \end{array}$$

est donné par  $\alpha_1 = \alpha * \text{id}_{\text{id} \times \mu}$  (le symbole  $*$  désigne la composition des 2-morphismes, voir [Hak]). De même on a des 2-isomorphismes  $\alpha_2 : \lambda_{23} \rightarrow \lambda_{12}$ , et  $\alpha_3 : \lambda_{23} \rightarrow \lambda_{13}$ . Alors on impose la condition

$$\alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_3$$

Enfin si  $\alpha = \text{id}$ , on parle de  $G$ -morphisme *strict*. □

Détaillons le cas où  $G$  est un groupe constant fini. Alors une action correspond à un morphisme de groupes (ordinaires)  $G \rightarrow \text{Aut}_S(\mathcal{M})$ . On dit que l'action est fidèle si ce morphisme est injectif. Un morphisme de  $G$ -champs est simplement un morphisme de champs  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  avec, pour tout  $g \in G$ , une 2-commutativité  $\alpha_g : g \circ f \xrightarrow{\sim} f \circ g$ . De plus la condition de compatibilité s'écrit ici

$$\alpha_{gh} = (\alpha_g * \text{id}_h) \circ (\text{id}_g * \alpha_h) \quad (\text{I.1})$$

### Définitions 2.1.2

Les notations étant celles de la définition précédente, soit  $\mathcal{M}$  un  $G$ -champ.

(1) Si  $\mathcal{M}$  est algébrique et si  $G$  est un  $S$ -schéma en groupes, un *atlas* (de  $G$ -champ) est un atlas  $G$ -équivariant  $U \rightarrow \mathcal{M}$  avec action libre sur  $U$  (voir 2.1.4).

(2) Soit  $\mathcal{P}$  un  $S$ -champ (resp. un  $S$ -champ algébrique) muni de l'action triviale de  $G$ , on dit qu'un morphisme  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  est un *champ de points fixes* (resp. un *champ algébrique de points fixes*) si pour tout champ (resp. tout champ algébrique)  $\mathcal{N}$ , muni de l'action triviale de  $G$ , et tout morphisme équivariant  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ , il existe un morphisme  $\bar{f} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  tel que  $f = \tau \circ \bar{f}$ , unique à un 2-isomorphisme unique près.

(3) Soit  $\mathcal{Q}$  un  $S$ -champ (resp. un  $S$ -champ algébrique) muni de l'action triviale de  $G$ , on dit qu'un morphisme  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$  est un *quotient catégorique* (de champs, resp. de champs algébriques) si pour tout champ (resp. tout champ algébrique)  $\mathcal{N}$ , muni de l'action triviale de  $G$ , et tout morphisme équivariant  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , il existe un unique morphisme  $\tilde{f} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{N}$  tel que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ .

(4) On dit qu'un morphisme  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$  est un *quotient géométrique* si

- (i) pour tout corps algébriquement clos  $k$ ,  $\frac{\mathcal{M}(k)}{\text{isom}}/G(k) \rightarrow \mathcal{Q}(k)$  est une bijection,
- (ii)  $\pi$  est un morphisme universellement submersif, et
- (iii)  $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}} = (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{M}})^G$ . □

Dans la définition 2.1.2(4), il convient de signaler qu'on prend pour définition d'un morphisme universellement submersif la définition topologique (voir [L-MB], chapitre 5), c'est-à-dire que  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est universellement submersif si

$$U \subset |\mathcal{Y}| \text{ ouvert} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \subset |\mathcal{X}| \text{ ouvert,}$$

et si ceci reste vrai après tout changement de base  $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ .

**Proposition 2.1.3** *Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes et  $\mathcal{M}$  un  $G$ -champ. Alors l'action  $\mu : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est représentable. Si de plus  $G$  est lisse (resp. étale), alors  $\mu$  est lisse (resp. étale).*

**Preuve :** En effet pour tout morphisme  $f : T \rightarrow \mathcal{M}$ , on a un isomorphisme

$$(G \times \mathcal{M}) \times_{\mu, \mathcal{M}, f} T \rightarrow G \times T$$

donné par  $(g, m, t) \mapsto (g, t)$ ; l'inverse est  $(g, t) \mapsto (g, g^{-1}(f(t)), t)$ . □

**Proposition 2.1.4** *Soit  $\mathcal{M}$  un champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford) et  $G$  un  $S$ -schéma en groupes lisse (resp. étale). Alors il existe un atlas de  $G$ -champ.*

**Preuve :** Soit  $\mu$  l'action de  $G$  sur  $\mathcal{M}$ , et  $f_0 : U_0 \rightarrow \mathcal{M}$  un atlas (de champ). Formons  $U = G \times U_0$ . Le groupe  $G$  agit sur  $U$  par multiplication à gauche sur le premier facteur, et le morphisme  $f = \mu \circ (\text{id}_G \times f_0) : U \rightarrow \mathcal{M}$  est un atlas équivariant car, par 2.1.3,  $\mu$  et  $f_0$  sont lisses (resp. étales).  $\square$

**Exemples 2.1.5** Nous anticipons sur les définitions classiques des champs  $BG$  (classifiant du groupe  $G$ ),  $\mathcal{M}_{g,r}$  (courbes  $r$ -pointées),  $\mathcal{M}_g(n)$  (courbes avec structure de niveau  $n$ ) (voir chapitre 2) pour donner quelques exemples. Noter que dans tous ces exemples, les actions sont bien « strictes ».

- (1)  $\text{Aut}(G)$  agit sur  $BG$  : un élément  $\theta \in \text{Aut}(G)$  agit sur les  $G$ -fibrés principaux  $E \rightarrow T$  en tordant l'action  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}_T(E)$  i.e.  $\theta(E, \Phi) = (E, \Phi \circ \theta)$ .
- (2)  $\mathfrak{S}_r$  agit sur  $\mathcal{M}_{g,r}$  : une permutation  $\sigma$  agit sur les courbes  $r$ -pointées en permutant les sections pointées i.e.  $\sigma(C, s_1, \dots, s_r) = (C, s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(r)})$ .
- (3)  $\text{Aut}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g})$  agit sur  $\mathcal{M}_g(n)$  : soit  $A = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ , un élément  $\sigma \in \text{Aut}(A)$  agit sur les courbes avec structures de niveau  $\varphi : C[n] \xrightarrow{\sim} A$  en tordant la structure de niveau i.e.  $\sigma(C, \varphi) = (C, \sigma \circ \varphi)$ .
- (4) Tout champ donne lieu à un  $G$ -champ avec action triviale. Soit  $f : S \rightarrow \mathcal{M}_{g,2}$  correspondant à une courbe 2-pointée  $(C, a, b)$ . Supposons qu'il existe un automorphisme  $\sigma : C \rightarrow C$  qui échange les sections  $a$  et  $b$ . Alors  $\sigma$  définit un morphisme  $\mathfrak{S}_2$ -équivariant  $(f, \sigma) : S \rightarrow \mathcal{M}_{g,2}$  où  $S$  est muni de l'action triviale stricte. On constate que cela n'est pas un morphisme strict.

## 2.2 Champs de points fixes, cas des groupes finis constants

**Théorème 2.2.1** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ muni d'une action d'un groupe fini constant  $G$ . Alors,*

(i) *Il existe un champ de points fixes, noté  $\tau : \mathcal{M}^G \rightarrow \mathcal{M}$ , qui est un sous-champ du produit fibré donné par le diagramme*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{M}^{|G|} \xleftarrow{\Delta_G} \mathcal{M}$$

( $\Delta$  est la diagonale «  $|G|$ -uple » et  $\Delta_G = \prod_{g \in G} g$  est le morphisme produit des automorphismes  $g \in G$ ).

(ii) *Si  $\mathcal{M}$  est algébrique (resp. de Deligne-Mumford), alors  $\mathcal{M}^G$  l'est également ; c'est un sous-champ fermé du produit fibré ci-dessus. De plus  $\tau$  est représentable, séparé, quasi-compact (resp. non ramifié).*

(iii) *Si  $\mathcal{M}$  est propre sur  $S$  alors  $\mathcal{M}^G$  est aussi propre sur  $S$ .*

(iv) *Si  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$ ,  $\mathcal{M}^G$  et  $(\mathcal{M}^H)^{G/H}$  sont canoniquement isomorphes.*

(v) *Si  $\mathcal{M}$  a un espace modulaire grossier  $q : \mathcal{M} \rightarrow M$ , alors l'action de  $G$  induit canoniquement une action sur  $M$  (qui fait de  $q$  un morphisme  $G$ -équivariant strict), et il y a un morphisme  $\mathcal{M}^G \rightarrow M^G$ .*

**Preuve :** En toute généralité, pour un  $G$ -champ quelconque  $\mathcal{M}$ , il y a un champ de points fixes qui est le champ  $\text{Hom}_G(S, \mathcal{M})$ . Ici il a une description particulièrement simple. On considère d'abord le produit fibré indiqué  $\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}^{|G|}} \mathcal{M}$ . Un objet de ce champ est un couple d'objets  $(x, y)$  de  $\mathcal{M}$  doté d'isomorphismes  $\psi_g : x \xrightarrow{\sim} g(y)$ , ou, plus simplement

un objet  $x \in \mathcal{M}$  et des isomorphismes  $\psi_g : x \xrightarrow{\sim} g(x)$ . On considère le champ  $\mathcal{M}^G$ , sous-catégorie pleine du précédent, constitué des objets  $(x, \psi_g)$  tels que pour tous  $g, h \in G$  on ait  $g(\psi_h) \circ \psi_g = \psi_{gh}$ .

Il est immédiat de montrer la 2-propriété universelle d'un champ de points fixes. En effet, soit un  $G$ -morphisme  $f = (f, \alpha) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  avec action triviale sur  $\mathcal{N}$  (et donc,  $\alpha_g : g \circ f \xrightarrow{\sim} f$ ). Alors, compte tenu de la condition (I.1), on définit bien un morphisme  $\bar{f} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}^G$  par  $\bar{f}(x) = (f(x), \alpha_g(x))$ , et on a  $f = \tau \circ \bar{f}$ .

Pour (ii) supposons  $\mathcal{M}$  algébrique ou de Deligne-Mumford. Etant donné un  $T$ -point  $T \rightarrow \mathcal{M}$  correspondant à un objet  $x \in \mathcal{M}(T)$ , le produit fibré  $\mathcal{M}^G \times_{\mathcal{M}} T$  est le sous-foncteur de l'espace algébrique  $\Pi := \prod_{g \in G} \text{Isom}(x, gx)$  correspondant aux uplets d'isomorphismes  $\psi_g$  tels que  $g(\psi_h) \circ \psi_g = \psi_{gh}$ . Ces conditions étant fermées, on obtient un sous-espace algébrique fermé de  $\Pi$ . Il en ressort que  $\tau$  est représentable avec les propriétés indiquées, et que  $\mathcal{M}^G$  est algébrique.

Pour (iii), si  $\mathcal{M}$  est propre sur  $S$  alors  $\Delta$  est propre. Comme  $\tau$  est composé d'une immersion fermée et du pullback de  $\Delta$ , alors  $\mathcal{M}^G$  est aussi propre sur  $S$ .

Pour (iv), on constate que  $\mathcal{M}^G$  et  $(\mathcal{M}^H)^{G/H}$  vérifient la même propriété universelle. Enfin pour (v), pour tout  $g \in G$ , par universalité de  $\mathcal{M}$  le morphisme  $g \circ g$  se factorise (de manière unique) en  $\tilde{g} \circ g$  ce qui « descend » l'action de  $G$  sur  $\mathcal{M}$ . Il est clair que  $\mathcal{M}^G \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  se factorise par  $\mathcal{M}^G$ .  $\square$

### Remarques 2.2.2

(i) Noter la ressemblance formelle entre le champ  $\mathcal{M}^G$  et le champ d'inertie ([To, p. 38])

$$I_{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \mathcal{M}$$

(ii) Par la 2-propriété universelle,  $\mathcal{M}^G \rightarrow \mathcal{M}$  est un monomorphisme de  $G$ -champs algébriques.

(iii) Si  $\mathcal{M}$  est représentable par un espace algébrique (ou par un schéma), alors le champ de points fixes  $\mathcal{M}^G$  l'est aussi et c'est un objet de points fixes dans la catégorie des espaces algébriques (ou des schémas). En particulier,  $\mathcal{M}^G \rightarrow \mathcal{M}$  est alors un monomorphisme de champs algébriques, ce qui n'est pas le cas en général (sans que cela ne soit une contradiction avec (ii)). Illustrons cela en reprenant l'exemple d'une courbe 2-pointée de 2.1.5(4). Supposons que  $(C, a, b)$  a deux automorphismes, non conjugués dans  $\text{Aut}(C)$ , qui échangent  $a$  et  $b$ , disons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On a donc deux morphismes distincts (non 2-isomorphes)  $S \rightarrow (\mathcal{M}_{g,2})^{\mathfrak{S}_2}$ . Alors les compositions  $S \rightarrow (\mathcal{M}_{g,2})^{\mathfrak{S}_2} \rightarrow \mathcal{M}_{g,2}$  sont des morphismes de champs algébriques égaux, correspondant au morphisme  $f$  définissant  $(C, a, b)$ . En revanche comme morphismes de  $\mathfrak{S}_2$ -champs, ce sont les morphismes distincts  $(f, \sigma_1)$  et  $(f, \sigma_2)$ .

## 2.3 Champs quotients

Lorsque  $\mathcal{M} = X$  est un schéma et  $G$  un groupe étale, une construction du champ quotient existe depuis Deligne et Mumford, à savoir le champ  $[X/G/S]$ . C'est bien là un quotient catégorique de champs (nous laissons cette vérification pour 2.3.4). Avec la définition 2.3.2, la généralisation de cette construction fournira des quotients dans un cadre plus général. Rappelons la définition de  $[X/G/S]$ , aussi noté  $[X/G]$  :

**Exemple 2.3.1** On se donne un  $S$ -schéma  $X$  et un  $S$ -schéma en groupes séparé, plat et de présentation finie  $G$  qui agit sur  $X$ . L'idée de départ est que le morphisme canonique  $X \rightarrow [X/G]$ , s'il existe, doit être un  $G$ -torseur. On définit ici un  $G$ -torseur (étale) comme

étant un morphisme de faisceaux  $E \rightarrow T$ ,  $E$  étant muni d'une action de  $G$  telle que, étale-localement sur  $T$ , il est isomorphe au  $G$ -torseur trivial  $\text{pr}_2 : G \times_S T \rightarrow T$ ; un  $G$ -torseur est automatiquement un espace algébrique. En particulier, pour tout point  $T \rightarrow [X/G]$ , les deux projections du produit fibré  $E := X \times_{[X/G]} T$  fournissent un  $G$ -torseur  $E \rightarrow T$  et un morphisme  $G$ -équivariant  $E \rightarrow X$ . On renverse alors le point de vue en définissant  $[X/G]$  comme étant le champ dont les objets sont les couples  $(E \rightarrow T, E \rightarrow X)$  formés d'un  $G$ -torseur et d'un morphisme  $G$ -équivariant de  $S$ -schémas. Les morphismes sont les morphismes de  $G$ -torseurs compatibles aux flèches vers  $\mathcal{M}$ . Il y a un morphisme  $\pi : X \rightarrow [X/G]$  donné par l'objet de  $[X/G](X)$  correspondant au toseur trivial  $G \times X \rightarrow X$  et au morphisme  $G \times X \rightarrow X$  donné par l'action. Un cas particulier est  $[S/G] = BG$ .  $\square$

On peut proposer la même construction pour le cas général où  $\mathcal{M}$  est un champ algébrique (d'Artin ou de Deligne-Mumford) quelconque. Précisons cela.

**Définition 2.3.2** Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique muni d'une action d'un  $S$ -schéma en groupes séparé, plat et de présentation finie  $\mu : G \times_S \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Le champ  $\mathcal{M}/G$  est le champ dont les objets sont les couples formés d'un  $G$ -torseur  $E \rightarrow T$  et d'un morphisme de  $G$ -champs  $E \rightarrow \mathcal{M}$ . Les morphismes sont les morphismes de  $G$ -torseurs compatibles aux flèches vers  $\mathcal{M}$ .

On définit un morphisme  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$  qui à un objet  $x \in \mathcal{M}(T)$  vu comme morphisme  $x : T \rightarrow \mathcal{M}$ , associe le couple constitué par le toseur trivial  $G \times T \rightarrow T$  et le morphisme  $G \times T \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $(g, t) \mapsto g.x(t)$ .  $\square$

Avant d'énoncer le résultat correspondant, faisons un bref rappel sur l'existence d'*objets universels* dans les champs modulaires :

**Parenthèse 2.3.3** Supposons qu'un champ algébrique soit issu d'un problème modulaire (classification d'objets d'un certain type), autrement dit, qu'un problème modulaire soit représentable dans la catégorie des champs algébriques. Il existe alors un *objet universel* au-dessus de  $\mathcal{M}$ , duquel tout objet du champ  $\mathcal{M}$  se déduit par produit fibré. Un exemple sera plus efficace que toute discussion supplémentaire : considérons le champ algébrique  $\mathcal{M}_g$  des courbes de genre  $g$ . Soit  $U$  un atlas pour  $\mathcal{M}$ ,  $R = U \times_{\mathcal{M}} U$  et  $T = R \times_U R$  de sorte qu'on a une présentation comme dans 1.4.2. Au morphisme  $U \rightarrow \mathcal{M}$  correspond une courbe  $C_U \rightarrow U$ ; le pullback  $C_R := C_U \times_U R$  est une courbe sur  $R$  (indépendante de la projection  $R \rightarrow U$  choisie); de même on a  $C_T := C_U \times_U T$ . Le groupoïde

$$C_T \rightrightarrows C_R \rightrightarrows C_U$$

définit un champ algébrique  $\mathcal{C}_g$ , avec un morphisme  $\mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  : la *courbe universelle*.  $\square$

Rappelons aussi la définition du *stabilisateur* d'un point  $f : T \rightarrow \mathcal{M}$  (c'est la même que pour les actions sur des schémas : il suffit que le champ  $\mathcal{M}$  ait une diagonale représentable). Soit  $\psi_f = (\mu \circ (\text{id}_G \times f), \text{pr}_2) : G \times T \rightarrow \mathcal{M} \times T$ , i.e. en « notation ponctuelle »,  $\psi_f(g, t) = (g.f(t), t)$ . Le stabilisateur de  $f$  est le produit fibré défini par le diagramme

$$G \times T \xrightarrow{\psi_f} \mathcal{M} \times T \xleftarrow{(f, \text{id}_T)} T$$

(c'est « l'ensemble des couples  $(g, t)$  tels que  $g.f(t) = f(t)$  »). C'est un sous- $T$ -schéma en groupes de  $G \times T$ .

**Théorème 2.3.4** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique muni d'une action d'un  $S$ -schéma en groupes  $G$ . On suppose que  $G$  est séparé, plat et de présentation finie sur  $S$ .*

(i) *Alors  $\mathcal{M}/G$  est un  $S$ -champ algébrique et  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$  est un quotient catégorique de  $\mathcal{M}$ , surjectif et lisse. En fait,  $\pi$  est le  $G$ -torseur universel au-dessus de  $\mathcal{M}/G$ ; en particulier c'est un quotient géométrique.*

(ii) *Si les points géométriques de  $\mathcal{M}$  ont des stabilisateurs finis et réduits, alors  $\mathcal{M}/G$  est un champ de Deligne-Mumford.*

**Preuve :** Puisqu'on a défini les toseurs comme étant des faisceaux,  $\mathcal{M}/G$  est un champ. De plus  $G$  étant un schéma les  $G$ -torseurs sont en fait des espaces algébriques, donc  $\mathcal{M}/G$  est même un champ fppf par [L-MB, 10.4.2].

Montrons que  $\mathcal{M}/G$  est algébrique. Soient deux objets de  $(\mathcal{M}/G)(T)$ , i.e. deux toseurs  $E, E'$ . Le faisceau des isomorphismes entre  $E$  et  $E'$  dans  $\mathcal{M}/G$  est un sous-foncteur fermé du faisceau des isomorphismes de  $G$ -torseurs  $\underline{\text{Isom}}_G(E, E')$ . Or, étale-localement sur  $T$  on a  $E \simeq E' \simeq G \times T$  donc  $\underline{\text{Isom}}_G(E, E')$  est représentable par un espace algébrique. De plus il est séparé et quasi-compact par les hypothèses faites sur  $G$ , ce qui établit les propriétés nécessaires pour la diagonale. Pour trouver un atlas il suffit de montrer que  $\pi$  est un morphisme fppf, d'après le théorème d'Artin [L-MB, 10.1]. Soit  $T \rightarrow \mathcal{M}/G$  correspondant à un couple  $(u : E \rightarrow T, v : E \rightarrow \mathcal{M})$ , il y a donc un morphisme  $a : E \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathcal{M}/G} T$  (utiliser le fait que, pour un toseur,  $E \times_T E \xrightarrow{\sim} G \times_T E$ ). On construit maintenant un inverse  $b$  pour  $a$ . Soit  $Y$  un schéma et  $x \in (\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}/G} T)(Y)$ , correspondant à des objets de  $\mathcal{M}(Y), T(Y)$ . Dire qu'ils coïncident dans  $(\mathcal{M}/G)(Y)$  revient à trivialisier le toseur  $E$  après l'extension  $Y \rightarrow T$ . Donc  $E \times_T Y/Y$  a alors une section (la section neutre), d'où un morphisme  $Y \rightarrow E$  : c'est l'image  $b(x)$ . On vérifie que  $a$  et  $b$  sont inverses l'un de l'autre. En conclusion,  $\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}/G} T \simeq E$ , ce qui montre que  $\pi$  est le toseur universel, d'où tout découle.

Pour vérifier que  $\pi$  est un quotient géométrique, le point (i) de la définition 2.1.2(4) est facile; les points (ii) et (iii) sont des assertions locales sur  $(\mathcal{M}/G)_{\text{ét}}$  et sont donc conséquences des propriétés similaires pour le quotient d'espaces algébriques.

Pour (ii), il faut de plus montrer que la diagonale est non ramifiée (1.3.10). Soient deux points géométriques de  $\mathcal{M}/G$  représentés par  $x, y : \text{Spec}(K) \rightarrow \mathcal{M}/G$ . On doit montrer que  $\underline{\text{Isom}}_K(x, y)$  est non ramifié sur  $K$ . Or  $x, y$  correspondent à des orbites de points géométriques de  $X$  sous  $G$ , et  $\underline{\text{Isom}}_K(x, y)$  est non vide si et seulement si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite; c'est alors le stabilisateur  $G_x = G_y$ . Compte tenu de l'hypothèse sur les stabilisateurs, la diagonale est non ramifiée.

Enfin, il reste à montrer la propriété universelle de quotient. Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme de  $G$ -champs algébriques, avec  $\mathcal{N}$  muni de l'action triviale. On va définir un morphisme  $\tilde{f} : \mathcal{M}/G \rightarrow \mathcal{N}$ . Soit  $a \in (\mathcal{M}/G)(T)$ , c'est-à-dire un couple  $(u : E \rightarrow T, v : E \rightarrow \mathcal{M})$ . Étale localement sur  $T$ ,  $u$  est le toseur trivial  $G \times T$ , donc il a une section  $s$ , et l'ensemble de ces sections est d'ailleurs  $G(T)$ . On obtient un point  $a' \in \mathcal{M}(T)$  par la composition  $v \circ s$ ; comme  $v$  et  $f$  sont  $G$ -équivariants, l'image  $f(a')$  ne dépend pas du choix de  $s$ . Comme enfin  $\mathcal{N}$  est un champ, cette construction effectuée localement se recolle. Par ailleurs si on veut avoir  $f = \tilde{f} \circ \pi$  il est clair que seul ce choix de  $\tilde{f}(a)$  convient, ce qui assure l'unicité de  $\tilde{f}$ . La définition du foncteur  $\tilde{f}$  sur les morphismes est transparente et omise.  $\square$

**Remarques 2.3.5**

(1) Par le fait que  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$  est un torseur, il y a un morphisme  $\rho : \mathcal{M}/G \rightarrow BG$ . De plus on retrouve  $\mathcal{M}$  et l'action de  $G$  à l'aide de  $\rho$ , car on a en fait un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M}/G \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ S & \longrightarrow & BG \end{array}$$

En résumé c'est la même chose de se donner le champ  $\mathcal{M}$  avec action, ou un morphisme  $\mathcal{M}/G \rightarrow BG$ .

(2) La dernière partie de la démonstration peut être interprétée de manière plus instructive. Pour définir  $\tilde{f}$ , étant donné un torseur  $(u : E \rightarrow T, v : E \rightarrow \mathcal{M})$ , donc en particulier un objet  $x \in \mathcal{N}(E)$  donné par  $E \xrightarrow{v} \mathcal{M} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{N}$ , il s'agit de le descendre en un objet de  $\mathcal{N}(T)$ . Or on a  $E' = \tilde{E} \times_T E \simeq G \times_T E$  (propriété de torseur), on voit donc que la  $G$ -équivariance n'est rien d'autre que l'écriture d'une donnée de descente pour  $x$  relativement à  $E \rightarrow T$ . En résumé, si  $\mathcal{N}$  est muni de l'action triviale de  $G$ , les morphismes  $G$ -équivariants  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  fournissent des données de descente effectives pour les objets de  $\mathcal{N}$  de base des  $G$ -torseurs.

(3) Soulignons, par un exemple extrême, le fait que  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$  est toujours un  $G$ -torseur. Lorsque  $\mathcal{M}$  est muni de l'action triviale, le quotient  $\mathcal{M}/G$  n'est pas  $\mathcal{M}$ . Par exemple si  $\mathcal{M} = X$  est un schéma et  $G$  est un groupe constant fini d'ordre  $n$ , agissant trivialement sur  $X$ , alors  $\pi$  est fini de degré  $n$ . Il y a une flèche  $q : [X/G] \rightarrow X = X/G$  entre le quotient dans la catégorie des champs et le quotient dans la catégorie des schémas, et  $q$  est à la fois l'espace modulaire grossier de  $[X/G]$  et une section de  $\pi$  (voir prop. 2.3.7). En fait il est facile de vérifier que

$$\mathcal{M}/G \simeq \mathcal{M} \times BG$$

(généralisant le fait que  $[S/G] = BG$ ) et les objets de  $\mathcal{M}/G$  acquièrent tous  $G$  dans leur groupe d'automorphismes (voir aussi la remarque 3.0.3(5) ci-dessous).

**Exemples 2.3.6**

(1) Au chapitre suivant seront introduits les champs de courbes et les champs de courbes avec structure de niveau  $n$  (chapitre 2, paragraphe 4). En suivant les méthodes de la démonstration précédente on retrouve aussitôt le résultat classique que le morphisme  $\mathcal{M}_g(n) \rightarrow \mathcal{M}_g$  (oubli de la structure de niveau) est le quotient par  $G = \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .

(2) Le champ quotient  $\mathcal{M}_{g,(r)} := \mathcal{M}_{g,r}/\mathfrak{S}_r$  (cf exemple 2.1.5(2)) est le champ des courbes avec points marqués (distincts) non numérotés.

(3) Courbes modulaires  $X_0(N)$  et  $X_1(N)$  : le champ  $\mathfrak{X}_0(N)$  (resp.  $\mathfrak{X}_1(N)$ ) paramètre les couples formés d'une courbe elliptique  $E$  et d'un sous-groupe  $G \subset E[N]$  isomorphe à  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  (resp. et d'un point de  $N$ -torsion  $P$ ). On a donc un morphisme  $\mathfrak{X}_1(N) \rightarrow \mathfrak{X}_0(N)$ , qui à un couple  $(E, P)$  associe  $(E, \langle P \rangle)$  où  $\langle P \rangle$  est le groupe engendré par  $P$  dans  $E[N]$ . Ce morphisme est le quotient par le groupe  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ . □

Lorsque  $\mathcal{M} = X$  est un schéma, on prendra garde que, en général, même s'il existe un schéma ou un espace algébrique quotient  $X/G$ , celui-ci n'est pas égal à  $[X/G]$ . Il y a en fait égalité si et seulement si l'action est libre.

Pour finir plaçons-nous dans le cas où  $G$  est fini et constant. On rappelle l'existence, démontrée par Deligne, du quotient (comme espace algébrique) d'un espace algébrique par

l'action d'un groupe fini. Même dans ce cas, on n'a pas a priori  $[X/G] = X/G$ , le second est seulement l'espace modulaire grossier du premier :

**Proposition 2.3.7** *Soit  $G$  un groupe fini et  $\mathcal{M}$  un champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford) avec action de  $G$ . Soit  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$  le quotient. Si  $\mathcal{M}$  a un espace modulaire grossier  $q : \mathcal{M} \rightarrow M$ ,  $\mathcal{M}/G$  a un espace modulaire grossier qui est  $M/G$ .*

**Preuve :** Par 2.2.1(v),  $G$  agit sur  $M$ . Le quotient  $M/G$  est un espace algébrique : montrons que c'est un espace modulaire grossier pour  $\mathcal{M}/G$ . D'abord,

$$\frac{(\mathcal{M}/G)(k)}{\text{isom}} \simeq \frac{M(k)/G}{\text{isom}} \simeq \frac{M(k)}{\text{isom}}/G \simeq M(k)/G \simeq (M/G)(k)$$

Ensuite, soit  $f : \mathcal{M}/G \rightarrow N$  un morphisme à valeurs dans un espace algébrique. Utilisant de nouveau l'universalité de  $\mathcal{M} \rightarrow M$ , on trouve qu'il existe un unique  $a : M \rightarrow N$  tel que  $aq = f\pi$ . Par ailleurs, pour tout  $g \in G$ , on a  $agq = aqg = f\pi g = f\pi = aq$  donc  $ag = a$  car  $q$  est un épimorphisme. Donc  $a$  factorise en  $M/G \rightarrow N$ .  $\square$

## 2.4 Champs quotients, deuxième construction

La manipulation des groupoïdes, très souple à bien des égards, permet de donner une autre démonstration de l'existence des champs quotients. Pour la suite (chapitre II), le cas qui nous intéressera presque exclusivement est le cas d'une action (stricte) libre d'un groupe constant fini ; on a alors une autre description, très simple, du quotient. Ce cas est par ailleurs très instructif pour traiter le cas général, donc nous le traitons séparément.

### Quotient par un groupe constant fini agissant librement

Heuristiquement, la structure *algébrique* d'un champ algébrique est celle d'un groupoïde (alors que sa structure géométrique, donnée par l'atlas, s'apparente à celle d'un schéma, ou plutôt d'un orbifold). Ainsi, pour s'attaquer au problème du quotient, on peut commencer par considérer le problème du quotient d'un groupoïde  $C$  par l'action d'un groupe  $G$ , ce qui est envisageable lorsque  $G$  est constant et fini.

Donc, soit  $G$  un groupe constant fini, agissant strictement et librement sur un groupoïde  $C$ . Cela veut dire que  $G$  agit par isomorphismes de catégories (et pas seulement par équivalences), et que l'action est libre sur les objets (donc sur les morphismes aussi). Notons  $X_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  pour les objets, morphismes, et paires de morphismes composables (notations de 1.1). Une catégorie quotient  $C/G$ , si elle existe, a nécessairement pour ensembles d'objets et de morphismes  $X_0/G$  et  $X_1/G$ . Plus précisément, on doit avoir un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{s, b} & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1/G & \xrightarrow{\bar{s}, \bar{b}} & X_0/G \end{array}$$

Cela définit l'application  $\bar{\delta} = (\bar{s}, \bar{b})$ . Pour  $x, y \in X_0$  d'images  $\bar{x}, \bar{y} \in X_0/G$ , on doit alors poser

$$\text{Hom}_{C/G}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\delta}^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\coprod_{g, h \in G} \text{Hom}_C(gx, hy)}{G}$$

Comme l'action est libre, la loi de composition passe au quotient (ce qui n'a pas de raison d'être en général). En effet soit  $u, v$  deux morphismes composables de  $C/G$ , c'est-à-dire

représentés par  $u : x \rightarrow y$  et  $v : z \rightarrow t$  tels qu'il existe  $g \in G$  avec  $z = g(y)$ . Si  $g$  est déterminé de manière unique, ce qui est notre hypothèse, on peut définir  $v \circ u$  par  $g^{-1}(v) \circ u$ . On a ainsi défini un quotient de  $C$  par  $G$  dans la catégorie des groupoïdes.

Si  $\mathcal{M}$  une catégorie fibrée en groupoïdes sur  $S$ , et que  $G$  agit par isomorphismes de catégories fibrées, ce qui précède est valable sur chaque fibre  $C = \mathcal{M}(T)$ , et il en résulte un quotient  $\mathcal{N}$  dans la catégorie des catégories fibrées en groupoïdes.

Si de plus  $\mathcal{M}$  est un champ,  $\mathcal{N}$  est un préchamp : en effet les foncteurs Isom dans  $\mathcal{N}$  sont des unions disjointes indicées par  $G$  de faisceaux Isom dans  $\mathcal{M}$ . Examinons la question de l'effectivité des données de descente. Soit  $\{T_i \rightarrow T\}$  un recouvrement étale, soit  $\bar{x}_i \in \mathcal{M}(T_i)/G$  et supposons avoir une donnée de descente i.e. des isomorphismes

$$\bar{\sigma}_{ij} : \bar{x}_i|_{T_{ij}} \xrightarrow{\sim} \bar{x}_j|_{T_{ij}}$$

sur  $T_{ij} = T_i \times_T T_j$ , satisfaisant la condition de cocycle  $\bar{\sigma}_{ik} = \bar{\sigma}_{jk}\bar{\sigma}_{ij}$  sur  $U_{ijk}$ . Relevons  $\bar{x}_i$  en  $x_i \in \mathcal{M}(T_i)$ , alors il existe  $g_{ij} \in G$  (unique car l'action est libre) et un isomorphisme relevant  $\bar{\sigma}_{ij}$

$$\sigma_{ij} : x_i|_{T_{ij}} \xrightarrow{\sim} g_{ij}(x_j|_{T_{ij}})$$

Considérons la composition

$$x_i|_{T_{ijk}} \xrightarrow{\sigma_{ij}} g_{ij}(x_j|_{T_{ijk}}) \xrightarrow{g_{ij}(\sigma_{jk})} g_{ij}(g_{jk}(x_k|_{T_{ijk}}))$$

De même que  $\sigma_{ik}$ , ce morphisme est au-dessus de  $\bar{\sigma}_{ik} = \bar{\sigma}_{jk}\bar{\sigma}_{ij}$  ; comme l'action est libre, on doit donc avoir

$$g_{ik} = g_{ij}g_{jk} \quad \text{et} \quad \sigma_{ik} = g_{ij}(\sigma_{jk})\sigma_{ij}$$

Il apparaît une obstruction à recoller dans  $H^1(T, G)$ . Dans le cas où  $H^1(T, G) = 0$ , le cocycle  $g_{ij}$  est nul donc de la forme  $g_i^{-1}g_j$  ; alors la relation précédente fournit

$$g_i(\sigma_{ik}) = g_j(\sigma_{jk})g_i(\sigma_{ij})$$

donc en posant  $\sigma'_{ij} = g_i(\sigma_{ij})$  on obtient une donnée de descente pour  $\{x_i\}$  (relativement à  $\{T_i \rightarrow T\}$ ) dans  $\mathcal{M}$ , elle descend en une donnée effective pour  $\{\bar{x}_i\}$  dans  $\mathcal{N}$ . Mais en général  $\mathcal{N}$  n'est pas un champ. Après passage au champ associé on obtient un quotient dans la catégorie des champs.

Enfin, lorsque  $\mathcal{M}$  est un champ algébrique, on montre que le champ quotient l'est aussi, c'est donc un quotient dans la catégorie des champs algébriques. La démonstration en toute généralité est donnée dans 2.4.2 ci-dessous ; contentons-nous pour l'instant de résumer ce que l'on a obtenu dans ce cas particulier :

**Proposition 2.4.1** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford). Soit  $G$  un groupe fini et constant, agissant librement sur  $\mathcal{M}$  (i.e. librement sur les objets). Alors le champ quotient  $\mathcal{M}/G$  est le champ associé au préchamp dont l'ensemble des objets au-dessus de  $T/S$  est  $\text{Ob}(\mathcal{M}(T))/G$ . C'est un champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford). De plus si  $H^1(T, G) = 0$  (par exemple lorsque  $T$  est le spectre d'un corps ou d'un anneau de valuation discrète complet), alors  $(\mathcal{M}/G)(T) = \mathcal{M}(T)/G$ .  $\square$*

## Cas général

Revenons au cas général du quotient d'un champ algébrique par un schéma en groupes. Alors on n'a pas de description aussi précise que ci-dessus, cependant, comme on dispose

d'un atlas équivariant avec action libre, en s'inspirant de ce qui précède on obtient un champ quotient.

**Théorème 2.4.2** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique (resp. de Deligne-Mumford), et  $G$  un  $S$ -schéma en groupes lisse (resp. étale). Alors il existe un quotient catégorique  $\mathcal{M}/G$  de champs algébriques (resp. de Deligne-Mumford).*

**Preuve :** Choisissons un atlas équivariant  $U = G \times_S U_0 \rightarrow \mathcal{M}$  associé à  $f : U_0 \rightarrow \mathcal{M}$  (voir proposition 2.1.4). Rappelons que, en notation ensembliste, cet atlas est  $u = (g, u_0) \mapsto g.f(u_0)$ . Soit  $R = U \times_{\mathcal{M}} U$  et  $T = R \times_U R = U \times_{\mathcal{M}} U \times_{\mathcal{M}} U$  d'où une présentation pour  $\mathcal{M}$  comme dans 1.4.2 :

$$T \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_{jk}} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \end{array} R \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_i} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \end{array} U$$

Ici  $R$  et  $T$  sont munis de l'action diagonale induite de celle sur  $U$ . Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} U/G &\simeq U_0, \\ R/G &\simeq U \times_{\mathcal{M}} U_0, \\ T/G &\simeq U \times_{\mathcal{M}} U \times_{\mathcal{M}} U_0 \simeq (R/G) \times_{U/G} (R/G) \end{aligned}$$

En effet, pour voir par exemple que  $R/G \simeq U \times_{\mathcal{M}} U_0$ , on considère

$$\begin{aligned} R = (G \times U_0) \times_{\mathcal{M}} (G \times U_0) &\longrightarrow (G \times U_0) \times_{\mathcal{M}} U_0 \\ (g, u, h, v) &\mapsto (h^{-1}g, u, v) \end{aligned}$$

et il est immédiat de vérifier que c'est un quotient par  $G$  (même dans la catégorie des champs) en utilisant la section évidente  $(\gamma, u, v) \mapsto (\gamma, u, 1, v)$ . On procède de même pour  $T/G$ . Toutes les flèches du groupoïde ci-dessus passent au quotient de manière évidente : ce sont les projections sur les facteurs d'indices correspondants ( $U$  ou  $U_0$ ). Soit  $\mathcal{M}/G$  le champ défini par le groupoïde obtenu :

$$T/G \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_{jk}} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \end{array} R/G \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_i} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \\ \xrightarrow{\text{pr}_i} \end{array} U/G$$

Par [L-MB, 4.3.1], pour s'assurer que c'est un champ algébrique il ne reste qu'à vérifier

(i) que  $\overline{\text{pr}}_1, \overline{\text{pr}}_2$  sont lisses (resp. étales dans le cas Deligne-Mumford). Or compte tenu des hypothèses sur  $G$ , cela est devenu évident car  $\overline{\text{pr}}_1, \overline{\text{pr}}_2$  sont des composées de pullbacks des atlas  $U \rightarrow \mathcal{M}$  et  $U_0 \rightarrow \mathcal{M}$ , d'une part, et de la projection  $U = G \times_S U_0 \rightarrow U_0$ , d'autre part.

(ii) que  $\delta = (\overline{\text{pr}}_1, \overline{\text{pr}}_2) : R/G \rightarrow (U/G) \times_S (U/G)$  est séparé et quasi-compact. Or cela découle des mêmes propriétés pour la diagonale de  $\mathcal{M}$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{M}/G$  vérifie la propriété universelle. Soit  $\mathcal{N}$  un champ algébrique (muni de l'action triviale de  $G$ ) et  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme  $G$ -équivariant. Choisissons un atlas  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{N}$ . Alors un atlas équivariant  $U = G \times_S U_0$  pour  $\mathcal{M} \times_{\mathcal{N}} \mathfrak{U}$  donne lieu à un atlas équivariant pour  $\mathcal{M}$ , avec un carré commutatif d'atlas  $G$ -équivariants

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathfrak{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array}$$

De  $U \rightarrow \mathfrak{U}$  se déduisent des morphismes  $R \rightarrow \mathfrak{R}$  et  $T \rightarrow \mathfrak{T}$  (en notations évidentes :  $\mathfrak{R} = \mathfrak{U} \times_{\mathcal{N}} \mathfrak{U}$ , etc). Par ailleurs ces morphismes sont  $G$ -équivariants (pour l'action évidente

sur  $U, R, T$  et triviale sur  $\mathfrak{U}, \mathfrak{R}, \mathfrak{T}$ ) donc on obtient des morphismes de groupoïdes lisses (ou étales)

$$(R \rightrightarrows U) \rightarrow (R/G \rightrightarrows U/G) \rightarrow (\mathfrak{R} \rightrightarrows \mathfrak{U})$$

En passant aux champs associés, on a une factorisation  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G \rightarrow \mathcal{N}$ . Vérifier l'unicité de cette factorisation revient à montrer que le choix d'un atlas différent  $\mathfrak{U}' \rightarrow \mathcal{N}$  mène au même morphisme. Or la canonicité de la factorisation faite ci-dessus montre que les morphismes  $(R/G \rightrightarrows U/G) \rightarrow (\mathfrak{R} \rightrightarrows \mathfrak{U})$  et  $(R'/G \rightrightarrows U'/G) \rightarrow (\mathfrak{R}' \rightrightarrows \mathfrak{U}')$  coïncident après pullbacks  $\bullet \times_{\mathcal{N}} \mathfrak{U}'$  et  $\bullet \times_{\mathcal{N}} \mathfrak{U}$  (respectivement), ce qui conclut.  $\square$

### 3 2-quotient d'un champ algébrique dont les objets contiennent un groupe fixé d'automorphismes

Lorsqu'un champ  $\mathcal{M}$  paramétrise les objets d'un problème de modules, il arrive que ceux-ci possèdent tous (de manière « canonique ») un groupe fixe  $G$  dans leur groupe d'automorphismes. L'exemple typique est celui du champ classifiant  $BG$ , lorsque  $G$  est abélien. C'est le cas aussi pour le foncteur de Picard, car le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  agit sur tout faisceau inversible. Cette situation est typique également dans l'étude des schémas de Hurwitz de revêtements de groupe (fini)  $G$ , car un tel revêtement a pour automorphismes tous les éléments du centre  $Z(G)$ . Le résultat de cette section (3.0.2) donne le moyen d'éliminer ces automorphismes excédentaires. On le trouve mentionné dans [AV1, prop. 3.5.1] sous une forme incomplète ; une construction semblable est celle des *liens* présentée dans [Gi, chap IV] ou [DèDo]. Comme nous l'utiliserons beaucoup il est préférable d'écrire tous les détails ; nous le faisons dans le cas d'un groupe fini constant mais la construction est tout à fait générale.

La situation la plus générale dans laquelle on peut éliminer un groupe fixe  $G$  est lorsque celui-ci est distingué dans les groupes d'automorphismes des objets, comme nous allons le voir. Il faut formuler très précisément l'hypothèse à faire sur la « canonicité » des inclusions  $i_x : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(x)$ . Tout d'abord, il est naturel de supposer que la formation de  $G$  commute au changement de base, c'est-à-dire que pour chaque inclusion  $i_x$  et chaque changement de base  $f : T \rightarrow S$ , on a  $f^*i_x = i_{f^*x}$  (si on préfère,  $f^*g = gf^*$  pour tout  $g$ , où  $f^*$  désigne encore la flèche  $f^*x \rightarrow x$ ).

Mais, dans une catégorie fibrée en groupoïdes, par 1.3.2 les morphismes sont les diagrammes cartésiens (i.e. composés d'un isomorphisme et d'un changement de base). Il reste donc à décrire le comportement de  $G$  par rapport aux isomorphismes : restons maintenant dans une catégorie-fibre  $\mathcal{M}(S)$ . Il y a une action à gauche de  $G$  sur tous les  $\text{Hom}(x, y)$  (via  $i_y$ ). Ce que l'on souhaite est effectuer le quotient par cette action, et la contrainte est que la loi de composition des morphismes doit également passer au quotient. Dans cette optique il est clair que l'hypothèse à faire est celle de *normalité à gauche* que voici (nous calquons la terminologie sur celle des  $A$ - $B$ -bimodules de Bourbaki, *Algèbre*) :

#### Définitions 3.0.1

- (i) Soit  $G$  un groupe. On dit qu'un ensemble  $E$  est un  $G$ -*bi-ensemble* (fidèle) s'il est muni de deux actions (fidèles) de  $G$ , à gauche et à droite, compatibles entre elles i.e.  $(g.e).g' = g.(e.g')$ . On a donc une application  $G \times E \times G \rightarrow E$ ,  $(g, e, g') \mapsto g.e.g'$ .
- (ii) Soit  $E$  un  $G$ -bi-ensemble. On dit que  $G$  est *normal à gauche dans  $E$*  si  $\forall g \in G, \forall e \in E, \exists \tilde{g} \in G, e.g = \tilde{g}.e$ .

(iii) Dans un champ  $\mathcal{M}$  dont tous les objets  $x$  ont une injection  $i_x : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(x)$ , on dit que la formation de  $G$  est *compatible aux diagrammes cartésiens* si elle commute au changement de base et si  $G$  est normal à gauche dans les  $\text{Hom}_{\mathcal{M}(S)}(x, y)$ . En particulier,  $G$  est normal dans tous les  $\text{Aut}_S(x)$ .

En légère différence par rapport à cette définition, pour éviter le problème posé par l'unique objet de  $\mathcal{M}$  au-dessus du schéma vide (dont le groupe d'automorphismes est toujours trivial), dans l'énoncé final nous définirons les injections  $i_x$  comme des morphismes de faisceaux. Sous l'hypothèse de normalité ci-dessus il est clair que la composition des morphismes  $\text{Hom}(x, y) \times \text{Hom}(y, z) \rightarrow \text{Hom}(x, z)$  passe au quotient.

**Proposition 3.0.2** *Soit  $\mathcal{M}$  un  $S$ -champ algébrique, et  $G$  un groupe fini. On suppose que pour tout objet  $x \in \mathcal{M}(T)$  il y a une injection de faisceaux  $i_x : \underline{G}_T \hookrightarrow \underline{\text{Aut}}_T(x)$ , et la formation de  $i_x$  est compatible aux diagrammes cartésiens (définition 3.0.1). Alors,*

(1) *Il existe un champ algébrique noté  $\mathcal{M} // G$  et un morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} // G$  qui envoie les éléments de  $G$  (en tant qu'automorphismes d'objets de  $\mathcal{M}$ ) sur l'identité, avec la propriété universelle suivante : tout morphisme  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  qui envoie les éléments de  $G$  sur l'identité, se factorise par  $\mathcal{M} // G$ . La formation de  $\mathcal{M} // G$  commute au changement de base sur  $S$ . Les points géométriques de  $\mathcal{M} // G$  sont identiques à ceux de  $\mathcal{M}$ , mais ont pour groupe d'automorphismes le quotient par  $G$  du groupe d'automorphismes du point correspondant de  $\mathcal{M}$ .*

(2) *Si  $\mathcal{M}$  est un champ de Deligne-Mumford, alors  $\mathcal{M} // G$  l'est aussi. De plus,  $f$  est alors une gerbe étale (c'est-à-dire que  $f$  et sa diagonale sont des épimorphismes), localement (sur  $\mathcal{M} // G$ ) isomorphe à  $BG$ .*

(3) *Si  $\mathcal{M}$  a un espace modulaire grossier, alors  $\mathcal{M} // G$  a un espace modulaire grossier qui est le même que celui de  $\mathcal{M}$ .*

(4) *Si  $\mathcal{M}$  est séparé (resp. propre) sur  $S$ , alors  $\mathcal{M} // G$  également.*

**Preuve :** On définit un préchamp  $\mathcal{C}$  par  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{M})$  et

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(U)}(x, y) = \Gamma(U, \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}(U)}(x, y) / \underline{G})$$

où  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}(U)}(x, y) / \underline{G}$  est le faisceau quotient associé au préfaisceau quotient correspondant. Le quotient est pris pour l'action de  $G$  à gauche comme indiqué ci-dessus. Nous notons  $\mathcal{M} // G$  le champ associé.

(1) Établissons la propriété universelle, et laissons l'algébricité pour (2). Soit  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme qui envoie les éléments de  $G$  (en tant qu'automorphismes) sur l'identité. On définit  $\tilde{F}_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}$  comme étant l'identité sur les objets. Si  $x, y \in \mathcal{C}(U) = \mathcal{M}(U)$ ,  $F$  induit un morphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{M}(U)}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{N}(U)}(F(x), F(y))$ . Par hypothèse,  $F$  est  $G$ -invariant pour l'action de  $G \subset \text{Aut}_U(x)$  sur le membre de gauche et l'action triviale sur celui de droite, donc passe au quotient à travers  $\text{Hom}_{\mathcal{M}(U)}(x, y) / G$ . Ceci reste vrai après changement de base  $U' \rightarrow U$ , donc par la propriété universelle du faisceau quotient on obtient  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}(U)}(x, y) / G \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}(U)}(F(x), F(y))$ , et en passant aux sections globales on achève de définir  $\tilde{F}_0$  sur les morphismes. Par propriété universelle du champ associé, on obtient finalement un morphisme  $\tilde{F} : \mathcal{M} // G \rightarrow \mathcal{N}$  tel que  $F = \tilde{F} \circ f$ . Enfin il est clair à cause de 1.3.4 que pour  $k$  un corps algébriquement clos, on a

$$\begin{aligned} \text{Ob}((\mathcal{M} // G)(k)) &= \text{Ob}(\mathcal{M}(k)) \\ \text{Hom}_{(\mathcal{M} // G)(k)}(x, y) &= \text{Hom}_{\mathcal{M}(k)}(x, y) / G \end{aligned}$$

(2) Pour montrer que  $\mathcal{M} // G$  est algébrique on se donne une présentation  $R \rightrightarrows U$  de  $\mathcal{M}$  (lisse dans le cas Artin, étale dans le cas Deligne-Mumford). Soit  $\xi \in \mathcal{M}(U)$  l'objet correspondant à l'atlas choisi. Alors  $R = U \times_{\mathcal{M}} U \simeq \text{Isom}_{U \times_S U}(p_1^* \xi, p_2^* \xi)$  est muni canoniquement d'une action libre de  $G \subset \text{Aut}(p_2^* \xi)$ . Le quotient est bien défini comme espace algébrique. Comme les deux applications  $R \rightarrow U$  sont  $G$ -invariantes, on obtient après factorisation  $R/G \rightrightarrows U$ , pour lequel on vérifie aisément les axiomes de groupoïde compte tenu des hypothèses. Comme l'action est libre les deux morphismes  $R/G \rightarrow U$  sont encore lisses (resp. étales), donc le champ  $\mathcal{M} // G$  associé à ce groupoïde est algébrique et le morphisme canonique  $n : U \rightarrow \mathcal{M} // G$  est un atlas [L-MB, 4.3.1]. Il s'agit bien du même champ que celui défini ci-dessus. Enfin, comme  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M} // G$  ont un atlas commun, on a un triangle commutatif qui montre que  $f$  est un épimorphisme étale surjectif :

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ m \swarrow & & \searrow n \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M} // G \end{array}$$

Le fait que  $f$  soit une gerbe est local sur  $\mathcal{M} // G$ . Il suffit donc de montrer que c'est  $BG$  localement sur  $\mathcal{M} // G$ . Ceci revient essentiellement à trivialisier le toreur  $R \rightarrow R/G$  : en fait  $R \rightarrow U \rightarrow \mathcal{M} // G$  est un atlas et on va montrer que  $\mathcal{M} \times_{\mathcal{M} // G} R \simeq R \times BG$ . On a des présentations  $R \rightrightarrows U$  pour  $\mathcal{M}$  et  $R/G \rightarrow U$  pour  $\mathcal{M} // G$  de sorte que le produit fibré  $\mathcal{M} \times_{\mathcal{M} // G} R$  a une présentation  $R \times_{R/G} R \rightrightarrows U \times_U R$ , c'est-à-dire  $R \times R/G \rightrightarrows R$ , q.e.d.

(3) La propriété universelle montre que si  $q : \mathcal{M} \rightarrow M$  est un espace modulaire pour  $\mathcal{M}$ , alors il existe  $r : \mathcal{M} // G \rightarrow M$  avec  $rf = q$ . Voyons que  $r$  est l'espace modulaire grossier pour  $\mathcal{M} // G$ . La condition 1.3.13(i) d'un espace modulaire grossier provient de (1). Soit  $a : \mathcal{M} // G \rightarrow N$  un morphisme à valeurs dans un espace algébrique. Comme  $M$  est un espace modulaire grossier pour  $\mathcal{M}$ , il existe  $u : M \rightarrow N$  tel que  $af = uq$ . Comme  $q = rf$  et que  $f$  est un épimorphisme, on a  $a = ur$ . Ceci prouve 1.3.13(ii).

(4) Pour finir supposons  $\mathcal{M}$  séparé sur  $S$ . Le composé  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathcal{M} // G} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  est la diagonale de  $\mathcal{M}$ , donc représentable et propre par hypothèse. Comme la première flèche est un épimorphisme et la seconde représentable et séparée, cette dernière est propre. Or elle se déduit de la diagonale de  $\mathcal{M} // G$  par le changement de base  $f \times f$ , qui est un épimorphisme. Donc  $\mathcal{M} // G$  a une diagonale propre, il est séparé.

Pour finir supposons  $\mathcal{M}$  propre sur  $S$ . Compte tenu de [L-MB, 5.4(ii)], le résultat suivant est vrai car purement topologique : « soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme surjectif de  $S$ -champs, si  $\mathcal{X}$  est fermé (resp. universellement fermé) sur  $S$ , alors  $\mathcal{Y}$  aussi ». Appliquant cela à  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} // G$ , on montre que  $\mathcal{M} // G$  est universellement fermé sur  $S$ . Enfin, il est clair que  $\mathcal{M} // G$  est de type fini, il est donc propre sur  $S$ .

□

### Remarques 3.0.3

(1) On n'a pas à proprement parler d'action de  $G$  sur  $\mathcal{M}$  ( $G$  n'agit pas sur l'ensemble des points de  $\mathcal{M}$  mais sur chacun de ses points individuellement), et  $\mathcal{M} // G$  n'est donc pas un quotient, mais plutôt un *2-quotient* en liaison avec la structure de 2-catégorie de  $\text{Ch}/S$ . C'est pour cette raison qu'a été choisie la notation  $//$  en dépit du fait qu'elle entre en conflit avec d'autres utilisations (quotient G.I.T. par exemple).

(2) Le morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} // G$  n'est pas représentable. En effet le critère 1.3.11 qui affirme que, si  $f$  est représentable, on doit avoir pour tout point géométrique  $\xi \in \mathcal{M}$  des monomorphismes  $\text{Aut}(\xi) \rightarrow \text{Aut}(f(\xi))$ , est évidemment pris en défaut.

(3) Supposant  $\mathcal{M}$  de Deligne-Mumford et de plus séparé, on peut montrer que  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} // G$  est propre, en utilisant les critères valuatifs [L-MB, §7] comme dans la démonstration de (3). Ce morphisme est par ailleurs quasi-fini (mais non fini car pas même représentable).

(4) Pour l'hypothèse 3.0.1, un cas particulier important est celui où  $i_x : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(x)$  commute à tous les morphismes :  $G$  est alors central dans les groupes d'automorphismes.

(5) Si  $G$  est un groupe fini constant sur  $S$  et  $H$  est un sous-groupe distingué, alors  $BG \times_{B(G/H)} S \simeq BH$ . Si de plus  $G$  est abélien, alors  $BG // H \simeq BH$ . Soit  $\mathcal{M}$  un champ algébrique quelconque, et munissons-le de l'action triviale de  $G$  (abélien). Alors, cf remarque 2.3.5(2), les objets de  $\mathcal{M}/G$  ont tous  $G$  dans leur groupe d'automorphisme. Les foncteurs

$$\begin{aligned} \Psi(\mathcal{M}) &= \mathcal{M}/G \quad (\text{quotient par l'action triviale}) \\ \Phi(\mathcal{N}) &= \mathcal{N} // G \end{aligned}$$

établissent une équivalence entre la catégorie des champs algébriques et la catégorie des champs algébriques dont les objets ont tous  $G$  dans leur groupe d'automorphismes, qui sont des  $BG$ -fibrés triviaux.

## Chapitre II

# Champs de revêtements de courbes algébriques

L'objet principal de ce chapitre est l'étude du champ (de Hurwitz) des revêtements galoisiens de courbes algébriques lisses. Plusieurs définitions peuvent être choisies : la définition que nous retiendrons est celle du champ  $\mathcal{H}_{g,G}$  classifiant, de manière imprécise, les courbes de genre  $g$  munies d'une action d'un groupe  $G$  (un entier  $g \geq 2$  et un groupe  $G$  sont fixés une fois pour toutes). On peut si on préfère considérer un champ constitué de revêtements de courbes  $C \rightarrow D$ , avec les genres  $g(C) = g$  et  $g(D) = h$  fixés. Historiquement, c'est sous cette forme que Hurwitz a étudié ces espaces de modules, et en fait plus précisément le cas  $h = 0$  des revêtements de la droite projective. La définition que nous donnons ci-dessus se limite aux revêtements galoisiens mais cela a des implications pour le cas non galoisien (voir [BR]).

Les motivations pour étudier le champ de Hurwitz sont nombreuses. En effet ses liens avec d'autres espaces modulaires classiques ( $\mathcal{M}_g$  = modules des courbes de genre  $g$  ; modules des courbes avec structure de niveau ; modules des fibrés principaux ; correspondance de Hecke...) sont multiples, et il est à la source ou au but de nombreux morphismes naturels. Un des succès du champ  $\mathcal{H}_{g,G}$  a été son utilisation pour montrer l'irréductibilité de  $\mathcal{M}_g$  (Fulton [Fu]). Un autre exemple est l'application au problème de Galois inverse, où divers auteurs (Fried, Dèbes, Völklein) ont utilisé la géométrie de l'espace de Hurwitz pour réaliser des groupes finis comme groupes de Galois.

Faisons une remarque quant au formalisme utilisé : la technique des champs a montré sa pertinence et son ubiquité dans les problèmes de modules, mais dépasse de plus en plus ce cadre. Presque tout l'arsenal des outils de géométrie algébrique est maintenant développé pour les champs algébriques, dont la géométrie est étudiée pour son intérêt propre ; les champs ont maintenant des « grands frères » les  $n$ -champs ; les gerbes formalisent les problèmes de corps de définition...

Notre fil directeur est le désir de prolonger à  $\mathbb{Z}$  certaines constructions *globales* effectuées sur les champs de revêtements, mais qui usuellement sont proposées en évitant les caractéristiques qui divisent l'ordre du groupe de Galois  $G$ . Parmi celles-ci : la construction du champ algébrique qui les classifie, sa compactification, et l'étude du morphisme appelé *discriminant*, entre le champ de Hurwitz et un champ de courbes pointées, qui à une courbe avec  $G$ -action associe le lieu critique de l'action (c'est l'analogie du morphisme  $\mathcal{L}\mathcal{L}$  (Lyashko-Loojienga) de Ekedahl-Lando-Shapiro-Vainshtein [ELSV]).

Les résultats principaux du chapitre sont les suivants. Le paragraphe 1 est une brève revue des champs de courbes pointées. Après les définitions nécessaires, au paragraphe 2 nous discutons de la définition du morphisme discriminant. Cela nécessite une étude détaillée des diviseurs de ramification et de branchement, et laisse plusieurs questions ouvertes. Dans le paragraphe 3 nous exposons la théorie de Hurwitz des revêtements modérés d'après Bertin et Ekedahl (voir notamment [BR], [E]). Nous l'appliquons au paragraphe 4 pour proposer une compactification  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$  des espaces de modules de courbes lisses avec structure de niveau ; notre construction donne un champ lisse qui est une désingularisation du champ  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  de Deligne et Mumford. Une vertu essentielle de  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$  est qu'il a une signification modulaire claire (voir la remarque de Van Geemen et Oort [vGO, page 287]). En fait, si  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  est représentable, c'est l'espace modulaire grossier de  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$ . Enfin, dans le paragraphe 5, nous donnons un procédé de construction du  $\mathbb{Z}$ -champ de Hurwitz des courbes lisses qui s'appuie sur les structures de niveau abélien. En corollaire, le travail effectué pour compactifier le champ des courbes avec structure de niveau donne naturellement, dans le cadre de ce procédé, un champ propre qui compactifie  $\mathcal{H}_{g,G}$ .

## 1 Courbes algébriques

Ce paragraphe est entièrement composé des définitions indispensables pour la suite, concernant les courbes relatives lisses et stables, et les marquages. En ce qui concerne les champs de courbes pointées, indiquons que nous utiliserons les courbes  $r$ -pointées et  $r$ -taguées (en situation de ramification sauvage) pour définir le morphisme discriminant (voir 2.2).

### 1.1 Définitions : marquages, tagages

#### Définitions 1.1.1 [Courbes (et courbes pointées) lisses et stables]

(i) Une *courbe algébrique*  $C$  sur un corps  $k$  est un schéma projectif sur  $k$ , géométriquement connexe, de dimension 1 (et non vide). Une courbe est dite  *$r$ -pointée* si on a choisi  $r$  points distincts *lisses* ordonnés  $P_1, \dots, P_r \in C$ ,  *$r$ -marquée* si les points ne sont pas ordonnés, et  *$r$ -taguée* si les  $r$  points ne sont ni ordonnés, ni nécessairement distincts. Autrement dit, le tagage signifie que, si on préfère ne considérer que des points distincts, on affecte chacun d'une multiplicité. Ainsi, un  $r$ -marquage consiste en la donnée d'un diviseur effectif réduit de degré  $r$  sur  $C$ , et un  $r$ -tagage est la donnée d'un diviseur effectif quelconque de degré  $r$  (ces diviseurs étant inclus dans le lieu lisse de  $C$ ). Un automorphisme d'une courbe  *$r$ -pointée* est un automorphisme de  $C$  qui fixe les points  $P_i$ . Un automorphisme d'une courbe  *$r$ -marquée* ou  *$r$ -taguée* est un automorphisme de  $C$  qui stabilise le diviseur  $\sum_i P_i$ , c'est-à-dire qui permute les  $P_i$ .

(ii) Une courbe est dite *nodale* ou *semi-stable* si elle a pour seules singularités (éventuelles) des points doubles ordinaires, c'est-à-dire des points  $x \in C$  en lesquels l'anneau local complété est isomorphe à  $\frac{k[[x,y]]}{xy}$ .

(iii) Une courbe semi-stable (éventuellement  $r$ -pointée ou  $r$ -marquée) est dite *stable* (*stable  $r$ -pointée* ou *stable  $r$ -marquée*) si le groupe d'automorphismes de  $C$  (resp. de  $(C, \sum_i P_i)$ ) est fini. Cela équivaut à dire que toute composante rationnelle de  $C$  a au moins 3 points exceptionnels, un *point exceptionnel* étant un point non lisse ou un point marqué.

**Remarque 1.1.2** Dans notre terminologie, « nodale » et « semi-stable » sont des termes équivalents, contrairement à certains auteurs (par exemple [HaMo]).

Rappelons qu'un *diviseur effectif relatif*  $D$  sur un  $S$ -schéma plat  $X$  est un diviseur de Cartier effectif de  $X$ , qui est plat sur  $S$ , de sorte que pour tout changement de base  $T \rightarrow S$ ,  $D \times_S T$  est un diviseur de Cartier de  $X \times_S T$ . Pour alléger nous dirons souvent « diviseur relatif (sur  $S$ ) » pour « diviseur effectif relatif ». (Il n'y a qu'un endroit dans le texte où un diviseur relatif ne sera pas nécessairement effectif, et cela sera signalé alors : voir dans 2.2.)

### Définitions 1.1.3 [Définitions relatives]

Une *courbe lisse* (resp. *stable*, *semi-stable*) de base un schéma  $S$  est un morphisme de schémas  $\gamma : C \rightarrow S$  propre, plat et de présentation finie, dont les fibres géométriques  $C_s$  sont des courbes algébriques lisses (resp. stables). L'entier  $g(C) = \dim H^1(C_s, \mathcal{O}_{C_s})$ , qui est une fonction localement constante de  $s \in S$ , est le *genre* de  $C$ . La courbe est dite  $r$ -pointée,  $r$ -marquée ou  $r$ -taguée si elle est munie, respectivement, de  $r$  sections disjointes  $P_i : S \rightarrow C$ , d'un diviseur relatif  $\mathfrak{D}$  étale fini de degré  $r$  sur  $S$ , ou d'un diviseur relatif  $\mathfrak{D}$  fini de degré  $r$  sur  $S$ , tels que les fibres géométriques  $(C_s, \mathfrak{D}_s)$  sont des courbes  $r$ -pointées,  $r$ -marquées ou  $r$ -taguées. En particulier  $\mathfrak{D}$  est inclus dans le lieu lisse de  $C$ .

## 1.2 Champs de courbes stables et courbes stables pointées

Notre utilisation des champs de courbes stables pointées est orientée vers la définition du morphisme discriminant (voir introduction). Celui-ci est présenté dans le paragraphe 2. Un travail préparatoire nécessaire est de décrire les différentes variantes de ces champs de courbes pointées.

### Définition 1.2.1

(i) Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\overline{\mathcal{M}}_g$  a pour objets les courbes relatives stables  $C/S$  de genre (constant)  $g$ , et un morphisme entre  $C'/S'$  et  $C/S$  est un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{h} & S \end{array} \quad (\text{II.1})$$

(ii) Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$  a pour objets les courbes relatives stables  $r$ -pointées. Un morphisme entre  $(C'/S', P'_1, \dots, P'_r)$  et  $(C/S, P_1, \dots, P_r)$  est un diagramme cartésien (II.1) tel que  $f \circ P'_i = P_i \circ h$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

(iii) Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$  a pour objets les courbes relatives stables  $r$ -marquées. Un morphisme entre  $(C'/S', \mathfrak{D}')$  et  $(C/S, \mathfrak{D})$  est un diagramme cartésien (II.1) tel que  $\mathfrak{D}' = f^* \mathfrak{D}$ .

(iv) Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\mathcal{M}_{g,[r]}$  a pour objets les courbes relatives lisses  $r$ -taguées. Les morphismes sont les mêmes que dans (iii).

**Remarque 1.2.2** Il n'est pas évident de définir un champ de courbes stables taguées  $\overline{\mathcal{M}}_{g,[r]}$ , car il est difficile de caractériser le fait qu'une courbe stable munie d'un tagage ait un groupe d'automorphismes fini. Cependant on n'en aurait besoin dans cette thèse que si on voulait définir le discriminant de revêtements de courbes stables, sauvagement ramifiés, ce qui est pour l'instant un problème hors d'atteinte.

Indiquons néanmoins que l'on peut, si l'on veut, contourner cette difficulté en utilisant le champ des courbes semi-stables tout entier, qui est le champ  $\text{NOD}_g$  de [MB] (7.1 et 7.1.6). On définit alors un champ  $\text{NOD}_{g,[r]}$  dont les objets sont les courbes semi-stables munies d'un tagage. On montre, comme dans 1.2.5 ci-dessous, qu'on obtient un champ algébrique lisse (au sens d'Artin), mais il est non séparé et ce n'est pas un champ de Deligne-Mumford.

Rappelons les résultats fondamentaux concernant ces champs de courbes :

**Théorème 1.2.3** ([DM], [Kn2]) *Soit  $g \geq 0$  et  $r \geq 0$  tels que  $2g - 2 + r > 0$ . Les champs  $\overline{\mathcal{M}}_g$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$  sont des champs de Deligne-Mumford propres et lisses sur  $\mathbb{Z}$ , de dimension  $3g - 3 + r$ .  $\square$*

**Corollaire 1.2.4** *Soit  $g \geq 0$  et  $r \geq 0$  tels que  $2g - 2 + r > 0$ . Le champ  $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$  est le quotient  $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathfrak{S}_r$  (voir théorème 2.3.4). C'est donc un champ de Deligne-Mumford propre et lisse sur  $\mathbb{Z}$ , de dimension  $3g - 3 + r$ .*

**Preuve :** Il suffit de montrer que  $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)} \simeq \overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathfrak{S}_r$  car le quotient par  $\mathfrak{S}_r$  est un torseur (théorème 2.3.4). Le morphisme évident  $\overline{\mathcal{M}}_{g,r} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$  se factorise en un morphisme qui est un foncteur pleinement fidèle,  $u : \overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathfrak{S}_r \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ . Il suffit de vérifier que  $u$  est un épimorphisme, c'est-à-dire qu'il est « localement essentiellement surjectif ». Or soit  $(C, \mathfrak{D})$  une  $S$ -courbe stable marquée, après une extension étale  $S' \rightarrow S$ ,  $(C \times_S S', \mathfrak{D} \times_S S')$  provient de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}/\mathfrak{S}_r$ , q.e.d.  $\square$

Il est à noter qu'on n'a plus a priori de morphisme  $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r+1)} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ , analogue au morphisme de contraction  $\overline{\mathcal{M}}_{g,r+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ . Une exception est à noter cependant : si on considère une variante de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$  où les points sont regroupés « par paquets », alors on peut définir la contraction d'un ou plusieurs « paquets ».

**Corollaire 1.2.5** *Le champ  $\mathcal{M}_{g,[r]}$  est un champ algébrique de Deligne-Mumford séparé, de type fini, lisse de dimension  $3g - 3 + r$  sur  $\mathbb{Z}$ .*

**Preuve :** Le morphisme d'oubli évident  $\omega : \mathcal{M}_{g,[r]} \rightarrow \mathcal{M}_g$  est représentable (et même, schématique). En effet, soit  $f : T \rightarrow \mathcal{M}_g$  correspondant à une courbe  $X/T$  de genre  $g$ . Le produit fibré  $\mathcal{M}_{g,[r]} \times_{\mathcal{M}_g} T$  est le foncteur de Hilbert de  $r$  points sur  $X$  :

$$\text{Hilb}^r(X) \simeq \text{Sym}^r(X) = X^r/\mathfrak{S}_r$$

qui est (représentable par) un schéma de dimension relative  $r$ , lisse sur  $T$ .  $\square$

### Remarques 1.2.6

(i) Considérons le champ de courbes lisses pointées  $\mathcal{M}_{g,1}$ , qui est isomorphe à la courbe universelle au-dessus de  $\mathcal{M}_g$ . Alors on peut faire la remarque que  $\mathcal{M}_{g,[r]} = \text{Sym}^r(\mathcal{M}_{g,1})$  où

$$\text{Sym}^r(\mathcal{M}_{g,1}) := \frac{\mathcal{M}_{g,1} \times_{\mathcal{M}_g} \cdots \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,1}}{\mathfrak{S}_r}$$

Ceci fonctionne pour tout  $g \geq 0$  (notons que  $\mathcal{M}_0$  est le champ d'Artin  $B(\text{PGL}_2)$  classifiant de  $G = \text{PGL}_2$ , il a un espace modulaire grossier qui est le point sur  $\mathbb{Z}$ ). Malheureusement on ne peut pas prétendre donner une réponse au problème soulevé dans la remarque 1.2.2 en proposant de définir

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,[r]} := \text{Sym}^r(\overline{\mathcal{M}}_{g,1})$$

car ce dernier champ classifie des courbes avec  $r$  sections pointées, mais qui sont stables 1-pointées. (En revanche, bien sûr, on a  $\text{NOD}_{g,[r]} = \text{Sym}^r(\text{NOD}_{g,1})$ , voir [MB], 7.1.8.)

(ii) On peut définir des sous-champs localement fermés  $\mathcal{M}_{g,[r]}^\lambda \subset \mathcal{M}_{g,[r]}$ , pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s)$  de  $r$  ( $\sum \lambda_i = r$ ). Ceux-ci classifient les courbes de genre  $g$  avec un diviseur de type  $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s)$  donné. Précisément  $\mathcal{M}_{g,[r]}^\lambda$  est l'image du produit des diagonales

$$\Delta_{\lambda_1} \times \dots \times \Delta_{\lambda_s} : \underbrace{\mathcal{M}_{g,1} \times_{\mathcal{M}_g} \dots \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,1}}_{s \text{ facteurs}} \rightarrow \mathcal{M}_{g,[\lambda_1]} \times_{\mathcal{M}_g} \dots \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,[\lambda_s]} \rightarrow \mathcal{M}_{g,[r]}$$

**Question 1.2.7** Il y a un morphisme évident  $i : \mathcal{M}_{g,(r)} \rightarrow \mathcal{M}_{g,[r]}$ . C'est un monomorphisme, par conséquent il est représentable. Supposons que  $g \geq 2$ . Alors  $i$  est en fait une immersion ouverte, dense fibre à fibre (au-dessus de  $\mathbb{Z}$ ) et le complémentaire de  $\mathcal{M}_{g,(r)}$  dans  $\mathcal{M}_{g,[r]}$  est un fermé de codimension 1, défini (intuitivement) par l'incidence d'au moins deux sections. Par ailleurs le quotient  $\mathcal{M}_{g,r} \rightarrow \mathcal{M}_{g,(r)}$  est un toseur sous  $\mathfrak{S}_r$  ; il est donc naturel de se demander si ce toseur s'étend en un toseur au-dessus de  $\mathcal{M}_{g,[r]}$ .

## 2 Champs de revêtements sur $\mathbb{Z}$

Ce paragraphe se propose de donner un sens *indépendamment de la caractéristique des schémas de base* aux définitions des divers objets, morphismes, concepts attachés aux revêtements galoisiens. En particulier, on traite le cas des revêtements sauvagement ramifiés. Parfois le cas modéré inspire des réponses aux questions qui se posent, mais dans certaines limites ; nous verrons notamment au chapitre suivant (III) que les problèmes posés par la ramification sauvage ne peuvent en général être abordés sans l'introduction de nouveaux outils. Schématiquement le contenu du paragraphe est le suivant : définitions des champs de Hurwitz, discussion sur la ramification, étude de la functorialité et du morphisme discriminant.

*Mises à part les deux définitions suivantes, qui sont en vigueur partout dans le chapitre, ce paragraphe ne traite que de courbes lisses.*

**Définition 2.0.1** Une action d'un groupe fini  $G$  sur une courbe lisse ou stable  $C/S$  est un morphisme  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}_S(C)$ . Dans ce chapitre, toutes les actions sont supposées *universellement fidèles* c'est-à-dire que  $\Phi_s$  est supposé injectif sur chaque fibre au-dessus de  $S$ , ou encore, après tout changement de base  $S' \rightarrow S$ . Nous noterons  $(C, \Phi)$  ou  $(C, G)$ , et appellerons *G-courbe*, une courbe avec action.  $\square$

Rappelons qu'une courbe stable est projective sur la base [DM, th. 1.2 et corollaire], donc le schéma en groupes  $\text{Aut}_S(C)$  existe, et de plus il est fini et non ramifié sur  $S$  [DM, th. 1.11]. Donc dans ce cas un automorphisme non trivial  $\sigma : C \rightarrow C$  est non trivial sur chaque fibre, donc la condition de fidélité fibre à fibre est automatique.

Nous ne considérerons que des revêtements connexes, et ne le rappellerons plus. La définition générale utilisée sera donc la suivante :

**Définition 2.0.2** Soit  $S$  un schéma et  $Y$  un  $S$ -schéma. Un *revêtement* (éventuellement *plat*, ou *non ramifié*) de  $Y$  est un morphisme fini, surjectif, à fibres géométriquement connexes (éventuellement plat ou non ramifié) de  $S$ -schémas  $\pi : X \rightarrow Y$ .

*Désormais, dans ce paragraphe les courbes considérées sont lisses.*

## 2.1 Définitions de $\mathcal{H}_{g,G}$

Soit  $g \geq 2$  un entier et  $G$  un groupe fini.

**Définition 2.1.1** Le  $\mathbb{Z}$ -champ de Hurwitz  $\mathcal{H}_{g,G}$  a pour objets les couples formés d'une courbe relative lisse  $\gamma : C \rightarrow S$ , de genre  $g$ , et d'une action (universellement fidèle)  $\Phi : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(C)$ . Un morphisme entre  $(C'/S', \Phi')$  et  $(C/S, \Phi)$  est un diagramme cartésien (II.1) où  $f$  est  $G$ -équivariant.

C'est sous une autre forme que le lien avec les champs de revêtements quelconques (non nécessairement galoisiens) est le plus simple à établir. Par ailleurs cette définition sera aussi celle utilisée pour relier les champs de Hurwitz aux champs de courbes avec structure de niveau.

**Définition 2.1.2** Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\mathcal{H}'_{g,G}$  a pour objets les revêtements de  $S$ -courbes (lisses)  $\pi : C \rightarrow D$ , avec  $C$  de genre  $g$ , galoisiens de groupe  $G$ . Les morphismes sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ D' & \longrightarrow & D \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array} \quad (\text{II.2})$$

où  $f$  est  $G$ -équivariant et tous les carrés sont cartésiens.

On obtient un isomorphisme de champs  $\mathcal{H}_{g,G,\xi} \rightarrow \mathcal{H}'_{g,G,\xi}$  en associant, à une courbe  $C/S$  avec action  $\Phi : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(C)$ , le revêtement  $(C \rightarrow C/G)$ . En effet il est clair que ce foncteur est pleinement fidèle, par ailleurs il est essentiellement surjectif par définition de  $\mathcal{H}'_{g,G,\xi}$ .

Bien sûr, on peut adjoindre à  $C$  la donnée de l'action *et* du morphisme  $C \rightarrow D$ , d'où une troisième définition, équivalente aux précédentes, qui peut être mieux adaptée dans des circonstances où les opérations de quotient par un groupe et de passage à la fibre ne commutent pas :

**Définition 2.1.3** Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\mathcal{H}''_{g,G}$  a pour objets les couples formés d'un revêtement galoisien  $\pi : C \rightarrow D$  de groupe  $G$ , avec  $C$  de genre  $g$ , et d'un isomorphisme  $\iota : G \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_D(C)$  spécifié. Les morphismes sont les diagrammes (II.2) où  $f$  est  $G$ -équivariant.

Quelques remarques s'imposent sur les isomorphismes choisis dans la classification. Soit  $\pi : C \rightarrow D$  un revêtement, correspondant à une action  $\Phi : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(C)$  avec  $D \simeq C/G$ . Un automorphisme  $f$  de cet objet est un automorphisme  $f : C \rightarrow C$  qui est  $G$ -équivariant. Donc,  $\text{Aut}_{\mathcal{H}_{g,G}}(\pi)$  est inclus dans le centralisateur de  $G$  dans  $\text{Aut}_S(C)$ . Ce groupe est tout à fait différent du groupe  $\text{Aut}_{top}(\pi)$  utilisé en général pour la classification topologique des revêtements, i.e. l'ensemble des automorphismes  $h : C \rightarrow C$  tels que  $\pi \circ h = \pi$ . Ainsi

(i) il peut être plus petit, par exemple si  $G = \text{Aut}_S(C)$  on a

$$\text{Aut}_{\mathcal{H}_{g,G}}(\pi) = Z(G) \quad \text{Aut}_{top}(\pi) = G$$

(ii) il peut être plus gros, par exemple si  $C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  et  $\pi : C \rightarrow C$  est le quotient  $x \mapsto x^n$  :

$$\text{Aut}_{\mathcal{H}_{g,G}}(\pi) = \mathbb{G}_m \quad \text{Aut}_{top}(\pi) = G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Pour clore ces définitions, indiquons que l'on peut stratifier les champs de Hurwitz par des invariants liés à la ramification de l'action. Celle-ci est étudiée en détail dans le sous-paragraphe qui suit ; pour donner la définition suivante il suffit de savoir (voir 2.2.1) que, pour un revêtement de courbes lisses  $\pi : C \rightarrow D$ , le diviseur de ramification  $R \subset C$  est un diviseur relatif sur la base, dont la formation commute au changement de base. Le plus simple des invariants évoqués est le degré  $r = \deg(R)$  :

**Définition 2.1.4** Soit  $r \geq 0$  un entier. Le  $\mathbb{Z}$ -champ  $\mathcal{H}_{g,G,r}$  est le sous-champ ouvert et fermé de  $\mathcal{H}_{g,G}$  qui a pour objets les couples formés d'une courbe relative lisse  $\gamma : C \rightarrow S$ , de genre  $g$ , et d'une action (universellement fidèle)  $\Phi : G \hookrightarrow \text{Aut}_S(C)$ , telle que  $\deg(R) = r$ . Un morphisme entre  $(C'/S', \Phi')$  et  $(C/S, \Phi)$  est un diagramme cartésien (II.1) où  $f$  est  $G$ -équivariant.

Noter que  $r$  étant fixé, le genre  $g'$  de la courbe quotient  $C'/G$  est bien déterminé (par la formule de Riemann-Hurwitz).

## 2.2 Le morphisme discriminant

Dans ce paragraphe nous étudions les différentes notions qui gravitent autour des diviseurs de ramification  $R$  et de branchement  $B$ . Ceux-ci sont au cœur de la définition du morphisme discriminant  $\delta$ . Dans le cas modéré les diviseurs réduits associés à  $R$  et  $B$  sont plats sur la base ; la définition la plus simple (d'un point de vue géométrique) pour le discriminant est

$$\delta\left(\pi : C \rightarrow D\right) = (D, B_{\text{réd}})$$

Dans le cas général la meilleure situation possible est celle où l'on sait définir des diviseurs  $R^*$  et  $B^*$  dont les expressions coïncident avec celles de  $R_{\text{réd}}$  et  $B_{\text{réd}}$  lorsque la caractéristique est première à l'ordre du groupe  $G$ .

Evidemment, la ramification sauvage empêche d'éclaircir complètement la situation. Différentes formules naturelles (II.3, II.4) n'ont de démonstration qu'avec certaines hypothèses supplémentaires. Néanmoins de nombreux cas particuliers faisant intervenir la base  $S$ , ou la complexité du groupe  $G$ , donnent satisfaction. Il reste quelques questions ouvertes quant au lien entre ramification et points fixes ; ces questions sont présentées comme telles dans le texte.

### Diviseurs $R$ et $B$

Soit  $(\gamma : C \rightarrow S, G)$  une  $G$ -courbe relative lisse et  $\pi : C \rightarrow D = C/G$  le quotient. Dans la suite exacte de  $\mathcal{O}_C$ -modules

$$0 \rightarrow \pi^*\Omega_{D/S}^1 \xrightarrow{\phi} \Omega_{C/S}^1 \rightarrow \Omega_{C/D}^1 \rightarrow 0$$

on a l'injectivité à gauche car, après passage aux fibres au-dessus d'un point  $s \in S$ , on a affaire à des courbes lisses. En conséquence le module  $\Omega_{C/D}^1$  est plat sur  $S$  par [EGA4], 11.3.7. Les faisceaux  $\pi^*\Omega_{D/S}^1$  et  $\Omega_{C/S}^1$  sont localement libres de rang 1, et un générateur local de  $\Omega_{C/D}^1$  est donné par le déterminant  $f$  de l'application linéaire  $\phi$  entre ces faisceaux. Donc il est associé à  $\Omega_{C/D}^1$  un diviseur de Cartier effectif  $R$ , d'équation locale  $f$ . La formation de  $R$  commute au changement de base. De plus, de toute évidence,  $R$  est fini sur  $S$ . Ainsi le degré de  $R$  est constant, i.e.  $\deg(R) = \deg(\Omega_{C/S}^1 \otimes (\pi^*\Omega_{D/S}^1)^{-1}) = (2g_C - 2) - n(2g_D - 2)$  (bien sûr ce n'est rien d'autre que la formule de Riemann-Hurwitz).

**Définition 2.2.1** Le diviseur  $R = \text{Div}(\Omega_{C/D}^1)$  est appelé *diviseur de ramification* du revêtement. Le diviseur  $B = \pi_* R$  est appelé *diviseur de branchement*. Ce sont des diviseurs de Cartier relatifs sur  $S$  (dans  $C$  et  $D$  respectivement), dont la formation commute au changement de base.

On rappelle qu'une équation locale pour  $B$  est donnée par la norme d'une équation locale pour  $R$ . Il y a des formules de « dévissage » pour ces diviseurs :

**Proposition 2.2.2** Soit  $\gamma : C \rightarrow S$  une courbe relative lisse,  $G$  un groupe fini agissant sur  $C$ , et  $H \triangleleft G$  un sous-groupe distingué. On note  $D = C/H$ ,  $E = C/G$  et

$$C \xrightarrow{\sigma} D \xrightarrow{\rho} E$$

les quotients. Le quotient total est  $\pi = \rho \circ \sigma$ . On a alors

$$\begin{aligned} R_{C/E} &= \sigma^* R_{D/E} + R_{C/D} \\ B_{C/E} &= (\#H)B_{D/E} + \rho_* B_{C/D} \end{aligned}$$

**Preuve :** Soit les morphismes

$$\pi^* \Omega_{E/S}^1 \xrightarrow{\phi} \Omega_{C/S}^1, \quad \rho^* \Omega_{E/S}^1 \xrightarrow{\psi} \Omega_{D/S}^1, \quad \sigma^* \Omega_{E/S}^1 \xrightarrow{\chi} \Omega_{C/S}^1$$

On a la composition  $\phi = \chi \circ \sigma^* \psi$ , donc la première formule provient de la multiplicativité du déterminant. La seconde en découle en appliquant  $\pi_*$ , compte tenu du fait que  $\sigma_* \sigma^*$  est la multiplication par  $\deg(\sigma) = \#H$  pour les diviseurs de  $D$ .  $\square$

On peut relier le diviseur de ramification aux points fixes de l'action de  $G$  sur  $C$ . Le diviseur de points fixes  $C^G$  (voir III.1.2.2) n'est, en général, ni réduit ni plat sur  $S$ . Pour un revêtement modéré, cependant, les deux propriétés sont vraies. Un autre cas agréable est celui des groupes cycliques (y compris aux « mauvaises » caractéristiques) :

**Lemme 2.2.3** Si  $H \subset G$  est cyclique,  $C^H$  est un diviseur relatif sur  $S$ , dont la formation commute au changement de base.

**Preuve :** Soit  $x \in C^H$ , il suffit de montrer que  $\widehat{\mathcal{O}}_{C^H, x}$  est plat sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{S, s}$  où  $s = \gamma(x)$ . Comme  $C$  est lisse sur  $S$ , quitte à faire une extension étale sur  $S$  on peut supposer que  $\widehat{\mathcal{O}}_{S, s} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{C, x}$  a une section, donc l'extension de corps résiduels est triviale. Alors,  $\widehat{\mathcal{O}}_{C, x} = \widehat{\mathcal{O}}_{S, s}[[t]]$  par [SGA1], Exp. III, prop. 1.5. Soit  $h$  un générateur de  $H$  ; alors  $h(t) - t$  divise  $h^i(t) - t$  pour tout  $i$ . En effet pour une série formelle quelconque  $f = \sum f_k t^k$ , on a

$$f(h(t)) - f(t) = \sum f_k (h(t)^k - t^k) = (h(t) - t) \sum f_k (h(t)^{k-1} + \dots + t^{k-1}),$$

or  $h^i(t) - t = f(h(t)) - f(t)$  pour  $f = \sum_{j=0}^{i-1} h^j$ . Donc, localement, l'idéal qui définit le complété de  $C^H$  est principal engendré par  $h(t) - t = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ . Si  $a_i \in \mathfrak{m}_s$  pour tout  $i$ , alors l'action est triviale au voisinage de  $x$  sur la fibre au-dessus de  $s$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les  $a_i$  engendrent  $\widehat{\mathcal{O}}_{S, s}$ , et il s'ensuit que  $\widehat{\mathcal{O}}_{C^H, x}$  est plat sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{S, s}$  [Ma, cor. au th. 22.6].  $\square$

Lorsque la base est ponctuelle, la formule donnant la valuation de la différentielle d'une extension de corps locaux ([Se2, IV, prop 4]) en fonction des groupes de ramification supérieurs, permet d'explicitier le lien entre  $R$  et les diviseurs de points fixes :

**Proposition 2.2.4** *Soit  $\varphi$  l'indicateur d'Euler. Si la base  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos, on a*

$$R = \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} C^g = \sum_{\substack{H \subset G \\ \text{cyclique}}} \varphi(\#H) C^H \quad (\text{II.3})$$

**Preuve :** Il est clair que le support de  $R$  est l'ensemble des points de stabilisateur non trivial ; c'est donc aussi le support de  $\sum C^H$ , la somme portant sur les sous-groupes cycliques de  $G$ . Le nombre de générateurs de  $H$  cyclique est  $\varphi(\#H)$ . Localement en  $x$ , la longueur de  $C^H$  est la valuation de  $h(t_x) - t_x$  où  $t_x$  est une uniformisante de l'anneau de valuation discrète  $\mathcal{O}_{C_s, x}$  (notation «  $i_G(s)$  » dans [Se2, IV]). Par définition, le diviseur  $R \otimes k(s)$  est défini dans la fibre  $C_s$  par l'idéal annulateur de  $\Omega_{C/D}^1$ , i.e. par la différentielle  $\mathcal{D}_{C/D}$ . En rassemblant ces remarques et [Se2, IV, prop 4] on obtient :

$$\lg_x(R \otimes k(s)) = v_x(\mathcal{D}_{C/D} \otimes k(s)) \stackrel{[\text{Se2}]}{\cong} \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} \lg_x(C^g \otimes k(s)) = \lg_x \left( \sum_{\substack{H \subset G \\ \text{cyclique}}} \varphi(\#H) C^H \otimes k(s) \right)$$

ce que l'on voulait.  $\square$

La difficulté pour montrer la formule pour une base  $S$  générale provient en grande partie des « caprices » de la base. Il s'agit de comparer deux diviseurs relatifs (i.e.  $R$  et  $\sum C^g$ ) qui induisent les « mêmes familles » de diviseurs, c'est-à-dire qui sont égaux sur toutes les fibres géométriques.

**Proposition 2.2.5** *(cas modéré) Si  $S$  est un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ -schéma, l'égalité (II.3) est vraie.*

**Preuve :** Soit  $x \in C$  un point fermé appartenant à une fibre géométrique  $C_s$ . Il suffit de montrer la formule sur un voisinage formel de  $x$ . Ici on sait que le stabilisateur  $H$  est cyclique, engendré par un élément  $h$  d'ordre  $e$ . Comme ci-dessus, on peut supposer que

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C, x} = \widehat{\mathcal{O}}_{S, s}[[t]]$$

et  $h$  agit par  $h(t) = \zeta t$ , pour une racine primitive  $e$ -ème de l'unité  $\zeta$ . Alors  $\widehat{\mathcal{O}}_{D, \pi(x)} = \widehat{\mathcal{O}}_{S, s}[[u]]$  avec  $u = t^e$ . Lorsque  $g \notin H$  le diviseur  $C^g$  ne passe pas par  $x$ , et sinon, c'est-à-dire lorsque  $g = h^j \neq 1$ , son équation est  $\zeta^j t - t$ , donc  $t$  à une unité près. Par ailleurs le diviseur  $R$  a pour équation locale  $du/dt = et^{e-1}$ . Donc les deux diviseurs ont la même équation, à savoir  $t^{e-1}$ .  $\square$

**Proposition 2.2.6** *Si la base  $S$  est intègre, l'égalité (II.3) est vraie.*

**Preuve :** Il est connu dans ce cas que deux diviseurs relatifs identiques sur les fibres géométriques, sont égaux. On peut le voir en observant que  $R$  et  $\sum C^g$  proviennent du diviseur universel  $\text{Div}^r(C/S) = \text{Sym}^r(C/S)$  par deux morphismes  $S \rightarrow \text{Div}^r(C/S)$  ; or un tel morphisme est déterminé par l'image du point générique (géométrique).  $\square$

**Remarque 2.2.7** Les obstructions à établir l'égalité (II.3) viennent du fait que la base de la déformation universelle d'un revêtement sauvagement ramifié n'est pas lisse en général (ni même réduite). A contrario, lorsque la base de la déformation est lisse, on peut s'y ramener localement. Le cas particulier suivant s'en déduit :

**Proposition 2.2.8** *Si  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , l'égalité (II.3) est vraie quelle que soit la base  $S$ .*

**Preuve :** Comme précédemment il suffit de montrer l'égalité au voisinage formel d'un point. Soit  $x \in C$ ,  $s$  son image dans  $S$ , et  $R = \widehat{\mathcal{O}}_{S,s}$ . On peut supposer que la caractéristique résiduelle en  $s$  est  $p = 2$ . On considère le revêtement « local »

$$\widehat{\pi}_x : \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}) \rightarrow \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{D,\pi(x)})$$

Soit  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  la déformation universelle de la fibre spéciale  $\widehat{\pi}_x \otimes \text{id}_k$ . Elle a une base  $R_{vers}$  qui est formellement lisse sur un anneau de vecteurs de Witt (voir [BM1, th. 4.3.7]), donc par 2.2.6 l'égalité (II.3) est vérifiée pour  $f$ . Le revêtement  $\widehat{\pi}_x$  s'en déduit par un changement de base  $R_{vers} \rightarrow R$ . Or la formation de  $R$  et de  $\sum_{g \neq 1} C^g$  est compatible au changement de base, d'où le résultat.  $\square$

Il est probable qu'il existe des exemples qui mettent en défaut l'égalité (II.3), même pour  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , avec une base  $S$  suffisamment singulière.

### Diviseurs essentiels $R^*$ et $B^*$

L'identité (II.3), quand elle est valable, montre qu'apparaissent d'importantes multiplicités dans le diviseur de ramification (et donc des multiplicités encore plus grandes dans  $B = \pi_* R$ ). Dans l'optique de définir le morphisme discriminant, ceci pose problème car classiquement, dans la définition topologique, le discriminant d'un revêtement  $C \rightarrow D = C/G$  est le diviseur des points de branchement (réduit) porté par la base  $D$ .

Dans la situation générale où l'on ne suppose plus que  $|G| \in \mathcal{O}_S^\times$ , il semble très intéressant d'étendre la définition du discriminant de manière uniforme, indépendamment de la caractéristique. L'une des motivations pour cela est par exemple l'espoir de transposer des résultats accessibles en caractéristique 0 à la caractéristique  $p$ . Ainsi la question suivante se pose :

**Question 2.2.9** Chercher l'expression d'un diviseur  $R^*$  qui soit un diviseur de Cartier relatif sur  $S$ , de support égal à celui de  $R$ , et qui coïncide avec le diviseur  $R_{\text{réd}}$  au-dessus de l'ouvert d'inversibilité de  $|G|$  (i.e.  $(R^*) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$  est réduit).

### Incursion dans le cas modéré

Avant de hasarder des réponses, complétons notre connaissance de la situation modérée. On suppose donc pour l'instant que  $|G| \in \mathcal{O}_S^\times$ . Pour tout sous-groupe cyclique  $H \subset G$ , soit

$$e(H) = \sup \{ i \mid H = H_0 \subsetneq \cdots \subsetneq H_i \text{ chaîne de sous-groupes cycliques} \}$$

Par récurrence sur  $e$ , on définit pour tout  $H \neq 1$  le diviseur des points de stabilisateur égal à  $H$  :

$$\Delta_H = C^H \text{ si } e = 0, \quad \Delta_H = C^H - \sum_{\substack{K \supseteq H \\ \text{cyclique}}} \Delta_K \text{ si } e \geq 1.$$

**Proposition 2.2.10** *Le diviseur  $C^G$  et les diviseurs  $\Delta_H$  sont des diviseurs de Cartier relatifs, finis et étales sur  $S$ .*

**Preuve :** Si  $S = \text{Spec}(k)$ , comme  $|G| \in k^\times$ , on sait que le stabilisateur d'un point fixe est cyclique, et le diviseur de points fixes est réduit en ce point. Revenant à la situation relative, si  $G$  n'est pas cyclique on a  $C^G = \emptyset$ , et sinon, par le lemme 2.2.3 ci-dessus,  $C^G$

est plat ; il est étale car sur les fibres il est somme de points réduits. Enfin  $C^G$  est propre car  $C$  l'est.

La différence  $D' - D$  de deux diviseurs relatifs tels que  $D \leq D'$ , est encore un diviseur relatif. Il est facile d'établir les assertions suivantes par récurrence sur  $e$  : si  $e(H) \leq e$ ,  $e(K) \leq e$ , alors  $\Delta_H$  et  $\Delta_K$  sont disjoints lorsque  $H \neq K$  ; et  $\Delta_H$  est un diviseur relatif, fini et étale sur  $S$ .  $\square$

Le diviseur  $\Delta_H$  n'est pas stable sous  $G$  ; en revanche, la classe de conjugaison de  $H$ , notée  $[H]$ , fournit un diviseur  $\Delta_{[H]} := \sum_{K \in [H]} \Delta_K$  qui est stable. De plus les  $G$ -orbites dans  $\Delta_{[H]}$  ont  $[G : H]$  éléments. Ce qui précède montre que :

**Proposition 2.2.11** *Les diviseurs de Cartier relatifs sur  $S$  suivants*

$$R^* = \sum_{[H]} \Delta_{[H]} \quad \text{et} \quad B^* = \sum_{[H]} \frac{1}{[G:H]} \pi_*(\Delta_{[H]}) \quad (\text{II.4})$$

sont égaux à  $R_{\text{réd}}$  et  $B_{\text{réd}}$  (on rappelle qu'ici  $|G| \in \mathcal{O}_S^\times$ ).  $\square$

Une remarque permet de tester la robustesse des expressions proposées pour  $R^*$  et  $B^*$ . Compte tenu du fait que les diviseurs de points fixes sont réduits, les manipulations sur les sommes et différences de diviseurs relatifs se résument à dénombrer les points à stabilisateur non trivial. Or si  $G$  fini agit sur un ensemble  $X$ , le nombre de points à stabilisateur non trivial, s'il est fini, vaut

$$\sum_{H_1} |X^{H_1}| - \sum_{H_1, H_2} |X^{H_1} \cap X^{H_2}| + \sum_{H_1, H_2, H_3} |X^{H_1} \cap X^{H_2} \cap X^{H_3}| - \dots$$

(les  $H_i$  décrivent tous les uplets de sous-groupes cycliques de  $G$ ). On n'a pas de mal à montrer ainsi que

$$R^* = R_{\text{réd}} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \sum_{H_{i_1}, \dots, H_{i_n}} C^{H_{i_1}} \cap \dots \cap C^{H_{i_n}} \quad (\text{II.5})$$

En fait, dans le cas de caractéristique première à  $|G|$  où l'on s'est placé,  $C^{H_{i_1}} \cap \dots \cap C^{H_{i_n}} = C^{\langle H_{i_1}, \dots, H_{i_n} \rangle}$  est bien plat, vu la proposition 2.2.10. La raison est que si  $\langle H_{i_1}, \dots, H_{i_n} \rangle$  n'est pas cyclique, alors le diviseur de points fixes est vide. La formule (II.4) est simplement la formule (II.5) où la somme ne se fait que sur les  $H_{i_1}, \dots, H_{i_n}$  tels que  $\langle H_{i_1}, \dots, H_{i_n} \rangle$  est cyclique.

### Exemples 2.2.12

- (i) Si  $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  avec  $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , les deux formules donnent  $R^* = C^H + C^K - C^G$ .
- (ii) Si  $G = H \times K$  avec  $H = K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , alors  $R^* = C^H + C^K$  pour (II.4) et  $R^* = C^H + C^K - C^G$  pour (II.5). En caractéristique 2 le terme  $C^G$ , non nul, n'est pas nécessairement plat.

### Retour sur le cas général

Les notations  $\Delta_H, R^*, B^*$  sont conservées comme ci-dessus. Comme cas particulier de (II.4), lorsque le groupe  $G$  est abélien, alors la classe de conjugaison  $[H]$  est égale

au seul groupe  $H$ , donc les formules se lisent  $R^* = \sum_H \Delta_H$  et  $B^* = \sum_H \frac{1}{[G:H]} \pi_* \Delta_H$ . Le cas des groupes abéliens est agréable aussi car le théorème de Hasse-Arf nous apprend que les sauts dans la filtration des groupes de ramification (en notation supérieure) sont entiers. Nous allons voir qu'on peut alors donner une première inflexion dans le sens de la conjecture suivante :

**Conjecture 2.2.13** *Si  $G$  est un groupe cyclique, les diviseurs  $\Delta_H$  sont des diviseurs relatifs sur  $S$ , et les expressions (II.4) ci-dessus pour  $R^*$  et  $B^*$  définissent des diviseurs entiers relatifs sur  $S$ .*

La platitude de  $\Delta_H$  est acquise ; c'est son effectivité qui pose question. Il est possible que cette conjecture soit raisonnable dans le cas des groupes abéliens généraux. Nous allons montrer qu'elle est vérifiée dans le cas d'un  $p$ -groupe cyclique et lorsque la base est ponctuelle, i.e. lorsque  $S = \text{Spec}(k)$ .

**Proposition 2.2.14** *Soit  $C$  une courbe lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soit une action (fidèle) de  $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  sur  $C$ . Alors la conjecture 2.2.13 est vraie.*

**Preuve :** Soit  $\sigma$  un générateur de  $G$ , et pour  $0 \leq j \leq n-1$ , soient  $H_j = \langle \sigma^{p^j} \rangle$  les sous-groupes de  $G$ , totalement ordonnés :  $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{n-1} \supset \{1\}$ . On a  $\Delta_{H_j} = C^{H_j} - C^{H_{j-1}}$ , donc la positivité de ces diviseurs est ici évidente. Soit  $x \in C$ , si  $H_\ell$  est son stabilisateur, on note aussi  $\ell = \ell(x)$ . Le théorème de Hasse-Arf dit que la suite des groupes de ramification supérieure pour l'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}_{C,x}$  est (voir [Se2, IV, § 3])

$$G = G_{-1} \supset H_\ell = G_0 = \dots = G_{i_0} \supsetneq H_{\ell+1} = G_{i_0+1} = \dots = G_{i_0+p_{i_1}} \supsetneq \dots$$

Pour marquer la dépendance en  $x$  nous noterons  $i_0(x)$ ,  $i_1(x)$ , etc. Cela signifie, par définition, que pour tout  $j \geq \ell = \ell(x)$ , on a

$$\text{lg}_x(C^{H_j}) = i_0(x) + p i_1(x) + \dots + p^{j-\ell} i_{j-\ell}(x)$$

Alors,

$$C^{H_j} = \sum_{0 \leq \ell \leq j} \sum_{x, \ell(x)=\ell} \left( i_0(x) + p i_1(x) + \dots + p^{j-\ell} i_{j-\ell}(x) \right) x$$

Par différence, on obtient

$$\Delta_{H_j} = \sum_{0 \leq \ell \leq j} \sum_{x, \ell(x)=\ell} \left( p^{j-\ell} i_{j-\ell}(x) \right) x$$

De plus, si  $\ell(x) = \ell$ , l'orbite de  $x$  dans  $C$  a  $p^\ell$  éléments. Donc

$$\pi_*(\Delta_{H_j}) = p^j \sum_{0 \leq \ell \leq j} \sum_{y=\pi(x)} \left( i_{j-\ell}(x) \right) y$$

où  $y$  décrit les images des points de stabilisateur  $H_\ell$ . Il en découle que l'expression de  $B^*$  définit bien un diviseur entier, effectif de  $C$ .  $\square$

Malheureusement il est faux en général qu'un diviseur relatif sur  $S$ , qui sur chaque fibre au-dessus de  $S$  est multiple  $n$ -uple d'un diviseur relatif de la fibre, est globalement multiple  $n$ -uple d'un diviseur relatif. Cependant une remarque de Serre (remarque 2 suivant

la proposition 4 dans [Se2, IV, § 1]) laisse entendre qu'une globalisation du théorème de Hasse-Arf soit possible, d'où potentiellement une piste vers la démonstration de la conjecture ci-dessus.

Il faut tout de même mentionner le fait que lorsque  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , la réponse à 2.2.9 est évidente :

**Définition 2.2.15** Lorsque  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  on pose  $R^* = C^G$  et  $B^* = \pi_*(C^G)$ , appelés *diviseurs de ramification et de branchement essentiels*.

Donnons l'exemple des courbes de Potts, tiré du chapitre IV, avant d'appliquer ce qui précède au discriminant.

**Exemple 2.2.16** Les courbes de Potts de niveau  $p$  sont étudiées au chapitre IV. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 2$  et  $R = W(k)[\zeta]$  l'extension de l'anneau des vecteurs de Witt de  $k$  par adjonction d'une racine  $p$ -ème de l'unité. Soit  $\lambda = \zeta - 1$ , qui est une uniformisante de  $R$  ; soit enfin le polynôme de [OSS],  $P_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda^p}((\lambda X + 1)^p - 1) \in R[X]$ . Une courbe de Potts est une courbe  $C/R$ , de genre  $p - 1$ , munie d'une action du groupe  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{D}_p$  où  $\mathbb{D}_p$  est le groupe diédral d'ordre  $2p$  ; elle est hyperelliptique. Pour simplifier nous allons supposer que, quitte à grossir un peu  $R$ , les points fixes sont rationnels. On peut alors donner une équation affine (voir IV)

$$Y^2 = (P_\lambda(X) - \alpha)(P_\lambda(X) - \beta)$$

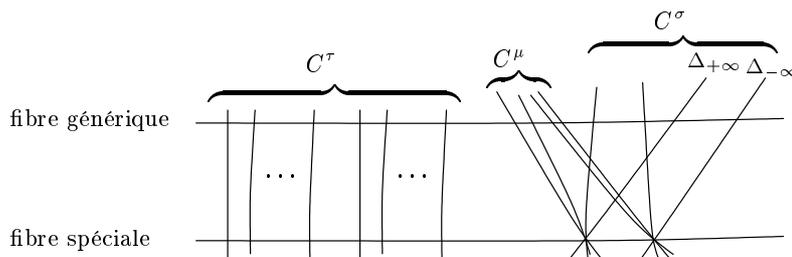
avec  $a, b \in R$  des racines de chacun des facteurs du second membre. Pour que la fibre spéciale soit lisse il faut imposer  $\alpha \not\equiv \beta$  modulo l'idéal maximal de  $R$ . Pour être complet précisons que cette équation affine décrit  $C$  en entier, à l'exception de deux sections à l'infini  $\Delta_{\pm\infty}$  (intuitivement,  $X = \infty$  et  $Y = \pm\infty$ ). Des générateurs de  $G$  sont  $\tau$  (involution hyperelliptique) et  $\sigma, \mu$  (générateurs du groupe diédral) définis par

$$\tau(X, Y) = (X, -Y)$$

$$\sigma(X, Y) = (\zeta X + 1, Y)$$

$$\mu(X, Y) = \left(\frac{-X+u}{\lambda X+1}, Y\right)$$

avec  $u = \lambda ab + a + b$ . Le diviseur  $C^\tau$  est le diviseur de degré  $2p$  constitué des sections  $R$ -rationnelles images par  $\sigma$  des deux sections  $Y = 0, X = a, b$ . Sur la carte affine ci-dessus son équation est  $\lambda X + 1$ . Le diviseur  $C^\sigma$  est situé en partie à l'infini ; son image dans le quotient  $C/\tau$  est visiblement de degré 2. Ainsi  $C^\sigma$  est de degré 4, il comprend les deux sections à l'infini, et deux sections disjointes supplémentaires. Enfin  $C^\mu$  est constitué de quatre sections qui se rejoignent deux par deux à l'infini sur la fibre spéciale (pour le voir, regarder là encore dans  $C/\tau$ ). Le dessin correspondant est présenté sur la page suivante.



On voit que sur la fibre spéciale  $C^\sigma$  est non réduit ; par ailleurs  $C^{\mathbb{D}_p} = C^\sigma \cap C^\mu$  n'est pas plat sur  $R$ . Malheureusement il n'est pas très intéressant de tester ici la conjecture 2.2.13 qui est trivialement vraie. La raison est que les seuls sous-groupes cycliques non maximaux de  $G$  sont  $H = \langle \sigma \rangle$  et  $K = \langle \tau \rangle$ , et le sous-groupe cyclique maximal qui les contient,  $L = \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \sigma\tau \rangle$  n'a pas de point fixe. Il semble difficile (en tous cas, laborieux) de fournir des exemples pour tester 2.2.13, car il faut utiliser des groupes suffisamment gros pour qu'il y ait des chaînes de sous-groupes cycliques et que  $\Delta_H$  ne se réduise pas à  $C^H$ .

### Fonctorialité

Aux sous-groupes de  $G$ , resp. aux sous-groupes distingués, sont attachés des morphismes naturels de restriction et de corestriction.

(1) Pour  $H \leq G$ , le morphisme de restriction associe à un couple  $(C, G)$  le couple  $(C, H)$  (l'action est restreinte à  $H$ ) :

$$\begin{aligned} \text{res}_H : \mathcal{H}_{g,G} &\longrightarrow \mathcal{H}_{g,H} \\ (C, G) &\longmapsto (C, H) \end{aligned}$$

Compte tenu du lemme 1.3.11, ce morphisme est représentable.

(2) Pour  $K \triangleleft G$ , le morphisme de corestriction associe à un couple  $(C, G)$  le couple  $(C/K, G/K)$  (voir définition 2.1.4 pour  $\mathcal{H}_{g,G,r}$ ) :

$$\begin{aligned} \text{cores}_{G/K} : \mathcal{H}_{g,G,r} &\longrightarrow \mathcal{H}_{g',G/K} \\ (C, G) &\longmapsto (C/K, G/K) \end{aligned}$$

où  $g'$  est le genre de la courbe quotient  $C/K$ . Ceci définit bien un morphisme de champs car la formation du quotient commute au changement de base ([BM2], th. 1.1). De plus on a  $\text{Aut}_{C/K}(C) = K$  (par théorie de Galois des courbes lisses) ; on en déduit qu'un automorphisme  $G$ -équivariant de  $C$  induit l'identité sur  $C/K$  si et seulement si il appartient à  $K \cap Z(G)$ . Donc  $\text{cores}_{G/K}$  se factorise en un morphisme représentable

$$\text{cores}_{G/K}^* : \mathcal{H}_{g,G,r} // K \cap Z(G) \rightarrow \mathcal{H}_{g',G/K}$$

### Le discriminant

Le discriminant est un avatar de  $\text{cores}_1^*(K = G)$  :

$$\text{cores}_1^* : \mathcal{H}_{g,G,r} // Z(G) \rightarrow \mathcal{M}_{g'}$$

La définition complète du discriminant fait intervenir les diviseurs de ramification et de branchement. La meilleure possible utilise  $R^*$  et  $B^*$  (2.2) ; si l'on ne veut pas être tributaire de la validité de la conjecture 2.2.13, on choisit  $R$  et  $B$  comme définis par 2.2.1. Quelle que soit la définition choisie, on stratifie alors le champ de Hurwitz par les degrés  $r = \deg(R)$  et  $b = \deg(B)$ , et le discriminant est donné par

$$\delta : \mathcal{H}_{g,G,r} // Z(G) \rightarrow \mathcal{M}_{g',[b]}$$

Dans le cas modéré où  $|G|$  est inversible dans les anneaux locaux des schémas de base, le discriminant peut même être défini sur une strate  $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$  ( $\xi$  est une donnée de ramification fixée, voir paragraphe 3).

Dans le cas de  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  pour un nombre premier  $p$ , on a une définition satisfaisante de  $R^* = C^G$  et  $B^* = \pi_*(C^G)$ , qui sont de degré égaux. En résumé :

**Proposition et définition 2.2.17** Soit  $g \geq 2$  un entier, et  $G$  un groupe fini. Soit  $r$  un entier ; le genre  $g'$  d'une courbe quotient  $D = C/G$ , avec  $C$  de genre  $g$  et la ramification étant de degré  $r$ , est bien déterminé. Soit  $S$  un schéma de base.

(i) Si  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ , i.e. en toutes caractéristiques, on définit le morphisme discriminant « total » par

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{H}_{g,G,r} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g',[b]} \\ (C, G, R) &\longmapsto (C/G, B) \end{aligned}$$

(ii) Si  $S = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}])$  ou si  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (plus généralement, si existent les diviseurs essentiels  $R^*$  et  $B^*$ ), on définit le discriminant « essentiel » par

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{H}_{g,G,r^*} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g',[b^*]} \\ (C, G, R^*) &\longmapsto (C/G, B^*) \end{aligned}$$

(iii) Lorsque  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  le discriminant essentiel est fini, surjectif au-dessus des points géométriques de  $\mathcal{M}_{g',[b^*]}$  qui sont de caractéristique première à  $p$ , et au contraire, a des fibres vides ou de dimension positive, au-dessus des points géométriques de caractéristique  $p$ .

**Preuve :** Il n'y a que (iii) à démontrer. L'assertion concernant les points de caractéristique première à  $p$  est conséquence de la théorie du groupe fondamental modéré de Grothendieck ([SGA1]). L'assertion concernant les points de caractéristique  $p$  est classique également. Le fait que  $\delta$  ne soit pas surjectif en certains points provient du fait que le diviseur de branchement d'un  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -revêtement a en chaque point une multiplicité de la forme  $m+1$ , où  $m$  est un conducteur de Hasse premier à  $p$  : ceci impose des contraintes sur le diviseur  $B^*$ , i.e. le discriminant ne peut arriver que dans les strates  $\mathcal{M}_{g',[b^*]}^\lambda$  avec  $\lambda_i = m_i + 1$  et  $m_i \geq 1$ ,  $(m_i, p) = 1$  (voir remarque 1.2.6(ii)). Le fait qu'il y ait des fibres de dimension positive est expliqué par exemple dans [Harb].  $\square$

### 3 Compactification des champs de revêtements modérés

C'est la partie modérée du champ de Hurwitz, à savoir  $\mathcal{H}_{g,G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ , dont l'étude a pu être poussée de manière satisfaisante. Il est stratifié par les champs  $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$  qui classifient les revêtements dont la ramification est fixée, égale à un certain type  $\xi$ . Le problème de la compactification est alors résolu de manière satisfaisante ; ce paragraphe, à peu près entièrement expositoire, reprend en quelques pages les concepts et résultats principaux de cette théorie.

#### 3.1 Revêtements modérés de courbes stables

Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p$ . Dans le cas modéré (i.e.  $n = |G|$  premier à  $p$ ), les invariants de ramification sont codés plus simplement par la *donnée de Hurwitz*, objet de la définition ci-dessous. Cette donnée est essentielle pour la compréhension de la compactification des champs de Hurwitz due à Bertin [BR] et Ekedahl, que nous utiliserons pour proposer une compactification du champ des courbes avec structures de niveau.

Soit maintenant  $C/k$  une  $G$ -courbe (lisse ou stable) sur un corps algébriquement clos  $k$ . En un point fixe  $x \in C$ , il y a une représentation fidèle du stabilisateur  $G_x$  dans le cotangent  $T_x^* = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ , i.e.  $\chi_x : G_x \hookrightarrow \text{GL}(T_x^*)$ .

- (i) Si  $x$  est un point lisse,  $T_x^* \simeq k$ , donc  $G_x$  est cyclique. Un point de l'orbite de  $x$ ,  $y = gx$ , a pour stabilisateur  $G_y = g.G_x.g^{-1}$  et pour caractère associé  $\chi_y(h) = \chi_x(g^{-1}hg)$ .
- (ii) Si  $x$  est un point double,  $T_x^* \simeq k^2$ . Alors  $G_x$  est cyclique ou diédral, selon qu'il contient ou non des automorphismes qui échangent les deux branches en  $x$ .

Pour l'action de  $G$  sur une courbe nodale  $C$ , il y a donc trois types de points fixes :

- (I) les points lisses.
- (II) les points doubles de stabilisateur cyclique.
- (III) les points doubles de stabilisateur diédral.

Pour différencier les points de type (II) et (III) lorsque le stabilisateur est d'ordre 2, nous adoptons une terminologie qui autorise le groupe diédral  $\mathbb{D}_1$  d'ordre 2, et distingue donc le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{D}_1$ .

**Définition 3.1.1** L'action de  $G$  sur  $C$  est dite *stable* en  $x$  si, pour tout  $g \in G_x$ , on a  $\det(\chi_x(g)) = 1$  si  $g$  fixe les branches, et  $\det(\chi_x(g)) = -1$  si  $g$  échange les branches.

Cette définition est motivée par le résultat suivant :

**Proposition 3.1.2 (Bertin, Ekedahl)** *Soit  $C$  une  $G$ -courbe stable sur un corps algébriquement clos  $k$ . Alors,  $(C, G)$  a une déformation universelle génériquement lisse si et seulement si l'action de  $G$  est stable.*  $\square$

Introduisons le *groupe des données de ramification* de  $G$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des couples constitués d'un sous-groupe cyclique  $H \leq G$  (éventuellement trivial) et d'un caractère primitif  $\chi$  de  $H$ . Pour  $(H, \chi) \in \mathcal{E}$  on note  $[H, \chi] = [H', \chi']$  lorsqu'il existe  $g \in G$  tel que  $H' = gHg^{-1}$  et  $\chi' = \chi(g^{-1} \cdot g)$ . On a vu que pour deux points d'une  $G$ -courbe lisse  $C$  dans la même  $G$ -orbite, on a  $[G_x, \chi_x] = [G_y, \chi_y]$ .

**Définition 3.1.3** Le *groupe des données de ramification* de  $G$  est le groupe abélien libre  $\text{Ram}(G) = \bigoplus_{[H, \chi]} \mathbb{Z} [H, \chi]$ .

**Définition 3.1.4** Soit  $(C/S, G)$  une  $G$ -courbe relative lisse. Soit  $s \in S$ . On appelle *donnée de ramification* ou *donnée de Hurwitz* du revêtement la somme  $\xi = \xi(C, G) = \sum [G_x, \chi_x]$  (localement constante sur  $S$ , voir [BR, 3.1.2, 3.1.3]) des classes  $[G_x, \chi_x]$  sur les orbites de points fixes d'une fibre  $C_s$ . Noter qu'un terme  $[H, \chi] = [G_x, \chi_x]$  peut apparaître plusieurs fois. Si la courbe est de plus  $r$ -pointée ou  $r$ -marquée, la donnée de Hurwitz est la somme de la donnée précédente  $\sum [H, \chi]$  et de  $r[1, 1]$ .

Voici venu le temps de définir le diviseur de ramification dans le cas des courbes stables. Soit  $C$  une courbe semistable sur un corps algébriquement clos  $k$ ; soit  $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$  la normalisation. Soit  $(y_i, z_i)$  les couples de points de  $\tilde{C}$  situés au-dessus des points doubles de  $C$ . Rappelons que le faisceau dualisant de  $C$ , noté  $\omega_{C/k}$ , est le faisceau (invertible) des 1-formes sur  $\tilde{C}$ , régulières à l'exception de pôles simples en les  $(y_i, z_i)$ , avec résidus opposés :  $\text{Res}_{y_i}(\omega) + \text{Res}_{z_i}(\omega) = 0$ . Donc en un point double  $x \in C$ , d'anneau local  $\hat{\mathcal{O}} \simeq \frac{k[[s, t]]}{st}$ , on a  $\hat{\omega}_{C, x} \simeq \hat{\mathcal{O}} \cdot (ds/s, -dt/t)$ .

**Proposition 3.1.5** *Soit  $\gamma : C \rightarrow S$  une courbe relative semi-stable avec action stable du groupe fini  $G$ . Soit  $\pi : C \rightarrow D = C/G$  le quotient, qui est une courbe nodale. On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \pi^* \omega_{D/S} \longrightarrow \omega_{C/S} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_C$ -module plat sur  $S$ , de support inclus dans l'ensemble des points fixes de type (I) et (III).

**Preuve :** Il suffit de montrer que  $(d\pi)^* : \pi^* \omega_{D/S} \rightarrow \omega_{C/S}$  est injectif sur toutes les fibres (alors le conoyau  $\mathcal{F}$  est plat), et que c'est un isomorphisme en un point de type (II). Soit donc  $s \in S$ ,  $k = k(s)$ ,  $x \in C_s$  et  $y = \gamma(x) \in D_s$ . On note  $\widehat{\mathcal{O}}_x$  et  $\widehat{\mathcal{O}}_y$  les anneaux locaux complétés.

Soit  $x$  un point lisse. Alors  $y$  est aussi lisse, les faisceaux dualisants sont simplement les faisceaux de 1-formes régulières, et l'injectivité est connue.

Soit  $x$  un point double d'isotropie cyclique  $H = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$  (éventuellement triviale). Alors l'action étant stable, on peut supposer qu'elle s'exprime, sur les deux branches en  $x$ , à l'aide d'un caractère primitif  $\chi \in \widehat{H}$  tel que

$$h(s) = \chi(h)s \quad \text{et} \quad h(t) = \chi^{-1}(h)t$$

Donc  $\widehat{\mathcal{O}}_y \simeq \frac{k[[u,v]]}{uv}$  où  $u = s^e$  et  $v = t^e$ . Alors localement  $(d\pi)^*$  envoie  $(du/u, -dv/v)$  sur  $e(ds/s, -dt/t)$  donc c'est un isomorphisme.

Enfin soit  $x$  un point double d'isotropie diédrale  $H = \mathbb{D}_e$ . L'action sur  $\widehat{\mathcal{O}}_x$  est décrite en plus par une involution qui échange les deux branches  $s, t$ . Le point  $y$  est alors lisse, et  $\widehat{\mathcal{O}}_y \simeq k[[u]]$  avec  $u = s^e + t^e$ . Localement  $(d\pi)^*$  envoie  $du$  sur  $(es^e.ds/s, et^e.dt/t) = e(s^e - t^e)(ds/s, -dt/t)$ , donc  $(d\pi)^*$  est bien injectif (mais ici non surjectif).  $\square$

**Définition 3.1.6** On appelle *diviseur de ramification* de  $\pi$  le diviseur  $R = \text{Div}(\mathcal{F})$ .

### 3.2 Le champ des revêtements modérés de courbes lisses

Le fait que la ramification soit modérée autorise à considérer une définition du champ de Hurwitz légèrement différente (mais équivalente au-dessus de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ ) de celles données au paragraphe 2 précédent. Celle-ci a l'avantage de préparer un terrain agréable en vue de la compactification (voir la discussion correspondante dans 3.3). Cette dernière définition revient à *marquer* la ramification des revêtements :

**Définition 3.2.1** Le  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ -champ  $\mathcal{H}_{g,G}^{ram}$  a pour objets les triplets  $(C, \Phi, R)$  où  $\gamma : C \rightarrow S$  est une courbe lisse de genre  $g$ ,  $\Phi$  est une action de  $G$  sur  $C$ , et  $R$  est le diviseur de ramification réduit de  $C \rightarrow C/G$ , et que l'on suppose somme de sections disjointes (noter que dans le cas modéré  $R$  est fini étale sur  $S$ ).

Par le même argument que dans 1.2.4 il y a un morphisme d'oubli  $\mathcal{H}_{g,G}^{ram} \rightarrow \mathcal{H}_{g,G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$  qui est un isomorphisme (il faut simplement faire l'observation que la formation de  $R$  commute au changement de base). Dorénavant, pour simplifier, nous noterons simplement  $\mathcal{H}_{g,G}$  pour  $\mathcal{H}_{g,G}^{ram}$ , tant qu'il n'y aura pas de risque de confusion.

Comme annoncé, la donnée de Hurwitz permet de stratifier  $\mathcal{H}_{g,G}$  ; plus précisément, si  $C$  est une  $G$ -courbe sur un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , avec  $(p, |G|) = 1$ , alors il est démontré dans [BR, 3.2.1] que les représentations de Hurwitz  $H^0(C, \omega_{C/k}^{\otimes m})$  ( $m \geq 0$ ) de  $G$  (et même, un nombre fini d'entre elles) déterminent la donnée de ramification de l'action. D'où :

**Définition 3.2.2** Soit  $\xi = \{V_m\}_{m \geq 0}$  une famille de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ - $G$ -modules fixée. Le champ  $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$  classe les courbes relatives lisses  $\pi : C \rightarrow S$  avec action de  $G$ , telles que pour tout  $m$  le faisceau  $\pi_* \omega_{C/S}^{\otimes m}$  ait des fibres isomorphes à  $V_m \otimes k(s)$ .

Noter que,  $\xi$  étant fixé, le genre  $g' = g(C/G)$  est déterminé par la formule de Riemann-Hurwitz. Le résultat est :

**Théorème 3.2.3 ([BR])** *Le champ  $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$  est un sous-champ ouvert et fermé de  $\mathcal{H}_{g,G}$ , c'est un champ algébrique de Deligne-Mumford de type fini et lisse sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ , équidimensionnel de dimension  $3g' - 3 + r$ .  $\square$*

Observons que, si  $r = r_1 + r_2$  et  $\xi = r_1[1, 1] + \sum_{H \neq 1} [H_i, \chi_i]$ , on obtient un champ algébrique pour les  $G$ -revêtements avec une ramification de degré  $r_2$  et  $r_1$  points marqués. En particulier  $\mathcal{M}_{g,r} = \mathcal{H}_{g,1,\xi}$  pour  $\xi = r[1, 1]$ .

### 3.3 Compactification du champ des revêtements modérés

Différentes méthodes ont permis de produire une compactification pour  $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ . A l'origine, il s'agit essentiellement des deux méthodes « concurrentes » de construction d'espaces modulaires grossiers. D'un côté, utilisation de la théorie G.I.T. adaptée par Bertin [BR], et de l'autre, extension aux champs par Wewers [We] du théorème de représentation des foncteurs non-ramifiés (Grothendieck, utilisé déjà dans la thèse de Fulton [Fu]). Il faut noter qu'une troisième méthode, plus puissante mais d'application techniquement coûteuse, est également disponible : il s'agit des théorèmes d'approximation d'Artin, qui ont évolué en une machinerie qui, par algébrisation des déformations formelles des objets, fournit la représentabilité de problèmes modulaires par un champ, ou un espace, algébrique.

Pour compactifier, on adapte la définition 3.2.1 ci-dessus en considérant le champ  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$  dont les objets sont les courbes relatives stables  $C/S$ , munies d'une action stable de  $G$ , et marquées par le diviseur de ramification réduit  $R_{\text{red}}$  (défini par 3.1.6) supposé somme de sections disjointes. On fixe toujours la ramification comme dans 3.2.2.

Le point crucial est que les points de ramification sont marqués et inclus dans le lieu lisse : cela interdit donc les isotropies diédrales aux points doubles des fibres  $C_s$  (points de type (III)), mais pas les isotropies cycliques (type (II)). Ainsi est évité le problème fâcheux des points doubles qui disparaissent au quotient par  $G$ . En résumé :

**Définition 3.3.1** Soit  $\xi = \{V_m\}_{m \geq 0}$  une famille de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ - $G$ -modules fixée. Le champ  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$  classifie les courbes relatives stables  $\pi : C \rightarrow S$  avec action stable de  $G$ , telles que le diviseur de ramification  $R$  soit somme de sections disjointes incluses dans le lieu lisse de  $C$ , et que pour tout  $m$  le faisceau  $\pi_* \omega_{C/S}^{\otimes m}$  ait des fibres isomorphes à  $V_m \otimes k(s)$ .

Ce choix a donc pour première conséquence le fait classique qu'en l'absence de points de type (III), le quotient d'une  $G$ -courbe stable  $C$  est une courbe stable marquée par les points de ramification  $(B, \{Q_i\})$  (points de type (I)) ; voir par exemple [BR]. Une seconde conséquence, exploitée dans le paragraphe suivant, est que la contribution « globale » à la déformation de  $(C, G, \{P_i\})$  est la même que la contribution « globale » à la déformation de  $(B, \{Q_i\})$ . Ces deux faits sont primordiaux pour étudier le discriminant.

Le fait d'imposer l'absence de points de type (III) n'altère pas la propriété du champ  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ . En effet, soit  $C/k$  une  $G$ -courbe lisse. Par unicité, le modèle stable acquiert une action de  $G$ . S'il y a des isotropies diédrales pour cette action, un processus d'éclatements (équivariants) permet de les éliminer, obtenant ainsi un théorème de réduction stable. Le résultat final est (lire aussi [E], th. 3.2) :

**Théorème 3.3.2 ([BR])** *Le champ  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$  est un champ algébrique de Deligne-Mumford propre et lisse sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ , équidimensionnel de dimension  $3g' - 3 + r$ . De plus,  $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$  est dense dans  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$  fibre à fibre.*  $\square$

### 3.4 Déformations des revêtements modérés et discriminant

La lissité du champ de Hurwitz  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$  est résultat de l'étude des déformations équivariantes des  $G$ -courbes stables. Pour être complet nous rappelons brièvement les principaux résultats de la théorie. Cette étude locale permet aussi de donner une description fine de la structure locale du morphisme discriminant, sous la forme du théorème 3.4.6.

Dans tout ce paragraphe  $C$  une courbe stable sur un corps algébriquement clos  $k$ , de genre  $g$ , marquée par des points  $P_1, \dots, P_r$  (lisses).

Soit  $W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt infinis de  $k$ , et  $\mathfrak{A}$  la catégorie des  $W(k)$ -algèbres locales artiniennes de corps résiduel  $k$ .

**3.4.1** Soit  $C$  une courbe stable sur un corps algébriquement clos  $k$ , de genre  $g$ , marquée par des points  $\{P_i\}$  (lisses). Soit  $A \in \mathfrak{A}$ ; une déformation de  $(C, \{P_i\})$  à  $A$  est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{C} \\ \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{Spec}(k) \end{array} \right)_{P_i} & & \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{Spec}(A) \end{array} \right)_{\mathcal{P}_i} \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Spec}(A) \end{array}$$

avec les conditions suivantes :  $\mathcal{C}$  est une courbe propre, plate sur  $A$ , et le diagramme est un carré cartésien (donc  $\iota$  est une immersion fermée). De plus  $\mathcal{P}_i \circ \text{can} = \iota \circ P_i$  pour tout  $i$ .

On définit le foncteur de déformations de  $(C, \{P_i\})$ , de la catégorie  $\mathfrak{A}$  dans la catégorie des ensembles, par

$$\text{Def}_{C, \{P_i\}}(A) = \{ \text{classes d'isomorphisme de déformations de } (C, \{P_i\}) \text{ à } A \}$$

Le résultat suivant est classique :

**Proposition 3.4.2** *L'espace tangent au foncteur  $\text{Def}_{C, \{P_i\}}$  s'identifie à*

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(\Omega_C^1, \mathcal{O}_C(-\sum P_i))$$

*De plus  $\text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^2(\Omega_C^1, \mathcal{O}_C(-\sum P_i)) = 0$ . En conséquence,  $\text{Def}_{C, \{P_i\}}$  est proreprésentable par une  $W(k)$ -algèbre formellement lisse de dimension  $3g - 3 + r$ .*  $\square$

**3.4.3** Supposons maintenant que  $C$  est munie de l'action d'un groupe fini  $G$ , le diviseur  $\sum P_i$  étant  $G$ -stable. Alors  $G$  agit naturellement sur  $\text{Def}_{C, \{P_i\}}(A)$ , fonctoriellement en  $A$ , par la règle  $g.(\mathcal{C}, \iota, \mathcal{P}_i) = (\mathcal{C}, \iota \circ g, g^{-1} \circ \mathcal{P}_i)$ .

On peut s'intéresser aux déformations équivariantes de  $C$ , c'est-à-dire les déformations de  $(C, G, \{P_i\})$  : ce sont des déformations comme ci-dessus, avec un relèvement à  $\mathcal{C}$  de l'action de  $C$  de telle sorte que le diviseur  $\sum \mathcal{P}_i$  soit  $G$ -stable. Notons que comme les  $P_i$  sont lisses, les sections  $\mathcal{P}_i$  sont elles-mêmes contenues dans le lieu lisse de  $\mathcal{C}$ . Utilisant le fait que  $C$  n'a pas d'automorphisme infinitésimal ([DM]), on observe que

$$\text{Def}_{C, G, \{P_i\}} = (\text{Def}_{C, \{P_i\}})^G$$

pour l'action de  $G$  sur  $\text{Def}_{C, \{P_i\}}$  vue au-dessus. Ici :

**Proposition 3.4.4** *L'espace tangent au foncteur  $\text{Def}_{C,G,\{P_i\}}$  s'identifie à*

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{C,G}}^1(\Omega_C^1, \mathcal{O}_C(-\sum P_i)) = \left( \text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(\Omega_C^1, \mathcal{O}_C(-\sum P_i)) \right)^G$$

*Si  $G$  est réductif (i.e. son ordre est non nul dans  $k$ ), alors  $\text{Def}_{C,\{P_i\}}$  est proreprésentable par une  $W(k)$ -algèbre formellement lisse de dimension  $3g' - 3 + r$ , où  $g'$  est le genre de  $C/G$ .  $\square$*

**3.4.5** Enfin supposons que les points  $\{P_i\}$  contiennent les points de ramification de  $C$ . Cela permet d'englober le cas d'un « quotient partiel » de la courbe, c'est-à-dire  $C \rightarrow C/H \rightarrow (C/H)/(G/H) = C/G$  pour  $H \triangleleft G$  un sous-groupe distingué. En effet, dans ce cas les points images  $P_i \in C/H$  des points de ramification de  $C \rightarrow C/G$ , contiennent la ramification de  $C/H \rightarrow C/G$ , et il est commode de les conserver dans l'étude par dévissage (la fonctorialité en  $G$  est détaillée dans 2.2). Comme les  $P_i$  sont lisses cela implique en particulier que

$$\text{il n'y a pas de point de ramification de type (III)} \quad (\text{II.6})$$

Soient  $y_1, \dots, y_d \in D$  les images des points doubles  $x_1, \dots, x_d \in C$ , et  $e_i$  l'ordre du groupe d'inertie en  $x_i$ . Sous l'hypothèse (II.6) les  $y_i$  sont des points doubles de  $D$ , et la courbe quotient  $D = C/G$  est stable marquée par les points de branchement  $Q_j$ , images des  $P_i$ . De plus le quotient par  $G$  induit un morphisme de foncteurs

$$\pi : \text{Def}_{C,G,\{P_i\}} \rightarrow \text{Def}_{D,\{Q_j\}}$$

Le théorème 3.4.6 ci-dessous mesure le défaut de  $\pi$  à être un isomorphisme : la réponse est entièrement contenue dans les points doubles et leur isotropie  $e_i$ .

**Théorème 3.4.6** *Le morphisme  $\pi$  est donné, pour des choix convenables de paramètres dans les anneaux de déformation, par*

$$\pi^* : W(k)[[\tau_1, \dots, \tau_d, \dots, \tau_{3g'-3+r}]] \longrightarrow W(k)[[t_1, \dots, t_d, \dots, t_{3g'-3+r}]]$$

avec  $\pi^*(\tau_i) = t_i^{e_i}$  pour  $1 \leq i \leq d$  et  $\pi^*(\tau_i) = t_i$  pour  $i \geq d+1$ .

**Preuve :** La clé de la démonstration est le principe local-global qui montre qu'il suffit de regarder le comportement de  $\pi$  localement sur les bases des déformations universelles, au voisinage des points doubles.

Considérons les foncteurs  $\text{Def}_{C,G,\{P_i\}}$  et  $\text{Def}_{D,\{Q_j\}}$ . On a des morphismes de spécialisation en les points doubles :

$$\text{Def}_{C,G,\{P_i\}} \rightarrow \prod_i \text{Def}_{\hat{\mathcal{O}}_{x_i}} \quad \text{et} \quad \text{Def}_{D,\{Q_j\}} \rightarrow \prod_i \text{Def}_{\hat{\mathcal{O}}_{y_i}}$$

Le principe local-global [DM, prop. 1.5] dit que ces morphismes sont formellement lisses, i.e. on a une surjection au niveau des espaces tangents. Les noyaux sont identifiés comme étant

$$H_G^1(C, T_C(-\sum P_i)) \quad \text{et} \quad H^1(D, T_D(-\sum Q_j))$$

Le morphisme  $\pi$  induit une flèche entre les deux suites exactes que nous venons de décrire :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_G^1(C, T_C(-\sum P_i)) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_{C,G}}^1(\Omega_C^1, \mathcal{O}_C(-\sum P_i)) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^d \text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{x_i}}^1(\hat{\Omega}_{\hat{\mathcal{O}}_{x_i}}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(D, T_D(-\sum Q_j)) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_D}^1(\Omega_D^1, \mathcal{O}_D(-\sum Q_j)) & \longrightarrow & \prod_{j=1}^d \text{Ext}_{\hat{\mathcal{O}}_{y_j}}^1(\hat{\Omega}_{\hat{\mathcal{O}}_{y_j}}, \widehat{\mathcal{O}}_{y_j}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de point de ramification de type (III), on montre que

$$H_G^1(C, T_C(-\sum P_i)) \xrightarrow{\sim} H^1(D, T_D(-\sum Q_j)),$$

(voir [BR]) c'est-à-dire que les contributions « globales » aux déformations sont identiques. Chacun des espaces vectoriels  $Ext_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}^1(\widehat{\Omega}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i})$  et  $Ext_{\widehat{\mathcal{O}}_{y_j}}^1(\widehat{\Omega}_{\widehat{\mathcal{O}}_{y_j}}, \widehat{\mathcal{O}}_{y_j})$  est de dimension 1, correspondant à un paramètre dans la déformation universelle. Donc, les anneaux versels de déformation  $R_{x_i}, R_{y_j}$  qui représentent les foncteurs de déformation des points doubles, sont des anneaux de séries formelles en une variable sur  $W(k)$ , et le principe local-global permet d'écrire ([BM1])

$$\begin{aligned} R_{C,G,\{P_i\}}^{vers} &= (R_{x_1} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} R_{x_d})[[t_1, \dots, t_N]] \\ R_{D,\{Q_j\}}^{vers} &= (R_{y_1} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} R_{y_d})[[t_1, \dots, t_N]] \end{aligned}$$

donc il ne reste qu'à regarder le morphisme de quotient  $R_y \rightarrow R_x$ , pour  $x$  (resp.  $y$ ) l'un des  $x_i$  (l'un des  $y_i$ ).

Les déformations universelles des points doubles, au-dessus de  $R_x, R_y$ , sont respectivement  $\frac{W(k)[[s,t,\lambda]]}{st-\lambda}$  et  $\frac{W(k)[[u,v,\mu]]}{uv-\mu}$ . Soit  $\sigma$  un générateur du stabilisateur  $G_x$ , cyclique d'ordre  $e$ . Quitte à changer les paramètres  $s, t$ , l'action de  $G_x$  sur la déformation universelle est donnée, pour une certaine racine  $e$ -ème de l'unité  $\zeta$ , par  $s \mapsto \zeta s$  et  $t \mapsto \zeta^{-1}t$ . Le quotient  $q : \frac{W(k)[[u,v,\mu]]}{uv-\mu} \rightarrow \frac{W(k)[[s,t,\lambda]]}{st-\lambda}$  est  $q(u) = s^e$ ,  $q(v) = t^e$  d'où  $q(\mu) = \lambda^e$ . Donc sur les bases des déformations on a

$$\begin{aligned} \pi_x^* : W(k)[[\mu]] &\rightarrow W(k)[[\lambda]] \\ \mu &\mapsto \lambda^e \end{aligned}$$

le résultat en découle. □

On voit donc que le quotient de la déformation universelle (équivariante) n'est pas la déformation universelle du quotient : la différence vient des points doubles. En fait, en un point double  $x$  d'image  $y$  (comme dans la preuve ci-dessus), l'anneau d'invariants de l'anneau de déformation local en  $x$  est  $\frac{W(k)[[u,v,\lambda]]}{uv-\lambda^e}$ , qui est strictement inclus entre  $\frac{W(k)[[u,v,\mu]]}{uv-\mu}$  et  $\frac{W(k)[[s,t,\lambda]]}{st-\lambda}$ .

## 4 Champs de courbes avec structures de niveau

Dans ce paragraphe nous utilisons l'existence de la compactification  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$  (voir 3.3.2) pour proposer une compactification modulaire du champ des structures de niveau. Pour le champ propre  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  proposé par Deligne et Mumford (suffisant pour l'application à l'irréductibilité de  $\overline{\mathcal{M}}_g$ ), défini par normalisation, les points à l'infini n'ont pas de description modulaire. Si  $G$  domine un niveau abélien  $n \geq 3$ , il est représentable par un espace algébrique, mais non lisse. A contrario, nous construisons ici un champ propre et *lisse* pour compactifier  $\mathcal{M}_g(G)$ , dont les points à l'infini ont une interprétation modulaire comme courbes stables avec structure de niveau (généralisée) ; on doit accepter de perdre la représentabilité.

Il y a trois façons de concevoir une structure de niveau sur une courbe  $C$ , équivalentes au moins lorsque la courbe est lisse : c'est

- (i) un revêtement étale galoisien de  $C$ ,

(ii) un homomorphisme (extérieur) surjectif depuis le groupe fondamental de  $C$  (définition de Deligne et Mumford),

(iii) dans le cas abélien, un revêtement étale (isogénie) de la jacobienne  $J(C)$ . Pour ce point de vue voir Serre [Se1, VI, n° 12, cor. à la prop. 11] ou [Mi, prop. 9.1]. Par dualité, un tel revêtement correspond à un sous-groupe fini de  $J(C)$ .

## 4.1 Structures de niveau sur les courbes lisses

Pour commencer, nous considérons exclusivement des courbes *lisses*. Pour une courbe relative lisse  $C/S$ , il existe des sections localement sur  $S_{\text{ét}}$ , ce qui permet de définir effectivement un faisceau (en groupes) étale  $\pi_1(C/S)^{\mathbf{P}}$  où un ensemble de nombres premiers  $\mathbf{P}$  est fixé, qui contient les caractéristiques résiduelles de  $S$  et  $|G|$  est premier à  $\mathbf{P}$ . Alors, une structure de niveau sur  $C$  est naturellement une section globale du faisceau  $\text{Hom}^{\text{ext}}(\pi_1(C/S)^{\mathbf{P}}, G)$  des homomorphismes surjectifs de  $\pi_1(C/S)^{\mathbf{P}}$  vers le groupe constant  $G$ .

Dans le cas des courbes stables en revanche, cette définition sera inexploitable. Prenons pour point de départ la définition classique à l'aide de la  $n$ -torsion de la jacobienne. La définition précise de la jacobienne relative est celle de [FGA, Exp. 236], à savoir  $J := \text{Pic}_{C/S}^{\tau}$  – voir aussi [GIT, Ch. 0, §5 et prop. 6.9]. On pose  $C[n] := J[n]$  :

**Définition 4.1.1 (provisoire)** Une *préstructure de niveau  $n$*  sur  $C/S$  est un isomorphisme de  $S$ -schémas en groupes  $\varphi : C[n] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g}$ .

**Proposition 4.1.2** Soit  $n \geq 3$  un entier et  $A = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ . Soit  $\mu_n \subset \overline{\mathbb{Q}}$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité, et  $S$  un schéma sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}, \mu_n]$ . Alors, étale-localement sur  $S$ , il y a une bijection (non canonique) entre l'ensemble des préstructures de niveau  $n$  sur  $C/S$  et l'ensemble des classes d'équivalence de revêtements étales  $\Sigma \rightarrow C$  (on rappelle que  $\Sigma$  est connexe, voir 2.0.2), de groupe  $A$ , où  $\Sigma' \sim \Sigma$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $A$ -équivariant  $\Sigma' \xrightarrow{\sim} \Sigma$  au-dessus de  $C$ .

**Preuve :** Le  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module  $A$  est muni d'une base canonique  $\mathcal{B}$ . Le choix d'une racine primitive  $n$ -ième de l'unité détermine un isomorphisme  $u : A \rightarrow \hat{A}$  entre  $A$  et son groupe de caractères (dual de Cartier). Par commodité d'écriture, dans cette preuve une préstructure de niveau sera un isomorphisme  $\varphi : \hat{A}_S \xrightarrow{\sim} C[n]$ . Nous notons enfin  $\hat{\mathcal{B}} = u(\mathcal{B})$ .

$\Rightarrow$  Soit  $\varphi : \hat{A}_S \xrightarrow{\sim} C[n]$  une préstructure de niveau sur  $C/S$ . Il suffit de construire un revêtement  $\Sigma \rightarrow C$  localement pour la topologie étale ; dans ce cas,  $C \rightarrow S$  a une section de sorte qu'un élément de  $C[n]$  est une classe d'isomorphisme  $[L]$  de faisceau inversible relatif sur  $C$  (rigidifié), de  $n$ -torsion. Choisissons, pour tout  $\beta \in \hat{\mathcal{B}}$ , un tel faisceau inversible  $L_\beta$  dans la classe  $\varphi(\beta)$ . Pour  $\chi = \sum \chi_\beta \beta$  élément de  $\hat{A}$ , on choisit alors  $L_\chi = \otimes_\beta L_\beta^{\chi_\beta}$  dans la classe  $\varphi(\chi)$ . On forme le faisceau d'algèbres finies sur  $\mathcal{O}_C$ ,  $\mathcal{A} = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} L_\chi$ , où la multiplication est donnée par  $L_\chi = \otimes L_\beta^{\chi_\beta}$  et les isomorphismes canoniques entre produits tensoriels. Le schéma  $\Sigma = \text{Spec}(\mathcal{A})$  est un revêtement (galoisien) étale de  $C$  car localement  $\mathcal{A}$  est produit tensoriel de  $2g$  algèbres de la forme  $\mathcal{O}_C[t]/t^n - f$  où  $f$  est inversible dans  $\mathcal{O}_C$ . Enfin on note que des choix différents de faisceaux  $L_\beta$  mènent à une algèbre isomorphe  $\mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ , d'où un isomorphisme  $A$ -équivariant  $f : \Sigma' \xrightarrow{\sim} \Sigma$ .

$\Leftarrow$  Soit  $\pi : \Sigma \rightarrow C$  un revêtement galoisien étale de groupe  $A$ . Le  $\mathcal{O}_C$ -module  $\pi_* \mathcal{O}_\Sigma$  est muni d'une action de  $A$ . Soit  $\pi_* \mathcal{O}_\Sigma = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} L_\chi$  sa décomposition en facteurs isotypiques. La multiplication de  $\pi_* \mathcal{O}_\Sigma$  induit un morphisme  $L_\chi \otimes L_{\chi'} \rightarrow L_{\chi+\chi'}$ , d'où en itérant  $L_\chi^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{O}_C$ . Comme  $\Sigma$  est intègre ce morphisme est injectif, et  $\pi$  est supposé étale, donc

c'est un isomorphisme. On définit une préstructure de niveau par  $\varphi(\chi) = [L_\chi]$ . Enfin, si on a deux revêtements équivalents  $f : \Sigma' \xrightarrow{\sim} \Sigma$  de  $C$ , alors  $\pi_* \mathcal{O}_{\Sigma'} = \pi_* f_* \mathcal{O}_{\Sigma'} \simeq \pi_* \mathcal{O}_\Sigma$ , et ces algèbres sont aussi isomorphes comme  $A$ -modules si  $f$  est  $A$ -équivariant. Il en résulte que les préstructures de niveau associées sont égales.  $\square$

On peut s'inspirer de ce résultat pour inclure dans notre définition le cas des structures de niveau non abélien. Considérons un groupe fini  $G$ ; bien sûr, pour que la définition soit non vide, il faut supposer que  $G$  est quotient du groupe fondamental  $\pi_g$  d'une surface de Riemann de genre  $g$ . De plus pour pouvoir utiliser le fondamental lemme de rigidité de Serre (rappelé ci-dessous), nous supposerons souvent aussi que  $G$  domine un niveau abélien  $n \geq 3$ , i.e. on a des surjections

$$\pi_g \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

**Définition 4.1.3** Soit  $G$  un groupe fini. Une *préstructure de niveau*  $G$  sur une courbe  $C/S$  de genre  $g$  est la donnée d'une classe d'équivalence de revêtements étales  $\Sigma \rightarrow C$ , de groupe  $G$ , où  $\Sigma' \sim \Sigma$  si et seulement si il existe un  $C$ -isomorphisme  $G$ -équivariant  $\Sigma' \xrightarrow{\sim} \Sigma$ . On notera souvent  $\varphi = [\Sigma \rightarrow C]$  cette classe.

La nécessité de faisceautiser (cf. définition de [DM]) n'est pas contournée. En d'autres termes, l'ensemble  $F(T)$  des préstructures de niveau sur  $C \times_S T$ , qui est un foncteur en  $T \in \text{Sch}/S$ , n'est pas un faisceau étale. En effet soit  $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  un recouvrement étale, on voit bien que le passage d'une classe  $[\Sigma_i \rightarrow C_i]$  à  $\Sigma_i \rightarrow C_i$  fait apparaître des automorphismes qui empêchent le recollement. Ceci nous conduit à poser :

**Définition 4.1.4** Soit  $G$  un groupe fini. Le faisceau des *structures de niveau*  $G$  est le faisceau étale associé au préfaisceau des préstructures de niveau sur  $C$ . Une *structure de niveau*  $G$  sur  $C/S$  est une section globale de ce faisceau.

Le champ des courbes avec structure de niveau, au sens de 4.1.4, coïncide bien avec celui défini par [DM] : en effet, pour Deligne et Mumford, un objet est un couple composé d'une courbe  $C/S$  de genre  $g$ , et d'une section globale

$$\alpha \in \Gamma(S, \text{Hom}^{\text{ext}}(\pi_1(C/S), G))$$

Étale localement sur  $S$ ,  $\alpha$  définit un revêtement étale  $\pi : \Sigma \rightarrow C$ , galoisien de groupe  $G$ , bien défini à un isomorphisme de revêtements équivariant près : c'est-à-dire un  $f : \Sigma' \rightarrow \Sigma$  qui est  $G$ -équivariant et qui vérifie  $\pi' = \pi \circ f$ . On retrouve bien la définition 4.1.4. Nous continuerons parfois à noter  $\varphi = [\Sigma \rightarrow C]$  une (pré)structure de niveau sur la courbe  $C$ . La définition suivante sera désormais la seule utilisée :

**Définition 4.1.5** Soit  $G$  un groupe fini. Le  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ -champ  $\mathcal{M}_g(G)$  a pour objets les courbes lisses munies d'une structure de niveau  $G : (C/S, \varphi = [\Sigma \rightarrow C])$ , et un morphisme entre  $(C'/S', \varphi')$  et  $(C/S, \varphi)$  est un diagramme cartésien (II.1) tel que  $\varphi' = f^* \varphi$ . Lorsque  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ , on notera  $\mathcal{M}_g(n)$  pour  $\mathcal{M}_g(G)$ .

De manière équivalente,  $\mathcal{M}_g(G)$  est le champ associé au préchamp dont les objets sont les couples  $(C, [\Sigma \rightarrow C])$ . Rappelons le résultat fondateur :

**Théorème 4.1.6 ([DM])** Soit  $g \geq 2$  et  $G$  un groupe fini. Le champ  $\mathcal{M}_g(G)$  est un champ algébrique de Deligne-Mumford de type fini et lisse sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ . Si  $G$  domine un niveau abélien  $n \geq 3$ ,  $\mathcal{M}_g(G)$  est représentable par un schéma.  $\square$

## 4.2 Structures de niveau sur les courbes stables

Avant toute chose rappelons le lemme de rigidité de Serre, qui sera indispensable sous la forme générale de Deligne [D, 3.5.1] valable pour les courbes stables.

**Lemme 4.2.1 (Lemme de Serre)** *Soit  $C$  une courbe stable sur un corps algébriquement clos  $k$ , et  $n \geq 3$  inversible dans  $k$ . Tout automorphisme de  $C$  agissant trivialement sur  $C[n]$  est l'identité.  $\square$*

Dans le but d'exhiber une compactification de  $\mathcal{M}_g(n)$  à l'aide de courbes stables, la définition 4.1.1 est maintenant délicate car sa généralisation devrait faire intervenir une compactification de  $\text{Pic}_{C/S}$ . De nombreux auteurs ont proposé de telles compactifications, mais semble-t-il peu adaptées au problème qui nous occupe. L'approche par la théorie de Hurwitz, via la définition des structures de niveau comme revêtements étales, présente le mérite supplémentaire de traiter les structures de niveau  $G$  général. Soit  $G$  un groupe fini, on commence par poser

$$\tilde{g} = |G|(g - 1) + 1 ; \quad (\text{II.7})$$

c'est, par la formule de Riemann-Hurwitz, le genre d'une courbe  $\Sigma$  revêtement étale d'une courbe  $C$  de genre  $g$ , le groupe de Galois du revêtement étant  $G$ . Le champ  $\mathcal{H}_{\tilde{g}, G, \emptyset}$  est la strate de  $\mathcal{H}_{g, G} \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}])$  correspondant à la donnée de ramification vide  $\xi = \emptyset$ , i.e. le champ des revêtements galoisiens étales modérés de groupe  $G$ . Une courbe du bord de  $\overline{\mathcal{H}}_{g, G, \emptyset}$  est une courbe stable avec action « quasi-libre » c'est-à-dire libre en dehors des points doubles :

**Définition 4.2.2** Soit  $C/S$  une courbe relative stable, et  $G$  un groupe fini. Un revêtement  $\Sigma \rightarrow C$ , galoisien de groupe  $G$ , sera dit *quasi-étale* si l'action de  $G$  sur  $\Sigma$  est libre sur le lieu lisse de  $C$ , et avec des stabilisateurs cycliques (éventuellement triviaux) aux points doubles. Une *préstructure de niveau  $G$*  sur  $C$  est une classe d'équivalence de revêtements quasi-étales  $\Sigma \rightarrow C$ , de groupe  $G$ , où  $\Sigma' \sim \Sigma$  si et seulement si il existe un  $C$ -isomorphisme  $G$ -équivariant  $\Sigma' \xrightarrow{\sim} \Sigma$ . Une structure de niveau  $G$  sur  $C$  est une section globale du faisceau fppf associé au préfaisceau des préstructures de niveau.

Avant d'introduire le champ classifiant les structures de niveau sur les courbes stables (au paragraphe suivant), nous traduisons le lemme de Serre qui a des conséquences fortes sur les automorphismes d'un revêtement quasi-étale. Soit  $\pi : \Sigma \rightarrow C$  un tel revêtement ; il y a une action effective de  $G$  sur  $\Sigma$ . Parmi les automorphismes de  $\Sigma$ , notons  $\text{Aut}_G(\Sigma)$  l'ensemble de ceux qui sont  $G$ -équivariants, et  $\text{Aut}_C(\Sigma)$  ceux qui sont des automorphismes du revêtement, i.e.  $f$  tel que  $\pi \circ f = \pi$ . On a des inclusions évidentes du centre  $Z(G)$  dans  $\text{Aut}_G(\Sigma)$  et  $\text{Aut}_C(\Sigma)$ . On peut alors énoncer :

**Proposition 4.2.3** *Soit  $C/S$  une courbe relative stable de genre  $g$ , et  $G$  un groupe fini dominant un niveau abélien  $n \geq 3$ . Soit  $\pi : \Sigma \rightarrow C$  un revêtement quasi-étale de groupe  $G$  (par exemple un revêtement étale). Alors,  $\text{Aut}_G(\Sigma) \subset \text{Aut}_C(\Sigma)$ .*

**Preuve :** Soit  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  un  $S$ -automorphisme  $G$ -équivariant. Il passe donc au quotient par  $G$  en un automorphisme  $\tilde{f}$  de  $C$ , avec  $\pi f = \tilde{f} \pi$ . Il faut montrer que  $\tilde{f} = \text{id}$ . D'autre part, en vertu de la propriété de non-ramification du groupe d'automorphismes  $\text{Aut}_S(C)$  (voir [DM]), il suffit de montrer que  $\tilde{f} = \text{id}$  sur les fibres géométriques, car alors ce sera vrai globalement.

On a un quotient  $G \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ , soit  $H$  le noyau et  $\Sigma' = \Sigma/H$  qui est un revêtement de  $C$  de groupe  $A = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ . En remplaçant  $\Sigma$  par  $\Sigma'$  on se ramène à  $G = A$ , ce que l'on suppose jusqu'à la fin de la preuve. Alors l'action de  $\tilde{f}$  sur  $\pi_* \mathcal{O}_\Sigma$  n'est autre que le comorphisme de  $f$ , à savoir  $\pi_* f^\sharp : \pi_* \mathcal{O}_\Sigma \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_\Sigma$ . Or, du fait que  $f$  est  $A$ -équivariant,  $\pi_* f^\sharp$  est un isomorphisme de  $A$ - $\mathcal{O}_C$ -modules, en particulier il respecte la décomposition en facteurs isotypiques  $\pi_* \mathcal{O}_\Sigma = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} L_\chi$ , i.e. induit des isomorphismes  $L_\chi \xrightarrow{\sim} L_\chi$ . Dans le cas lisse les  $L_\chi$  forment une base de  $C[n]$ , donc par le lemme de Serre 4.2.1, ceci implique que  $\tilde{f} = \text{id}$ . Dans le cas stable, le revêtement  $\pi$  n'est plus nécessairement plat, et les  $L_\chi$  sont simplement, a priori, des faisceaux sans torsion de rang 1. Il est néanmoins montré dans [BR] qu'on a encore  $\pi_* \mathcal{O}_\Sigma \supset C[n]$ , de sorte que  $\tilde{f}$  agit encore trivialement sur  $C[n]$ , et le résultat reste valide.  $\square$

### 4.3 Compactification modulaire de $\mathcal{M}_g(G)$

Il est immédiat de voir que les éléments du centre  $Z(G)$  sont des automorphismes pour tous les objets de  $\mathcal{H}_{g,G}$  (définitions 2.1.1 et 3.2.1); d'après la proposition I.3.0.2 on peut donc poser

$$\mathcal{N}_g(G) := \mathcal{H}_{\bar{g},G,\emptyset} // Z(G)$$

A la base de notre approche est l'observation :

**Proposition 4.3.1** *On a un isomorphisme  $\mathcal{N}_g(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_g(G)$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ .*

**Preuve :** Un morphisme  $\mathcal{H}_{\bar{g},G,\emptyset} \rightarrow \mathcal{M}_g(G)$  est défini en associant à un revêtement étale  $\Sigma \rightarrow C$  le couple  $(C, [\Sigma \rightarrow C])$ . Par définition de la classe  $[\ ]$ , ce morphisme envoie un automorphisme  $z \in Z(G)$  de  $\Sigma$  sur l'identité, donc il se factorise en  $u : \mathcal{N}_g(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_g(G)$ . De toute évidence,  $u$  est un épimorphisme. Il nous reste à voir qu'il est pleinement fidèle. Prenons deux objets dans  $\mathcal{N}_g(G)$  : localement sur la base, ce sont des revêtements  $\pi : \Sigma \rightarrow C$  et  $\pi' : \Sigma' \rightarrow C'$ . Nous nous reportons à I.3.0.2 qui dit que quitte à localiser encore (c'est indolore puisque les Hom sont des faisceaux), un morphisme entre ces objets est une classe d'équivalence de diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tilde{z}} & C \times_{C'} \Sigma' & \xrightarrow{f} & \Sigma' \\ \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\ C & & & \xrightarrow{h} & C' \end{array}$$

avec  $z \in Z(G)$ . Dans  $\mathcal{M}_g(G)$ , cela veut exactement dire que  $h^*(\varphi') = \varphi$  où  $\varphi = [\Sigma \rightarrow C]$ ,  $\varphi' = [\Sigma' \rightarrow C']$ . Donc il y a une correspondance bijective entre  $\text{Hom}(\pi, \pi')$  et  $\text{Hom}(u(\pi), u(\pi'))$ .  $\square$

On est donc mené à la définition suivante :

**Définition 4.3.2** On définit une compactification naturelle de  $\mathcal{M}_g(G) = \mathcal{N}_g(G)$  comme étant le  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ -champ algébrique propre et lisse (voir I.3.0.2)

$$\overline{\mathcal{N}}_g(G) := \overline{\mathcal{H}}_{\bar{g},G,\emptyset} // Z(G)$$

Il y a une immersion ouverte  $\mathcal{N}_g(G) \rightarrow \overline{\mathcal{N}}_g(G)$ , topologiquement dense fibre à fibre.  $\square$

**Remarque 4.3.3** En général  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$  n'est pas représentable, même lorsque  $G$  domine un niveau abélien  $n \geq 3$ . On a (4.2.3)

$$Z(G) \subset \text{Aut}_G(\Sigma) \subset \text{Aut}_C(\Sigma)$$

or de par l'aspect combinatoire des courbes stables, la dégénérescence stable d'une courbe lisse peut acquérir des automorphismes supplémentaires, qui rendent strictes ces inclusions. Des exemples de ce fait sont donnés dans [BR], où est proposée une étude détaillée de chacune des deux inclusions ci-dessus.

Rappelons que Deligne et Mumford ont défini une compactification de  $\mathcal{M}_g(G)$  en considérant le morphisme d'oubli  $\mathcal{M}_g(G) \rightarrow \mathcal{M}_g$  et en posant  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  égal à la normalisation de  $\overline{\mathcal{M}}_g$  relativement à  $\mathcal{M}_g(G)$ . Nous allons comparer cette compactification à  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$ . On note que par Deligne [D, prop. 3.5], si  $G$  est un groupe fini dominant un niveau abélien  $n \geq 3$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  est représentable par un espace algébrique.

**Théorème 4.3.4** *Il y a un morphisme  $q : \overline{\mathcal{N}}_g(G) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g(G)$  qui donne une désingularisation de  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ . Si  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  est représentable (par exemple si  $G$  domine un niveau abélien  $n \geq 3$ ), alors c'est l'espace modulaire grossier de  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$ .*

**Preuve :** Considérons le produit fibré sur  $u$  et  $v$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{X} & \xrightarrow{b} & \overline{\mathcal{M}}_g(G) \\ & \nearrow i & \downarrow a & & \downarrow v \\ \mathcal{N}_g(G) & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{N}}_g(G) & \xrightarrow{u} & \overline{\mathcal{M}}_g \end{array}$$

Le morphisme de normalisation  $v : \overline{\mathcal{M}}_g(G) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$  est représentable, fini et surjectif, donc il en est de même pour  $a$ . Par ailleurs, par la proposition 4.3.1,  $a$  a une section  $i$  sur l'ouvert dense  $\mathcal{N}_g(G) \subset \overline{\mathcal{N}}_g(G)$  (la section diagonale). Soit  $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$  l'adhérence réduite de l'image de  $i$ , alors par le théorème principal de Zariski I.1.3.12 la restriction de  $a$  à  $\mathfrak{Y}$  est un isomorphisme (car  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$  est lisse donc normal). On pose alors  $q = b \circ (a|_{\mathfrak{Y}})^{-1}$ .

Supposons que  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$  est représentable. Soit  $W$  l'espace modulaire grossier de  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$  (théorème de Keel-Mori I.1.3.14). D'une part,  $W$  est fini sur  $\overline{\mathcal{M}}_g$  (il est propre, quasi-fini car  $r$  et  $v$  le sont, on applique alors [L-MB, cor. A.2.1]). D'autre part,  $\overline{\mathcal{N}}_g(G)$  est lisse donc  $W$  est normal dans  $\mathcal{M}_g(G)$  (remarque I.1.3.15), donc finalement, c'est la normalisation de  $\overline{\mathcal{M}}_g$  relativement à  $\mathcal{M}_g(G)$ , c'est-à-dire  $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ . Si on préfère, une nouvelle utilisation du théorème principal de Zariski pour la factorisation  $\overline{\mathcal{N}}_g(G) \rightarrow W \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g(G)$  donne également le résultat.  $\square$

## 5 Algébricité et compactification du champ de Hurwitz $\mathcal{H}_{g,G}$ sur $\mathbb{Z}$

On approfondit dans ce paragraphe une idée de [BM1, §5] permettant d'obtenir une nouvelle description de  $\mathcal{H}_{g,G}$ . Pour ce faire on utilise les structures de niveau abélien  $n$  étudiées au paragraphe précédent.

## 5.1 Algébricité

Les démonstrations « classiques » de l'algébricité du champ de Hurwitz  $\mathcal{H}_{g,G}$  sur  $\mathbb{Z}$  sont au nombre de deux. La première procède par algébrisation en utilisant les critères d'Artin ; la théorie des déformations correspondante est exposée dans [BM1]. Dans cette section nous esquissons la preuve classique utilisant le plongement tricanonique des courbes.

**Théorème 5.1.1** *Le champ  $\mathcal{H}_{g,G}$  est un champ de Deligne-Mumford séparé et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ .*

**Preuve :** Soit, comme dans [DM],  $P(n) = (6n-1)(g-1)$  et  $H_g$  le sous-schéma de  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}^P$  tel que

$$H_g(S) = \left\{ (\pi, \alpha) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \pi : C \rightarrow S \text{ une courbe lisse de genre } g \\ \alpha : \mathbb{P}(\pi_*\omega_{C/S}^{\otimes 3}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{5g-6} \times S \text{ isom.} \end{array} \right\} \right\}$$

Etant donnée une inclusion  $G \subset \text{PGL}(5g-6)$ ,  $G$  agit sur  $H_g$  en composant avec l'isomorphisme  $\alpha$ . Un point de  $(H_g)^G$  est une courbe, plongée dans  $\mathbb{P}^{5g-6} \times S$  via le plongement canonique et  $\alpha$ , et qui est stable sous  $G$ . Donc il y a une action induite de  $G$  sur la courbe ; cette action est fidèle car le plongement est non dégénéré ( $C$  n'est incluse dans aucun hyperplan). Réciproquement soit  $\pi : C \rightarrow S$  une courbe lisse avec action de  $G$ . Fixons un isomorphisme  $\alpha : \mathbb{P}(\pi_*\omega_{C/S}^{\otimes 3}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{5g-6} \times S$ . Alors l'action de  $G$  induit une action (fidèle) sur  $\mathbb{P}(\pi_*\omega_{C/S}^{\otimes 3})$ , d'où par conjugaison une action sur  $\mathbb{P}^{5g-6} \times S$  correspondant à une inclusion  $G \subset \text{PGL}(5g-6)$ .

Soit maintenant  $X = \coprod (H_g)^G$ , la somme disjointe portant sur les différentes inclusions  $G \subset \text{PGL}(5g-6)$ . On note que  $H_g$  est connu pour être lisse, et que cela n'est plus le cas pour  $X$ . Vu ce qui précède le morphisme  $X \rightarrow \mathcal{H}_{g,G}$  qui consiste à oublier le plongement projectif, est un épimorphisme ; il factorise par  $[X/\text{PGL}(5g-6)]$  en un isomorphisme. Par le théorème I.2.3.4(i) ceci montre que  $\mathcal{H}_{g,G}$  est un champ algébrique. Enfin, pour toute  $G$ -courbe  $C/S$ , le schéma  $\text{Aut}_S(C, G) = \text{Aut}_S(C)^G$  est fini et non ramifié, donc la diagonale de  $\mathcal{H}_{g,G}$  a les mêmes propriétés, donc  $\mathcal{H}_{g,G}$  est un champ de Deligne-Mumford.  $\square$

## 5.2 Algébricité : une nouvelle preuve

Soit  $g \geq 2$  et  $n \geq 3$  des entiers,  $G$  un groupe fini, et  $A = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ . Soit  $\mathbb{I}$  l'ensemble des inclusions  $i : G \hookrightarrow \text{Aut}(A) = \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Lorsque  $i \in \mathbb{I}$ , on note  $\tilde{G}_i$  le produit semi-direct  $A \rtimes_i G$ .

**5.2.1** Rappelons-nous que  $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  agit (à gauche) sur  $\mathcal{M}_g(n)$  (cf 2.1.5(3)). Si  $\varphi$  est un isomorphisme  $C[n] \xrightarrow{\sim} A$ , l'action est donnée par  $\sigma.(C, \varphi) = (C, \sigma \circ \varphi)$ . Si la (pré)structure de niveau est représentée par une classe de revêtement  $[\Sigma \rightarrow C]$ , notons  $\Phi : A \hookrightarrow \text{Aut}_S(\Sigma)$  l'action correspondante, alors on pose  ${}^\sigma\Phi = \Phi \circ \sigma^{-1}$  ; soit  ${}^\sigma\Sigma$  la courbe  $\Sigma$  munie de l'action tordue  ${}^\sigma\Phi$ , alors l'action est donnée par  $\sigma.(C, [\Sigma \rightarrow C]) = (C, [{}^\sigma\Sigma \rightarrow C])$ .

L'action s'étend donc à  $\overline{\mathcal{N}}_g(n)$ , avec la même expression. Pour  $i : G \hookrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  fixé, lorsque nous utiliserons  $\overline{\mathcal{N}}_g(n)$  muni de l'action restreinte à  $G$  via  $i$ , nous le noterons  $\overline{\mathcal{N}}_g^i(n)$ .

*Dans la suite de 5.2 nous ne traitons plus que de courbes lisses.*

**Définition 5.2.2** On note  $\mathcal{H}_{g,G}^i(n)$  le champ sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$  classifiant les courbes avec action de  $G$ , munies d'une structure de niveau  $n$  équivariante pour l'action de  $G$  : étant donnée  $\varphi : C[n] \xrightarrow{\sim} A$ , l'action sur le membre de gauche est celle induite par l'action de  $G$  sur  $C$ , et l'action sur le membre de droite est celle donnée par  $i$ .

**Remarque 5.2.3** Indiquons sans entrer dans le détail, comment les résultats acquis jusqu'ici donnent déjà l'algébricité de  $\mathcal{H}_{g,G}^i(n)$ . En effet on peut relier  $\mathcal{H}_{g,G}^i(n)$  à un sous-champ fermé de  $\mathcal{H}_{\tilde{g},A,\emptyset}$ . Précisément,  $\coprod_i \mathcal{H}_{g,G}^i(n) = \mathcal{H}_{g,G}(n)$  est le champ des courbes  $C$  avec action  $\Phi : G \hookrightarrow \text{Aut}(C)$  et structure de niveau  $\varphi$ . Par le lemme de rigidité de Serre, on peut oublier la donnée de l'action de  $G$  si l'on marque une action  $i$  sur  $A$  : ainsi  $\mathcal{H}_{g,G}(n)$  est le champ des triplets  $(C, \varphi, i)$  où  $C$  est une courbe qui admet une action (non précisée) de  $G$  et  $i$  agit sur  $A$ . On peut voir  $(C, \varphi)$  comme un revêtement étale  $\Sigma \rightarrow C$  de groupe  $A$  (proposition 4.1.2), défini à  $C$ -isomorphisme  $A$ -équivariant près. Comme la suite exacte  $1 \rightarrow A \rightarrow \tilde{G}_i \rightarrow G \rightarrow 1$  est scindée, des arguments de théorie de Galois montrent qu'on peut relever l'action de  $G$  à  $\Sigma$  de sorte que  $\tilde{G}_i = A \rtimes_i G$  agisse. On établit ainsi une correspondance entre  $\mathcal{H}_{g,G}(n)$  et le sous-champ fermé (donc algébrique) de  $\mathcal{H}_{\tilde{g},A,\emptyset}$  constitué par les courbes  $\Sigma$  (de genre  $\tilde{g}$ ), avec action libre de  $A$ , qui admettent  $\tilde{G}_i$  dans leur groupe d'automorphismes. Notons  $\mathfrak{H}$  ce sous-champ fermé. L'élimination des «  $C$ -automorphismes  $A$ -équivariants » nécessite de faire un 2-quotient par  $A$ , donc on obtient finalement un isomorphisme  $\mathcal{H}_{g,G}(n) \simeq \mathfrak{H} // A$ .  $\square$

**Proposition 5.2.4** Supposons fixée une action fidèle  $i \in \mathbb{I}$  de  $G$  sur  $A$ . Il y a un morphisme d'oubli qui induit un isomorphisme  $s : \mathcal{H}_{g,G}^i(n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_g^i(n)^G$ . En particulier le champ  $\mathcal{H}_{g,G}^i(n)$  est représentable par un  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{n}])$ -schéma.

**Preuve :** Il y a un morphisme d'oubli (non ramifié et séparé comme on va le voir)  $\omega : \mathcal{H}_{g,G}^i(n) \rightarrow \mathcal{M}_g(n)$ . On observe, ce qui n'est pas nécessaire pour la suite, que par 5.2.3 et 1.3.11,  $\omega$  est représentable, donc on sait d'ores et déjà que  $\mathcal{H}_{g,G}^i(n)$  est un schéma. Une autre façon de voir la représentabilité est la suivante : soit  $T \rightarrow \mathcal{M}_g(n)$  un point représenté par une courbe  $C/T$  avec structure de niveau  $\varphi$ . Le produit fibré  $\mathcal{H}_{g,G}(n) \times_{\mathcal{M}_g(n)} T$  est le foncteur (en  $T'/T$ ) des actions de  $G$  sur la courbe  $C \times_T T'$  telles que  $\varphi_{T'}$  soit équivariante. Celui-ci est un sous-schéma localement fermé du schéma  $(\text{Aut}_T(C))^n$  où  $n = |G|$ . Ceci montre que  $\omega$  est non ramifié et séparé car  $\text{Aut}_T(C)$  est fini et non ramifié sur  $T$ .

Pour voir que  $\omega$  factorise par  $\mathcal{M}_g^i(n)^G$ , fixons  $g \in G$ , il suffit de trouver un isomorphisme de foncteurs  $g \circ \omega \simeq \omega$ . Soit  $x = (C, G, \varphi)$  un objet de  $\mathcal{H}_{g,G}^i(n)$ , on a donc  $g \circ \varphi = \varphi \circ g$ . De plus, dans  $\mathcal{M}_g(n)$  on a l'isomorphisme  $\tau(x) = g : (C, \varphi \circ g) \xrightarrow{\sim} (C, \varphi)$ . Clairement,  $\tau$  définit un isomorphisme de foncteurs  $g \circ \omega \simeq \omega$  convenable.

Vérifions que  $s$  est un isomorphisme. Tout d'abord, qu'il est essentiellement surjectif. Soit  $x \in \mathcal{M}_g^i(n)^G$ , il correspond à la donnée d'une courbe avec structure de niveau  $(C, \varphi = [\Sigma \rightarrow C])$ , et d'isomorphismes  $\alpha_g : (C, [\Sigma \rightarrow C]) \rightarrow (C, [g^{-1}\Sigma \rightarrow C])$  (c'est pour simplifier les notations par la suite que nous mettons  $g^{-1}\Sigma$  plutôt que  ${}^g\Sigma$ ). Remarque : l'isomorphisme  $h(\alpha_g) : (C, [{}^h\Sigma \rightarrow C]) \rightarrow (C, [{}^h g^{-1}\Sigma \rightarrow C])$  est égal à  $\alpha_g$  en tant qu'isomorphisme de  $C$ . Alors l'isomorphisme  $[h^{-1}(\alpha_g) \circ \alpha_h]^{-1} \circ \alpha_{gh}$  est un automorphisme de  $(C, [\Sigma \rightarrow C])$ , donc trivial par le lemme de Serre (corollaire 4.2.3). Donc en tant qu'automorphismes de  $C$  on a  $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ , c'est-à-dire que  $\Phi := \alpha$  définit une action de  $G$  sur  $C$  par automorphismes. En résumé  $x \simeq s(C, \Phi, \varphi)$  donc  $s$  est essentiellement surjectif.

Enfin montrons que  $s$  est pleinement fidèle. Soit  $x \in \mathcal{H}_{g,G}^i(n)$ , son image  $s(x)$  est le triplet  $(x, x, \{\alpha_g\})$  avec  $\alpha_g = g^{-1} : (C, \varphi) \xrightarrow{\sim} (C, g \circ \varphi)$ . On doit montrer que  $\mathfrak{s} :$

$\text{Hom}(x_1, x_2) \rightarrow \text{Hom}(s(x_1), s(x_2))$  est bijectif. Un morphisme du second membre est une paire  $u, v : (C_1, \varphi_1) \rightarrow (C_2, \varphi_2)$  telle que pour tout  $g \in G$ , on ait la commutativité

$$\begin{array}{ccc} (C_1, \varphi_1) & \xrightarrow{u} & (C_2, \varphi_2) \\ g^{-1} \downarrow & & \downarrow g^{-1} \\ (C_1, g \circ \varphi_1) & \xrightarrow{g(v)} & (C_2, g \circ \varphi_2) \end{array}$$

Cela signifie que  $u = v$  en tant que morphismes sur les courbes sous-jacentes, et que ce morphisme est  $G$ -équivariant.  $\square$

Si une courbe avec action  $(C, G)$  porte une préstructure de niveau équivariante, l'action  $i \in \mathbb{I}$  de  $G$  sur  $A$  est déterminée de manière unique. Par ailleurs deux telles préstructures de niveau donnent lieu à  $z = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : A \xleftarrow{\sim} C[n] \xrightarrow{\sim} A$  qui est  $G$ -équivariant. Notons  $Z_n^i(G)$  le centralisateur de  $G$  dans le groupe  $\text{Aut}(A) = \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , cela signifie donc que  $z \in Z_n^i(G)$ . Ainsi :

**Théorème 5.2.5** *Il existe un isomorphisme au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{n}])$  :*

$$t : \coprod_{i \in \mathbb{I}} \frac{\mathcal{M}_g^i(n)^G}{Z_n^i(G)} \longrightarrow \mathcal{H}_{g,G}$$

**Preuve :** Comme le morphisme  $\mathcal{M}_g(n) \rightarrow \mathcal{M}_g$  est un épimorphisme (c'est un quotient, voir I.2.3.6) il est clair que le morphisme évident  $\coprod_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{M}_g^i(n)^G \rightarrow \mathcal{H}_{g,G}$  l'est. Par ailleurs d'après ce qui a été dit ci-dessus ce morphisme passe au quotient de l'action de  $Z_n^i(G)$  par translation sur les structures de niveau.

Il reste à montrer que  $t$  est pleinement fidèle. Soit  $T \in \text{Sch}/S$  et  $x_1, x_2$  deux objets de  $\coprod_{i \in \mathbb{I}} \frac{\mathcal{M}_g^i(n)^G}{Z_n^i(G)}$ . On doit montrer que  $\mathfrak{t} : \text{Hom}(x_1, x_2) \rightarrow \text{Hom}(t(x_1), t(x_2))$  est bijectif. On peut supposer que  $T$  est connexe, et que  $x_j = (C_j, \Phi_j, [\varphi_j])$  sont deux courbes d'un même  $\mathcal{M}_g^{i_0}(n)^G/Z_n^{i_0}(G)$ . On note  $Z = Z_n^{i_0}(G)$ . Dans l'écriture précédente,  $\Phi_j$  désigne l'action de  $G$ , et  $[\varphi_j]$  la classe de structure de niveau équivariante pour la relation :  $\varphi' \sim \varphi$  ssi  $\exists z \in Z$ ,  $\varphi' = z \circ \varphi$ . Le fait que  $\mathfrak{t}$  est surjectif vient de ce que, d'après la remarque qui précède l'énoncé du théorème, si  $f : (C_1, \Phi_1) \rightarrow (C_2, \Phi_2)$  est un morphisme  $G$ -équivariant, alors  $\varphi_1$  et  $f^*\varphi_2$  sont deux structures de niveau équivariantes sur  $C_1$ , donc égales modulo  $Z$ . L'injectivité est claire car  $\mathfrak{t}$  associe simplement à un morphisme, le même morphisme entre courbes  $(C, \Phi)$  sous-jacentes.  $\square$

**Remarque 5.2.6** Comme il est bien précisé dans 2.3, bien que  $\mathcal{M}_g^i(n)^G$  soit un schéma, ce n'est pas le cas de  $\mathcal{M}_g^i(n)^G/Z_n^i(G)$ . En revanche, en ce qui concerne les espaces modulaires grossiers, on a l'isomorphisme de schémas  $\coprod_{i \in \mathbb{I}} \frac{\mathcal{M}_g^i(n)^G}{Z_n^i(G)} \xrightarrow{\sim} H_{g,G}$  (voir I.2.3.7).

**Théorème 5.2.7** *Le champ  $\mathcal{H}_{g,G}$  est un champ de Deligne-Mumford sur  $\mathbb{Z}$ .*

**Preuve :** Choisissons deux entiers  $p$  et  $q$  premiers à  $2|G|$ . Ce qui précède montre que  $\mathcal{H}_{g,G}$  est un champ de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$  et au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])$ .  $\square$

### 5.3 Compactification

L'existence d'une bonne compactification de  $\mathcal{M}_g(n)$  permet de proposer une compactification pour  $\mathcal{H}_{g,G}$ , avec la description précédente. Précisément, on a vu que  $G$  agit sur  $\overline{\mathcal{N}}_g^i(n)$  (5.2.1). Soit  $\mathfrak{Stab}_{g,G}$  le champ des courbes stables avec action fidèle (universellement) de  $G$ . C'est un objet a priori « horrible », qui bien sûr n'est pas une compactification de  $\mathcal{H}_{g,G}$ . Son seul mérite est de permettre de reconduire l'existence d'un morphisme comme ci-dessus (ce qui montre qu'un objet du compactifié  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G}^n$  est une courbe stable avec action) :

**Théorème 5.3.1** *Le champ*

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,G}^n = \prod_{i \in \mathbb{I}} \frac{\overline{\mathcal{N}}_g^i(n)^G}{Z_n^i(G)}$$

est un champ (de Deligne-Mumford) propre sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ , qui contient  $\mathcal{H}_{g,G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$  comme ouvert dense. De plus il y a un morphisme (qui n'est ni mono ni épi) :

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,G}^n \rightarrow \mathfrak{Stab}_{g,G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$$

**Preuve :** Le fait que  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G}^n$  soit un champ propre provient de la même propriété pour  $\overline{\mathcal{N}}_g^i(n)$ . En effet, la propriété est conservée pour le champ de points fixes (I.2.2.1) et pour le quotient par  $Z_n^i(G)$  car c'est un torseur (I.2.3.4). Le fait que le champ de Hurwitz des courbes lisses soit un ouvert dense se conserve également, d'abord par restriction aux champs de points fixes, car

$$\mathcal{M}_g^i(n)^G \simeq \mathcal{M}_g^i(n) \times_{\overline{\mathcal{N}}_g^i(n)} \overline{\mathcal{N}}_g^i(n)^G,$$

puis par l'opération de quotient qui est une submersion.

Pour exhiber le morphisme annoncé il suffit de reprendre la démonstration de 5.2.4. Précisément, il faut adapter l'endroit où on montre que  $s$  est essentiellement surjectif ; le seul point qui demande une adaptation est la preuve du fait que «  $[h^{-1}(\alpha_g) \circ \alpha_h]^{-1} \circ \alpha_{gh}$  est trivial » (notations de 5.2.4). En fait, ici cet isomorphisme n'est plus trivial mais le lemme qui suit montre qu'il est trivial sur la courbe sous-jacente  $C$ , ce qui est suffisant.  $\square$

**Lemme 5.3.2** *Soit  $G$  un groupe fini dominant un niveau abélien  $n \geq 3$ . Soit  $C/S$  une courbe relative stable de genre  $g$ , et  $[\Sigma \rightarrow C]$  une structure de niveau  $G$  sur  $C$ . Alors, un automorphisme de  $(C, [\Sigma \rightarrow C])$  est l'identité sur  $C$ .*

**Preuve :** Un automorphisme de  $(C, [\Sigma \rightarrow C])$  est un morphisme  $h : C \rightarrow C$  avec une classe d'équivalence constituée de diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma & \xrightarrow{a} & \Sigma & \xrightarrow{f} & \Sigma \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

avec  $a \in A$ . Dans ce diagramme,  $f$  est  $A$ -équivariant, donc  $h = \text{id}_C$  par la prop. 4.2.3.  $\square$

## Commentaires et questions

Il serait intéressant de savoir si, pour deux premiers  $p$  et  $q$  bien choisis, on peut recoller les champs  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G}^p$  et  $\overline{\mathcal{H}}_{g,G}^q$  au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{pq}])$ , pour obtenir une compactification sur  $\mathbb{Z}$ . Cela n'est pas évident car on n'a plus, comme pour l'ouvert correspondant aux courbes lisses, de description de ces champs indépendante des entiers  $p, q$  choisis comme structures de niveau.

Il faut aussi signaler que l'on voit clairement que, au-dessus des caractéristiques qui divisent l'ordre de  $G$ , l'opération qui introduit toutes les singularités dans la construction précédente est la considération du champ de points fixes. Cette opération se comporte très mal lorsque  $G$  n'est pas réductif.



## Chapitre III

# Réduction des actions de groupes au-dessus d'un anneau de valuation discrète

De manière grossière, en géométrie algébrique, un espace ou un champ de modules (dans le cas qui nous intéresse : le champ de Hurwitz  $\mathcal{H}_{g,G}$ ) classe des familles d'objets, paramétrées par des bases variables  $S$ . Le type le plus simple de telles familles est celui pour lequel  $S$  est le spectre d'un corps : les familles sont alors simplement les objets que l'on veut classifier. Dans le cas du champ de Hurwitz, il s'agit des  $G$ -revêtements de courbes algébriques, définis sur un corps  $k$ . Parmi les familles un peu moins rudimentaires qui se présentent ensuite, on peut citer celles qui ont pour base un anneau de nombres duaux  $k[\varepsilon]$  : elles permettent l'étude infinitésimale du champ, au voisinage d'un point. Il y a également les familles de base un anneau de valuation discrète ( $S$  est un *trait*), particulièrement importantes à plusieurs titres. Ces familles permettent de tester la séparation ou la propriété du champ, par les critères valuatifs ; d'un point de vue topologique, elles décrivent quelles sont les spécialisations de ses points. Enfin, si le champ est normal, la connaissance de ses points à valeurs dans un trait est un pas vers la connaissance du groupe de Picard du champ (en effet on peut voir un diviseur premier sur un champ normal comme un point « de codimension 1 », c'est-à-dire dont l'anneau local est de dimension 1 : par normalité c'est alors un anneau de valuation discrète).

Soit maintenant  $R$  un anneau de valuation discrète,  $K$  son corps des fractions et  $k$  son corps résiduel. Dans l'optique d'étudier les points  $\text{Spec}(R) \rightarrow \mathcal{H}_{g,G}$ , c'est-à-dire les actions de groupes sur des courbes lisses (ou éventuellement stables) sur un anneau de valuation discrète  $R$ , nous avons été amenés à poser le problème de la façon suivante.

Si  $X_K$  est une variété sur  $K$ , par exemple une courbe, une variété abélienne..., en réponse aux problèmes de réduction, différents « modèles »  $X$  sur  $R$  peuvent en général être choisis (modèles de Néron, modèles réguliers des courbes, modèles stables ou semi-stables...). Ayant choisi un modèle, lorsqu'un groupe fini  $G$  agit sur  $X_K$ , on aime naturellement qu'il agisse aussi sur  $X$ . La situation qui nous intéresse dans ce chapitre est celle où  $k$  est de caractéristique  $p > 0$  et  $p$  divise l'ordre de  $G$ . Alors, toutes sortes d'ennuis se produisent : peut-être le plus gênant est que le passage au quotient ne commute pas nécessairement au passage aux fibres (la raison est que les points à isotropie non triviale ne sont plus isolés). Cela mène à accepter l'idée que c'est un modèle du couple  $(X_K, G)$  qu'il faut chercher, plutôt qu'un modèle de  $X_K$  tout seul.

Lorsque  $X$  est le modèle stable sur  $R$  de la fibre générique  $X_K$ , on sait que, par unicité de ce modèle, le groupe  $G$  agit sur  $X$  s'il agit sur  $X_K$ . Lorsque la caractéristique du corps résiduel  $k$  divise l'ordre de  $G$ , il peut arriver qu'un automorphisme de  $G$  agisse trivialement sur certaines composantes irréductibles de la fibre spéciale : on est donc typiquement dans la situation pathologique évoquée précédemment. Dan Abramovitch nous a posé la question suivante : comment décrire l'action au voisinage d'un point double de la fibre spéciale ? C'est ce qui a motivé le travail de ce chapitre. En particulier, un modèle  $(X, \tilde{G})$  pour  $(X_K, G)$ , ou disons, un modèle au voisinage d'un point double, pour espérer répondre de manière satisfaisante à la question posée, doit éviter le défaut de « l'action qui devient triviale ».

Voilà une description du contenu du chapitre. L'objectif principal est la construction, une fois choisi un modèle  $X$ , d'un modèle  $\tilde{G}$  pour l'action de  $G$ . Celui-ci sera un schéma en groupes fini et plat sur  $R$ , avec la vertu que c'est l'unique schéma en groupes, génériquement isomorphe à  $G$ , agissant universellement fidèlement sur  $X$ . Le paragraphe 1 regroupe les préliminaires utiles pour la suite. Au paragraphe 2, la construction de  $\tilde{G}$  est menée à bien pour  $X$  propre sur  $R$ , en prenant une adhérence dans le foncteur des automorphismes de  $X/R$  (théorème 2.1). Le paragraphe 3 présente la technique des éclatements de Néron, et approfondit son utilisation pour les actions de schémas en groupes sur des schémas. Il se termine par une interrogation (3.3.3), dont la validité (le cas échéant) est un passage nécessaire pour le paragraphe 4.

Le paragraphe 4 est donc de nature « spéculative » ; il se propose de décrire un procédé permettant d'obtenir un résultat similaire à 2.1 lorsque, au contraire de 2.1,  $X$  est affine (théorème 4.1). Ce procédé présente l'intérêt d'être effectif, c'est-à-dire qu'il mène (en théorie) à une construction du modèle  $\tilde{G}$ . Notons que

(i) le travail du paragraphe 5 montre qu'on est fondé à penser que la question 3.3.3 a une réponse positive lorsque  $G$  est un  $p$ -groupe cyclique.

(ii) par cette dernière méthode d'éclatements, le résultat n'est obtenu (sous réserve que 3.3.3 soit vraie) que pour  $G$  appartenant à la classe des groupes abéliens (à cause notamment de l'utilisation du dual de Cartier). Cette restriction n'est pas trop gênante dans l'optique d'étudier les dégénérescences de groupes en groupes infinitésimaux, à cause du phénomène connu que ces derniers apparaissent plus volontiers dans les groupes abéliens (lire [Ta], § 3, p. 145).

Le paragraphe 5, qui est le dernier, revient sur les revêtements de courbes : nous appliquons la technique des éclatements de Néron décrite dans 4 pour donner une description complète des revêtements galoisiens de degré  $p$  d'un germe de courbe lisse sur  $R$  (théorème 5.1). Ceci est naturellement inspiré par les travaux de Raynaud qui traite du point générique (il convient de citer aussi Green-Matignon, Henrio, Saïdi, Wewers...).

Faisons enfin quelques commentaires sur la nature du résultat. En dépit du résultat concernant le cas où  $X$  est propre (§ 2), où l'on construit  $\tilde{G}$  sans autre hypothèse, il semble que ce groupe  $\tilde{G}$  soit un objet purement local (sur  $X$ ), ou, au moins, dont la signification disparaît lorsqu'on veut sortir d'une composante irréductible de la fibre spéciale  $X_k$ . Ceci est clair dans l'exemple où  $X$  est le modèle stable de la  $K$ -courbe lisse  $X_K$  : ici  $G$  peut agir trivialement sur certaines composantes de la fibre spéciale, et fidèlement sur d'autres (voir discussion dans 1.3). D'ailleurs, par la propriété de non-ramification de  $\text{Aut}_R(X)$  (voir [DM]), l'action de  $G$  sur la fibre spéciale (entière) est fidèle, i.e.  $\tilde{G} = G$ . On voit que l'information locale, sur les branches où  $G$  agit trivialement, nous échappe : ceci vient du

fait qu'on est dans le cas où  $X$  est propre, alors qu'il faudrait le recouvrir par des ouverts affines  $U_i$ , bien choisis, et obtenir des groupes  $\widetilde{G}_i$  qui agissent « mieux ». Signalons que le résultat du paragraphe 2 reste néanmoins tout à fait pertinent, dès que le schéma  $X/R$  possède des automorphismes infinitésimaux (par exemple pour une courbe avec des cusps, voir aussi 2.5).

## 1 Préliminaires : actions de schémas en groupes

Soit  $S$  un schéma et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $S$ -schémas ; nous noterons  $f^\sharp$ , ou parfois  $\tilde{f}$ , le comorphisme  $\mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$ .

La notion d'*image schématique* sera utilisée constamment au fil du texte. Si  $f_* \mathcal{O}_Y$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent alors  $f$  a une image schématique définie comme le sous-schéma fermé de  $X$  d'idéal  $\mathcal{I} = \ker(f^\sharp)$  : c'est le plus petit sous-schéma fermé de  $X$  par lequel  $f$  se factorise. Sa formation ne commute pas en général aux changements de base  $S' \rightarrow S$ , mais, si  $f$  est quasi-compact et quasi-séparé, c'est le cas lorsque  $S' \rightarrow S$  est plat ([BLR], 2.5, prop. 2).

Lorsque l'image schématique de  $f : Y \rightarrow X$  est  $X$ , on dit que  $f$  est *schématiquement dominant*, ou simplement *dominant*.

### 1.1 Schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète

Dans la suite nous résumons la donnée d'un anneau de valuation discrète  $R$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_R$ , corps résiduel  $k$ , corps des fractions  $K$ , et uniformisante  $\pi$ , par le quintuplet  $(R, \mathfrak{m}_R, k, K, \pi)$ . Lorsque  $X$  est un schéma sur  $R$ , ou  $A$  une  $R$ -algèbre, nous utilisons des indices  $K$  et  $k$  pour indiquer les fibres spéciale et générique :  $X_K = X \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } K$ ,  $X_k = X \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } k$ ,  $A_K = A \otimes_R K$ ,  $A_k = A \otimes_R k$ .

Lorsque  $S$  est le spectre d'un anneau de valuation discrète comme ci-dessus, et lorsque  $f$  correspond à l'inclusion d'un sous-schéma fermé de la fibre générique de  $X$  dans  $X$ , alors on a le cas particulier suivant d'image schématique (voir [EGA4], prop. 2.8.5 et [Ra1], § 2.1) :

**Proposition 1.1.1** *Soit  $R$  un anneau de valuation discrète. Soit  $X$  un  $R$ -schéma et  $Y_K$  un sous-schéma fermé de la fibre générique  $X_K$ . Alors il existe un unique sous-schéma fermé  $Y$  de  $X$ , plat sur  $R$  et tel que  $Y_K = Y \otimes_R K$ . C'est le plus petit sous-schéma fermé de  $X$  contenant  $Y_K$ . On l'appelle l'adhérence schématique de  $Y_K$  dans  $X$ .  $\square$*

Si  $X$  est affine d'anneau  $A$ , et si  $Y_K$  est défini par un idéal  $I_K \subset A_K$ , alors  $Y$  est défini par l'idéal  $I = I_K \cap A$ , image inverse de  $I_K$  par l'application canonique  $A \rightarrow A_K$  : donc on a l'injection  $A/I \hookrightarrow A_K/I_K$  qui montre que  $Y$  est sans torsion, donc plat, sur  $R$ .

De l'assertion d'unicité il résulte que la formation de l'adhérence schématique commute aux produits fibrés de sous- $K$ -schémas de  $R$ -schémas. Par conséquent, si  $X$  est un  $R$ -schéma en groupes et  $Y_K$  un sous-groupe fermé de  $X_K$ , alors la multiplication de  $Y_K$  s'étend à  $Y$ , qui est donc un sous- $R$ -schéma en groupes plat de  $X$ .

### 1.2 Actions de schémas en groupes sur des schémas

Soit  $S$  un schéma et  $X$  un schéma plat sur  $S$ . Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes plat, et  $\mu : G \times_S X \rightarrow X$  une action. Lorsque  $S = \text{Spec}(R)$  est affine ainsi que  $G$ , nous notons  $R[G]$  ou  $RG$  l'algèbre de Hopf du schéma en groupes.

Soit  $T$  un  $S$ -schéma et  $T'$  un  $T$ -schéma. Lorsque  $g \in G(T)$  et  $x \in X(T)$ , on note  $g_{T'}$  et  $x_{T'}$  leurs images dans  $G(T')$  et  $X(T')$ , respectivement. Dans les définitions qui suivent, pour ne pas alourdir les notations, on note simplement  $g(x)$  au lieu de  $\mu(T')(g_{T'}, x_{T'})$ , etc.

**Définitions 1.2.1** Soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ . Pour tout schéma  $T/S$ , on définit

(i) le transporteur de  $Y$  :

$$\mathfrak{Transp}_G(Y)(T) = \{g \in G(T) \mid g(Y(T')) \subset Y(T') \text{ pour tout } T\text{-schéma } T'\}$$

(ii) le centralisateur de  $Y$  :

$$\mathfrak{Cent}_G(Y)(T) = \{g \in G(T) \mid g(y) = y, \text{ pour tout } T\text{-schéma } T' \text{ et tout } y \in Y(T')\}$$

(iii) le foncteur de points fixes :

$$\mathfrak{Fix}_G(X)(T) = \{x \in X(T) \mid g(x) = x, \text{ pour tout } T\text{-schéma } T' \text{ et tout } g \in G(T')\}$$

(iv) et, si  $G$  est un schéma en groupes, le normalisateur de  $Y$  :

$$\mathfrak{Norm}_G(Y)(T) = \{g \in G(T) \mid g(Y(T')) = Y(T') \text{ pour tout } T\text{-schéma } T'\}$$

Bien sûr, on a  $\mathfrak{Cent}(Y) \subset \mathfrak{Norm}(Y) \subset \mathfrak{Transp}(Y)$  (en tant que foncteurs). Dorénavant on prend un schéma de base affine et noethérien  $S = \text{Spec}(R)$ . On rappelle qu'un  $R$ -schéma  $X$  est dit *localement libre* sur  $R$  s'il est recouvert par des ouverts affines dont les anneaux de fonctions sont des modules libres sur  $R$ .

**Théorème 1.2.2 ([DG, II, §1, th. 3.6])**

Si  $Y$  et  $X$  sont localement libres sur  $S = \text{Spec}(R)$ ,

- (i)  $\mathfrak{Transp}_G(Y)$  est représentable par un sous-groupe fermé de  $G$  noté  $\text{Transp}_G(Y)$ .
- (ii) Si  $X$  est séparé,  $\mathfrak{Cent}_G(Y)$  est représentable par un sous-groupe fermé de  $G$  noté  $\text{Cent}_G(Y)$ .
- (iii) Si  $G$  est un schéma en groupes,  $\mathfrak{Norm}_G(Y)$  est représentable par un sous-groupe fermé de  $G$  noté  $\text{Norm}_G(Y)$ . De plus,  $\text{Cent}_G(Y)$  est un sous-schéma en groupes fermé distingué de  $\text{Norm}_G(Y)$ .
- (iv) Si  $X$  est séparé et  $G$  est localement libre sur  $S$ ,  $\mathfrak{Fix}_G(X)$  est représentable par un sous-schéma fermé de  $X$  noté  $X^G$ .

Par définition, la formation de ces schémas commute aux changements de base quelconques sur  $S$ . □

Toujours dans le cas où la base  $S = \text{Spec}(R)$  est affine, supposons de plus que  $G$  est fini et plat sur  $S$ , d'ordre  $n$ . On peut alors préciser la structure du schéma de points fixes sur un ouvert affine  $G$ -stable  $U = \text{Spec} A$ . Pour cela on suppose de plus que  $RG$  est libre (c'est le cas par exemple si  $R$  est local). La section unité de  $G$  donne une décomposition  $RG = R \oplus \mathfrak{m}_{RG}$ . Prenons  $e_1 = 1$  et choisissons une base  $\{e_i\}_{2 \leq i \leq n}$  de  $\mathfrak{m}_{RG}$ . Alors l'action  $\tilde{\mu} : A \rightarrow RG \otimes A$  s'écrit  $\tilde{\mu}(a) = 1 \otimes a + \sum_{i>1} e_i \otimes \mathfrak{m}_i(a)$ , et  $X^G$  est défini sur  $U$  par l'idéal engendré par tous les  $\mathfrak{m}_i(a)$ ,  $i > 1$ ,  $a \in A$ .

### 1.3 Noyaux

Dans les notations de 1.2, on suppose maintenant que  $X$  est localement libre sur le schéma affine  $S = \text{Spec}(R)$  ( $R$  étant noëthérien), et  $G$  est un  $R$ -schéma en groupes fini, plat. Soit  $\mu : G \times X \rightarrow X$  une action. Un cas particulier de centralisateur (voir 1.2), essentiel pour la suite, est le cas du *noyau* de l'action,  $\ker(\mu) := \text{Cent}_G(X)$ . La formation du noyau commute au changement de base. Il n'est pas nécessairement plat sur  $R$ ; deux cas particuliers sont intéressants :

- (1) Action triviale :  $\ker(\mu) = G$ . Cela équivaut à dire que  $\mu = \text{pr}_2$  ou que  $X^G = X$ .
- (2) Action fidèle :  $\ker(\mu) = 1$ . Cela équivaut à dire qu'il existe un ouvert  $G$ -stable tel que  $\mu|_U$  est fidèle : en effet, si  $\mu|_U$  est fidèle alors  $\ker(\mu) = \text{Cent}_G(X) \subset \text{Cent}_G(U) = 1$ .

Nous serons précautionneux lorsque nous parlerons de la fidélité d'une action :  $S$  étant de nouveau un schéma affine quelconque, si  $\ker(\mu) = 1$  en tant que  $S$ -schéma en groupes, nous dirons que l'action est *universellement fidèle*, et réserverons le terme d'*action fidèle* au cas d'un corps de base.

Par ailleurs, même lorsque  $S = \text{Spec}(k)$ , cette notion n'est véritablement sympathique qu'avec des hypothèses d'intégrité sur  $X$  : si  $X$  n'est pas irréductible, l'action peut être fidèle sur  $X$  et simultanément triviale sur des composantes tout entières de  $X$ . Si  $X$  n'est pas réduit, les pathologies sont différentes. Le groupe  $G$  peut agir uniquement sur les fonctions nilpotentes de  $\mathcal{O}_X$ , de sorte que *topologiquement* son action est triviale : par exemple lorsque  $X = \text{Spec}(k[\epsilon]/\epsilon^2)$ , le groupe  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit par  $\epsilon \mapsto -\epsilon$  (en caractéristique différente de 2) et  $X^G = X_{\text{réd}} = \text{Spec}(k)$ . Bien sûr, si  $G_{\text{réd}}$  est un sous-groupe de  $G$  (par exemple si  $k$  est parfait), l'action  $\mu$  induit tout de même une action  $\mu_{\text{réd}}$  de  $G_{\text{réd}}$  sur le schéma réduit  $X_{\text{réd}}$  (en général  $G$  n'agit pas sur  $X_{\text{réd}}$  : si  $k$  est de caractéristique  $>0$ , faire agir un groupe infinitésimal sur lui-même par translations).

Lorsque  $X$  est intègre et  $S = \text{Spec}(k)$  est le spectre d'un corps, une action  $\mu$  est fidèle ssi  $\mu|_U$  est fidèle pour *tout* ouvert  $G$ -stable  $U \neq \emptyset$ . En effet, le sens «  $\Rightarrow$  » vient du fait que, si  $U \neq \emptyset$  et  $\mu|_U$  a un noyau non trivial  $K \leq G$ , alors  $X^K$  est un fermé qui contient l'ouvert dense  $U$ , donc  $X^K = X$  (on a supposé  $X$  réduit), ce qui contredit l'hypothèse que  $\mu$  est fidèle.

### 1.4 Les groupes $\mathcal{H}_n$

Nous rappelons ici la définition bien connue des groupes  $\mathcal{H}_n$  (c'est la notation de [He] ; dans [OSS] il s'agit de  $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}^{(\lambda)}$ ). Ceux-ci interviennent dans la déformation des suites d'Artin-Schreier à Kummer [OSS], et également, comme nous allons le voir, dans la réduction des revêtements  $p$ -cycliques (ou  $p^n$ -cycliques d'ordre supérieur). Une raison qui explique à notre avis leur apparition à cet endroit est le fait que les  $\mathcal{H}_n$  sont les groupes successifs de la suite standard d'éclatements entre  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $\mu_p$  (cf exemple 3.2.2).

Soit  $(R, \mathfrak{m}_R, k, K, \pi)$  un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel  $k$  supposé algébriquement clos, et  $\mu \in \mathfrak{m}_R$ . La présentation classique introduit le  $R$ -schéma en groupes commutatif  $\mathcal{G}^{(\mu)} = \text{Spec } R[x, 1/(\mu x + 1)]$  dont la structure est donnée par

$$\begin{aligned} \text{comultiplication } x &\mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x + \mu x \otimes x, \\ \text{antipode } x &\mapsto \frac{-x}{\mu x + 1}, \\ \text{coïunité } x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe  $u \in R$  tel que  $p = u\mu^{p-1}$ . Le polynôme  $P_\mu = \frac{(\mu x + 1)^p - 1}{\mu^p} = (x + \mu^{-1})^p - \mu^{-p}$  est à coefficients dans  $R$ , et il y a un morphisme fini,

fidèlement plat

$$\mathcal{G}^{(\mu)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\mu^p)} \quad , \quad x \mapsto P_\mu(x)$$

dont on note  $\mathcal{H}_\mu$  le noyau. Ainsi  $\mathcal{H}_\mu = \text{Spec} \frac{R[x]}{P_\mu(x)}$ , c'est un schéma en groupes fini et plat sur  $R$ , d'ordre  $p$ .

Lorsque  $R$  contient une racine primitive  $p$ -ème de l'unité  $\zeta$  et  $\lambda = \zeta - 1$ , on note  $s$  la valuation de  $\lambda$  et, pour tout  $n \leq s$ , on note simplement  $\mathcal{H}_n$  pour  $\mathcal{H}_{\pi^n}$ . Dans ce contexte, il y a une meilleure façon de voir  $\mathcal{H}_n$  :

**Proposition 1.4.1** *Les schémas en groupes  $\mathcal{H}_n$  sont les schémas en groupes  $G$  finis et plats sur  $R$  tels que  $G_K \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_K$ .*

**Preuve :** Rappelons que par la classification de Oort-Tate [OT, § 2, remark 5], tout schéma en groupes fini et plat sur  $R$  est isomorphe à un groupe  $G_a^c$  avec  $p = ac$ . Le groupe  $G_a^c$  a pour algèbre de Hopf  $\frac{R[x]}{x^p - ax}$ , et la comultiplication est  $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x + c \otimes D_p(x \otimes 1, 1 \otimes x)$  ( $D_p$  est un polynôme explicite). De plus on peut calculer le module de différentielles  $\Omega_{G_a^c}^1 = \frac{R[x]}{px^{p-1} - a} \simeq \frac{R[x]}{a}$  utilisant le fait que  $a = (px^{p-1} - a)(-1 + \frac{c}{p-1}x^{p-1})$  (le second facteur est une unité, d'inverse  $\frac{c}{p-1}\alpha^{p-1} - 1$ ). La classification précise que lorsque  $p = ac = a'c'$ , on a  $G_a^c \simeq G_{a'}^{c'}$  ssi il existe une unité  $u \in R$  telle que  $a = u^{p-1}a'$ ,  $c = u^{1-p}c'$ . Comme  $R$  est hensélien de corps résiduel algébriquement clos, on sait extraire les racines  $(p-1)$ -èmes, donc  $G_a^c \simeq G_{a'}^{c'}$  ssi  $a$  et  $a'$  ont même valuation. Cette valuation, calculable via  $\Omega^1$ , est notée  $e(G_a^c)$ . Par exemple,  $e(\mathcal{H}_n) = (p-1)(s-n)$ .

Soit  $G$  un schéma en groupes fini et plat tel que  $G_K \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_K$ . Par propriété, tout point de  $G$  à valeurs dans  $K$  se prolonge en un  $R$ -point. Donc l'isomorphisme de la fibre générique se prolonge en un morphisme  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R \rightarrow G$ , qui est un morphisme de groupes. Par Oort-Tate,  $G \simeq G_a^c$ ; au morphisme  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R \rightarrow G$  correspond un morphisme d'algèbres  $u : \frac{R[\alpha]}{\alpha^p - a\alpha} \rightarrow R^p$ . Comme  $\alpha^p = a\alpha$ , les coordonnées  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $u(\alpha)$  vérifient  $x_i^p = ax_i$ . Comme  $u_K$  est un isomorphisme, l'un des  $x_i$  est non nul, donc  $a = x_i^{p-1}$ . Ainsi  $e(G) = (p-1)v(x_i)$ ; compte tenu de ce qui précède,  $G \simeq \mathcal{H}_n$  pour  $n = s - v(x_i)$ .  $\square$

Nous donnerons dans le paragraphe 3 une démonstration plus naturelle de cette proposition.

## 1.5 Actions des groupes diagonalisables

Nous aurons besoin d'avoir en tête quelques faits concernant les groupes finis diagonalisables, qui interviendront dans la preuve de 4.1. Nous tirons ce dont nous avons besoin de [DG, II, §2, 2.5]. Soit  $R$  un anneau quelconque, et  $\Gamma$  un groupe (ordinaire) fini, commutatif, noté multiplicativement. Il lui est associé le groupe diagonalisable

$$D(\Gamma) = \text{Spec}(R\Gamma) \text{ où } R\Gamma \text{ est l'algèbre du groupe } \Gamma.$$

Soit  $m$  la comultiplication de  $R\Gamma$ , et  $\varepsilon$  sa co-unité (l'idéal d'augmentation  $\mathfrak{m}_{R\Gamma} = \ker \varepsilon$  a pour base les  $\gamma - 1$ ,  $\gamma \neq 1$ ). Soit  $U$  une  $R$ -algèbre sur laquelle  $R\Gamma$  agit, c'est-à-dire que  $X = \text{Spec}(U)$  est un schéma affine avec action de  $D(\Gamma)$ . On a donc une coaction  $\mu : U \rightarrow U \otimes R[\Gamma]$ , donnée par  $u \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(u) \otimes \gamma$ . L'axiome d'« associativité »  $\gamma.(\gamma'.x) = (\gamma.\gamma').x$  fournit :

$$(\mu \otimes \text{id}_{R[\Gamma]})(\mu(u)) = \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} p_\gamma(p'_{\gamma'}(u)) \otimes \gamma \otimes \gamma' = (\text{id}_C \otimes m)(\mu(u)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(u) \otimes \gamma \otimes \gamma$$

c'est-à-dire  $p_\gamma \circ p_{\gamma'} = 0$  lorsque  $\gamma \neq \gamma'$ , et  $p_\gamma \circ p_\gamma = p_\gamma$ . L'axiome d'« unité » fournit

$$u = (\text{id}_C \otimes \varepsilon)(\mu(u)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(u)$$

i.e.  $\sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma = \text{id}_U$ . Si on pose  $U_\gamma = p_\gamma(U)$ , le fait que  $\mu$  est un morphisme d'anneaux donne alors  $U_\gamma \cdot U_{\gamma'} \subset U_{\gamma\gamma'}$ . De manière équivalente, on a une graduation de type  $\Gamma$  donnée par  $U = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ , les  $p_\gamma$  étant les projecteurs correspondants. On observe que  $U_1 = U^{D(\Gamma)}$  est l'anneau d'invariants pour l'action de  $D(\Gamma)$ .

Par ailleurs il est facile de reconnaître la fidélité de l'action sur la graduation : précisément, l'action est fidèle sur la fibre au-dessus de  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  si et seulement si les  $\gamma$  pour lesquels  $U_\gamma \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$  engendrent  $\Gamma$ . (Il faut remarquer qu'un système de générateurs  $\{\gamma_i\}$  pour  $\Gamma$  est la même chose qu'un système de générateurs  $\{\gamma_i - 1\}$  pour l'idéal d'augmentation  $\mathfrak{m}_{R\Gamma}$ .)

Pour l'utilisation qui sera la nôtre, nous détaillons seulement le cas particulier où la base  $R = (R, \mathfrak{m}_R, k, K, \pi)$  est un anneau de valuation discrète et où  $U$  est plat sur  $R$ , et séparé pour la topologie  $\pi$ -adique. Cela équivaut à dire que *tout sous- $R$ -module non nul de  $U$  est fidèlement plat sur  $R$* . Donc dans ce cas,  $U_\gamma \neq 0 \Leftrightarrow U_\gamma \otimes k \neq 0 \Leftrightarrow U_\gamma \otimes K \neq 0$ .

Nous résumons ce qui précède dans la proposition suivante :

**Proposition 1.5.1 ([DG])** *Le foncteur  $U \rightsquigarrow \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$  est une équivalence entre la catégorie des  $R[\Gamma]$ -algèbres et la catégorie des algèbres  $\Gamma$ -graduées.*

*Supposons que  $R = (R, \mathfrak{m}_R, k, K, \pi)$  est un anneau de valuation discrète, et que  $U$  est plat sur  $R$  et séparé pour la topologie  $\pi$ -adique. Alors, de plus, l'action est génériquement fidèle si et seulement si elle est universellement fidèle si et seulement si les  $\gamma$  pour lesquels  $U_\gamma \neq 0$  engendrent  $\Gamma$ .*  $\square$

Dans le paragraphe 5 où l'on traite plus spécialement le cas des revêtements de groupe  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , nous utiliserons le raffinement suivant de 1.5.1 :

**Proposition 1.5.2** *Soit  $R$  un anneau de valuation discrète et  $U$  une  $R$ -algèbre plate et séparée pour la topologie  $\pi$ -adique. Soit une action fidèle de  $\mu_{p,R}$  sur  $X = \text{Spec}(U)$ , et  $U = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} U_i$  la décomposition correspondante. Soit  $T = U_0 = U^{\mu_{p,R}}$  l'anneau d'invariants. Alors  $U$  est une  $T$ -algèbre finie de rang  $p$ , et si  $T$  est local complet nœthérien, les  $U_i$  sont des  $T$ -modules projectifs, donc libres, de rang 1.*  $\square$

## 2 Réduction des actions de groupes sur un anneau de valuation discrète (cas propre)

Nous prouvons ici l'existence du modèle  $\tilde{G}$ , agissant universellement fidèlement, dans le cas où le schéma  $X$  est propre sur  $R$ .

Donnons une précision de vocabulaire (voir paragraphe 3) : soit  $u : G \rightarrow G'$  un morphisme de  $R$ -schémas en groupes plats tels que  $G_K = G'_K =: \mathbb{G}$ , on dit que  $G$  domine  $G'$  si  $u \otimes \text{id}_K = \text{id}_{\mathbb{G}}$ . Lorsque  $G$  et  $G'$  agissent tous les deux sur un schéma  $X$ , de telle sorte que l'action de  $G$  se déduise de celle de  $G'$  par  $u$ , on dit que  $G$  domine  $G'$  *compatiblement* (aux actions sur  $X$ ).

**Théorème 2.1** *Soit  $X$  un schéma propre et plat sur un anneau de valuation discrète  $R$ . Soit  $\mu : G \times X \rightarrow X$  une action d'un groupe fini sur  $X$ , fidèle sur la fibre générique  $X_K$ . Alors,  $G$  a un unique modèle  $\tilde{G}$ , qui agit universellement fidèlement sur  $X$ , et que  $G$  domine compatiblement aux actions sur  $X$ .*

**Remarques 2.2** (1) Il n'est fait dans le théorème aucune hypothèse de régularité sur  $X$ .  
(2) Intuitivement, le résultat découle de la considération de l'adhérence schématique de  $G$  dans le «  $R$ -schéma en groupes »  $\text{Aut}_R(X)$ . La difficulté majeure résulte dans l'existence de  $\text{Aut}_R(X)$  : il peut être énorme, et/ou ne pas avoir de structure algébrique raisonnable.  
(3) Comme nous l'avons expliqué dans 1.3, la conclusion du théorème est plus significative si on fait l'hypothèse que les fibres de  $X$  sont intègres.

**Preuve :** Considérons le foncteur  $F$  des automorphismes de  $X$ , qui est un faisceau fpqc. Pour tout schéma  $S'/S$ , on a

$$F(S') = \text{Aut}_{S'}(X \times_S S')$$

Artin a montré que  $F$  est un espace algébrique localement de présentation finie : c'est un sous-espace ouvert de  $\text{Hilb}_S(X \times_S X)$  [Ar1, cor. 6.2]. De plus  $X$  étant plat sur  $R$ ,  $F$  est séparé. Or on sait qu'un espace algébrique en groupes séparé, localement de présentation finie sur un anneau de valuation discrète, est un schéma ([An, chap. IV]). Par hypothèse, on a un morphisme  $u : G \rightarrow F$  ( $G = G_R$  est le groupe constant) qui fait de  $G_K$  un sous-foncteur fermé de  $F_K$ . Comme  $u$  est quasi-compact et séparé, il a une image schématique, définie par l'idéal quasi-cohérent égal au noyau  $\mathcal{I}$  du morphisme  $\mathcal{O}_F \rightarrow u_* \mathcal{O}_G$ . Soit  $\tilde{G}$  cette image schématique. L'injection  $\mathcal{O}_{\tilde{G}} \hookrightarrow \mathcal{O}_G$  montre que  $\tilde{G}$  est fini, et sans torsion, donc plat, sur  $R$  (c'est donc aussi l'adhérence schématique de  $G \otimes K$  dans  $F$ ). Le fait que  $\tilde{G}$  agit universellement fidèlement sur  $X$  vient de la définition de  $F$ , puisque  $\tilde{G}$  en est un sous-schéma fermé. Enfin, il est clair que si un groupe fini, plat sur  $R$ , de fibre spéciale égale à  $G$ , agit universellement fidèlement sur  $X$ , alors c'est un sous-groupe fermé de  $F$ , c'est donc l'adhérence schématique de  $G \otimes K$  dans  $F$ , donc c'est  $\tilde{G}$ .  $\square$

Complétons la description des propriétés de  $\tilde{G}$  (certaines sont des conséquences directes de l'unicité) :

**Proposition 2.3** (i) *Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $\tilde{H}$  est un sous-schéma en groupes fermé de  $\tilde{G}$  ; c'est aussi l'adhérence schématique de  $H \otimes K$  dans  $\tilde{G}$ .*

(ii) *Si  $H$  est distingué dans  $G$ , alors  $\tilde{H}$  est distingué dans  $\tilde{G}$ .*

(iii) *Soit  $N \triangleleft G$  l'ensemble des automorphismes de  $G$  qui agissent trivialement sur  $X_k$ . Alors, le groupe  $\tilde{N}$  est un  $p$ -groupe connexe.*

*On suppose désormais que  $G$  agit de manière admissible (c'est-à-dire que toute orbite est incluse dans un ouvert affine de  $X$ ), de sorte que le quotient  $X/G$  existe.*

(iv)  *$X/G$  et  $X/\tilde{G}$  sont isomorphes.*

(v) *Pour tout sous-groupe distingué  $H \triangleleft G$ , on a  $\widetilde{G/H} = \tilde{G}/\tilde{H}$  (pour l'action induite de  $G/H$  sur  $X/H$ ).*

(vi) *Pour le sous-groupe  $N$  défini en (iii), on a  $G/N \xrightarrow{\sim} \tilde{G}/\tilde{N}$  donc  $\tilde{G}$  a une suite étale-connexe*

$$1 \rightarrow \tilde{N} \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G/N \rightarrow 1$$

**Preuve :** (i) et (ii) sont clairs.

(iii) Le morphisme  $N_k \rightarrow \tilde{N}_k$  est trivial, car le composé  $N_k \rightarrow \tilde{N}_k \hookrightarrow \text{Aut}_k(X_k)$  l'est. Or  $N \rightarrow \tilde{N}$  est surjectif (plus généralement  $G \rightarrow \tilde{G}$  est surjectif, car dominant et fermé), on en déduit que  $\tilde{N}_k$  est infinitésimal, donc  $\tilde{N}$  est un  $p$ -groupe. Montrons la connexité. Quitte à étendre la base au complété de  $R$ , on peut supposer que  $R$  est complet. Considérons le morphisme composé  $t : N \rightarrow \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}_{\text{ét}}$ , où  $\tilde{N}_{\text{ét}}$  est le quotient de la suite étale-connexe de  $\tilde{N}$ ;  $t$  est trivial sur la fibre spéciale. Or  $t$  est déterminé par sa fibre spéciale ([SGA1], Exp I, cor 6.2) donc il est globalement trivial. Comme  $t$  est dominant,  $\tilde{N}_{\text{ét}} = 1$ . Ainsi  $\tilde{N}$  est connexe.

(iv) Localement,  $X = \text{Spec}(A)$  et  $X/G$  est défini par le spectre de l'anneau  $A_0 = \{a \in A, \mu_G(a) = 1 \otimes a\}$ , où  $\mu_G$  est la coaction correspondante à l'action de  $G$  sur  $X$ . Or,  $\mu_G$  se factorise par  $\mu_{\tilde{G}}$  en

$$A \rightarrow R\tilde{G} \otimes A \hookrightarrow RG \otimes A$$

de sorte que  $\tilde{A}_0 = \{a \in A, \mu_{\tilde{G}}(a) = 1 \otimes a\} = A_0$  d'où la conclusion.

(v)  $H$  agit évidemment de manière admissible, et  $X/H \xrightarrow{\sim} X/\tilde{H}$  par (iv). Pour montrer que  $\widetilde{G/H} = \tilde{G}/\tilde{H}$  il suffit de montrer que  $\tilde{G}/\tilde{H}$  agit universellement fidèlement sur  $X/H$ , ce qui est clair puisque  $\tilde{G}$  agit universellement fidèlement sur  $X$ .

(vi) Par (v) on a  $G/N \xrightarrow{\sim} \tilde{G}/\tilde{N}$  puisque  $G/N$  agit universellement fidèlement sur  $X/N \simeq X/\tilde{N}$ . La suite étale-connexe en découle.

□

**Remarque 2.4** Une égalité telle que  $G/N = \tilde{G}/\tilde{N}$  n'est bien sûr pas vraie pour tout sous-groupe distingué  $N \triangleleft G$ .

**Exemples 2.5** (i) Si  $X$  est une courbe de genre  $g \geq 2$ , stable (ou stable marquée) sur  $R$ , alors  $\tilde{G} \simeq G$  du fait que  $\text{Aut}_S(X)$  est non ramifié [DM].

(ii) Si en revanche  $X$  est une courbe de genre  $g \leq 1$ , ou de genre  $g \geq 2$  mais non stable, on n'a pas nécessairement  $\tilde{G} = G$ . Par exemple soit  $X = E$  la courbe elliptique avec réduction nodale,  $E : y^2 = x^3 + x + \pi$ , ou alors, une courbe elliptique avec réduction lisse supersingulière. Soit  $P$  un point de  $p$ -torsion sur  $E_K$ , par propriété il s'étend en une section de  $E/R$  donnant lieu à un automorphisme d'ordre  $p$ . Comme il n'y a pas de point de  $p$ -torsion sur la fibre spéciale, on ne peut pas avoir  $\tilde{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

(iii) Un exemple généralisant celui de la courbe elliptique supersingulière (ii) est celui d'un schéma abélien  $A$  sur  $R$  (i.e. une variété abélienne avec bonne réduction au sens de [BLR]). On suppose que la  $p$ -torsion de  $A_K$  est rationnelle :  $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2n} \subset A_K$ . Alors l'action de  $G$  par translation s'étend en une action sur  $A$ , et  $\tilde{G}$  est le noyau de l'isogénie  $p : A \rightarrow A$ . Celui-ci n'est pas étale (le noyau de l'isogénie  $n$  est étale lorsque et seulement lorsque  $n$  est premier à  $p$ ), donc  $\tilde{G} \neq G$ .

### 3 Éclatements de Néron

Dans cette section nous retraçons rapidement les définitions et propriétés de base des éclatements de Néron, puis discutons plus en détail les éclatements d'actions de schémas en groupes sur des schémas (on éclate à la fois dans le groupe qui agit, et dans le schéma). Pour établir un résultat du type de 2.1, nous devons étudier spécialement le comportement du noyau d'une action par éclatement. Nous arrivons à la formulation d'un résultat conjectural (question 3.3.3), crucial pour établir le théorème 4.1 au paragraphe 4.

Les références utilisées sont [WaWe] et [BLR]. Nous nous limitons au cas de schémas affines, qui nous suffit ; la discussion de [BLR] est plus précise. Pour 3.1 nous suivons essentiellement [WaWe], en accentuant la functorialité pour élargir les énoncés au cas d'action de (schémas en) groupes.

Soit  $(R, \mathfrak{m}_R, k, K, \pi)$  un anneau de valuation discrète. Dans cette section *tous les  $R$ -schémas sont affines et plats*. On pourrait aussi bien travailler avec l'hypothèse plus forte que les  $R$ -algèbres de fonctions sont plates et séparées pour la topologie  $\pi$ -adique (c'est une hypothèse essentielle pour 1.5.1, sous laquelle nous travaillerons dans le paragraphe 4).

Soit  $\mathcal{X}$  un  $K$ -schéma. Un schéma  $X$  est appelé un *modèle* de  $\mathcal{X}$  si c'est un  $R$ -schéma (affine comme dans tout le paragraphe) et plat, tel que  $X_K = \mathcal{X}$ . (Ici aussi on pourrait travailler avec des modèles d'algèbres plates et séparées pour la topologie  $\pi$ -adique.) Parfois  $\mathcal{X}$  ne sera pas précisé et on dira que  $X$  est un modèle de sa fibre générique, ou simplement un modèle. Un morphisme  $X' \rightarrow X$  entre modèles de  $\mathcal{X}$  est appelé *morphisme modèle* si c'est l'identité de  $\mathcal{X}$  sur la fibre générique ; dans cette situation on dira aussi que  $X'$  *domine*  $X$ .

### 3.1 Rappel des propriétés principales

Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un modèle, et  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X_k$ , défini par un idéal  $I \subset A$  contenant  $\pi$ .

**Proposition et définition 3.1.1** *L'éclatement de Néron de  $Y$  dans  $X$  est le schéma affine  $X^Y$  d'anneau de fonctions  $A^Y = R[\pi^{-1}I] \subseteq A_K$ . Si  $X$  est de type fini sur  $R$  de sorte que  $I = (\pi, f_1, \dots, f_n)$  est de type fini, alors  $A^Y = A[\frac{f_1}{\pi}, \dots, \frac{f_n}{\pi}]$ . L'éclatement  $X^Y$  est un modèle de  $X_K$ , de type fini si  $X$  l'est, et il y a un morphisme modèle canonique  $X^Y \rightarrow X$ .*

**Preuve :** Comme  $\pi A \subseteq J$ , on a  $A \subseteq A^Y \subset A_K$ . Cela montre que  $A^Y$  n'a pas de  $R$ -torsion, donc il est plat. Le fait que  $A^Y$  soit de type fini si  $A$  l'est est clair. De même,  $(A^Y) \otimes K = A_K$  de sorte que  $X^Y$  est un modèle de  $X_K$ .  $\square$

On observe que, si  $A$  est plat et séparé pour la topologie  $\pi$ -adique, il en est de même de  $A^Y$ . D'autre part, par construction, le morphisme  $X^Y \rightarrow X$  est dominant.

**Proposition 3.1.2 (Propriété Universelle)** *Le morphisme modèle  $X^Y \rightarrow X$  envoie la fibre spéciale dans  $Y$ , et tout morphisme  $Z \rightarrow X$  avec  $Z$  plat sur  $R$ , qui envoie la fibre spéciale dans  $Y$ , se factorise de manière unique par  $X^Y$ .*

**Preuve :** On a  $I \subset \pi A^Y$ , donc il s'envoie sur 0 dans  $A^Y/\pi A^Y$ , donc la fibre spéciale de  $X^Y$  est envoyée dans  $Y$ . Si  $u : Z \rightarrow X$  envoie la fibre spéciale  $Z_k$  dans  $Y$ , alors par platitude on a le diagramme (où  $Z = \text{Spec}(B)$ )

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{u}} & B \\ \cap & & \cap \\ A_K & \longrightarrow & B_K \end{array}$$

L'hypothèse  $u(Z_k) \subset Y$  signifie  $\tilde{u}(I) \subset \pi B$ . Soit  $f_k \in I$ , par platitude  $b_k \in B$  tel que  $\tilde{u}(f_k) = \pi b_k$  est unique, donc  $\tilde{u}$  s'étend de manière unique à  $A^Y$  par  $\tilde{u}(f_k/\pi) = b_k$ .  $\square$

**Proposition 3.1.3 (Fonctorialité en  $(X, Y)$ )** *Supposons avoir un diagramme commutatif de schémas et sous-schéma fermés*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$$

(i) *Alors, il y a un unique morphisme  $(X_1)^{Y_1} \rightarrow (X_2)^{Y_2}$  rendant commutatif le carré évident, et de plus, si le diagramme ci-dessus est cartésien i.e.  $Y_1 = f^{-1}Y_2$ , alors en fait  $(X_1)^{Y_1} = (X_2)^{Y_2} \times_{X_2} X_1$ . En d'autres termes, l'éclatement commute au changement de base sur  $X$ .*

(ii) *Lorsque  $X_1 = X_2 = X$  (donc  $Y_1$  est un sous-schéma fermé de  $Y_2$ ), notons  $\tilde{Y}_1$  la préimage de  $Y_1$  par l'éclatement  $X^{Y_2} \rightarrow X$ . Alors, on a  $X^{Y_1} = (X^{Y_2})^{\tilde{Y}_1}$ .*

(iii) *La fibre spéciale de  $X^Y$  est  $Y \times_X X^Y$ .*

**Preuve :** En utilisant la propriété universelle, toutes ces assertions sont immédiates.  $\square$

Enfin nous rappelons l'existence d'une suite d'éclatements canonique qui décompose tout morphisme modèle  $X' \rightarrow X$ .

**Lemme 3.1.4** *Un morphisme modèle  $X' \rightarrow X$  qui est dominant sur la fibre spéciale, est un isomorphisme.*

**Preuve :**  $X'_k \rightarrow X_k$  est dominant ssi  $A_k \rightarrow A'_k$  est injectif, c'est-à-dire,  $\pi A' \cap A = \pi A$ . Si  $a' \in A'$ , vu dans  $A'_K = A_K$  il s'écrit  $a' = \frac{a}{\pi^k}$ . Alors,  $a = \pi^k a' \in A \cap \pi^k A' = \pi^k A$ . Comme les anneaux sont sans torsion, on en déduit que  $a' \in A$ .  $\square$

**Proposition 3.1.5 (Suite Standard d'éclatements [WaWe])**

*Tout morphisme modèle  $f : X' \rightarrow X$  est (de façon canonique) composé d'une suite d'éclatements, finie si  $X$  est de type fini :*

$$X' \rightarrow \cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X$$

*(si la suite n'est pas finie, on entend par là que  $X'$  est « limite projective » des  $X_i$ , c'est-à-dire que son algèbre de fonctions est la réunion des algèbres de fonctions  $A_i$  des  $X_i$ ). Cette suite est appelée la suite standard de  $f$ .*

**Preuve :** Si  $X'_k \rightarrow X_k$  est dominant, par le lemme on a  $X' = X$ . Sinon, on note  $Y$  son image, de sorte que  $X' \rightarrow X$  se factorise par  $X_1 = X^Y$ . Pour  $i \geq 1$ , tant que  $X'_k \rightarrow (X_i)_k$  n'est pas dominant, on éclate son image dans  $X_i$  et on obtient ainsi  $X' \rightarrow X_{i+1}$ . Il suffit de montrer que ce procédé prend fin après un nombre fini d'étapes. Or l'image  $Y \in X$  est définie par l'idéal  $I = A \cap \pi A'$ , donc  $A_1 = R[\pi^{-1}I] \supseteq \pi^{-1}A \cap A'$ . Par récurrence, on montre que  $A_n \supseteq \pi^{-n}A \cap A'$ . En prenant la réunion,  $A' = A' \cap A_K = A' \cap (\cup_n \pi^{-n}A) \subseteq \cup_n A_n \subseteq A'$ . Si  $A'$  est de type fini, on a égalité pour un certain  $n$ .  $\square$

**Remarque 3.1.6** Comme on l'a déjà fait observer, si  $X$  et  $X'$  ont des algèbres de fonctions qui sont plates et séparées pour la topologie  $\pi$ -adique, alors il en va de même pour chacun des membres de la suite standard.

Par ailleurs, si on travaille avec des  $R$ -algèbres (pour  $X$  et  $X'$ ) qui ont une propriété de finitude telle que : « localisée (ou localisée-complétée) en un premier d'une algèbre de type fini », la finitude de la suite standard reste naturellement vraie, par la même démonstration.

### 3.2 Éclatement d'actions

Un modèle peut avoir une structure supplémentaire de  $R$ -schéma en groupes. Dans la suite, un schéma, que ce soit un groupe ou non, sera encore appelé un modèle. Lorsque  $X', X$  sont des schémas en groupes, on demande bien sûr qu'un morphisme modèle  $X' \rightarrow X$  soit un morphisme de groupes : nous montrons dans la proposition suivante que c'est bien le cas.

#### Proposition 3.2.1 (Éclatement d'actions)

(i) *L'éclatement de Néron commute au produit : si  $X_1, X_2$  sont des modèles et  $Y_1, Y_2$  des sous-schémas fermés, alors l'éclaté de  $Y_1 \times Y_2$  dans  $X_1 \times X_2$  est le produit des éclatés de  $Y_i$  dans  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ .*

(ii) *En particulier, si  $X$  est un  $R$ -schéma en groupes et  $Y$  un sous-schéma en groupes de  $X_k$ , alors  $X^Y$  est un  $R$ -schéma en groupes et le morphisme modèle canonique est un morphisme de groupes.*

(iii) *Si  $\mu : G \times X \rightarrow X$  est une action d'un  $R$ -schéma en groupes plat (affine) sur un  $R$ -schéma plat (affine), si  $Y$  (resp.  $H$ ) est un sous-schéma fermé de  $X_k$  (resp. un sous-schéma en groupes fermé de  $G_k$ ) tels que  $Y$  soit  $H$ -stable, alors il y a une unique action induite  $\nu : G^H \times X^Y \rightarrow X^Y$  compatible avec  $\mu$ .*

$$\begin{array}{ccc} G^H \times X^Y & \longrightarrow & X^Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

**Preuve :** La commutation au produit est une conséquence directe de la propriété universelle. Donc, si  $X$  est un schéma en groupes et  $Y$  un sous-schéma en groupes fermé de  $X_k$ , alors par functorialité on peut éclater la multiplication

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ Y \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

pour obtenir une multiplication  $X^Y \times X^Y \rightarrow X^Y$ . De manière similaire, on obtient un morphisme d'inversion et une unité pour  $X^Y$ .

Enfin, dans le cas d'un schéma avec action, les mêmes raisonnements s'appliquent car le morphisme  $G^H \times X^Y \rightarrow G \times X \rightarrow X$  envoie la fibre spéciale dans  $Y$ .  $\square$

**Exemple 3.2.2** Décrivons la suite standard pour un morphisme modèle entre  $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R$  et  $\mathcal{G} = \mu_{p,R}$ . On suppose que  $R$  contient une racine primitive  $p$ -ème de l'unité  $\zeta$ , et on pose  $\lambda = \zeta - 1$ . A un changement de générateur près dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , il n'y a qu'un morphisme modèle qui, au niveau des algèbres, est donné par  $f : R[\mathcal{G}] = \frac{R[z]}{z^p-1} \hookrightarrow R[G] = R^p$ ,  $P(z) \mapsto (P(1), P(\zeta), \dots, P(\zeta^{p-1}))$ . Pour calculer l'éclatement posons  $z = 1 + \alpha$ , alors  $\{\alpha, \dots, \alpha^{p-1}\}$  est une base de  $\mathfrak{m}_{R[\mathcal{G}]}$ . Pour  $0 \leq i \leq p-1$ , soit  $\zeta^{[i]} = \frac{\zeta^i-1}{\zeta-1} = 1 + \zeta + \dots + \zeta^{i-1}$  et  $e = (\zeta^{[0]}, \dots, \zeta^{[p-1]}) \in R[G]$ . On voit que  $f(\alpha) = \lambda e$ , et que  $e$  engendre  $R[G]$  : en fait  $R[G] = R[e] = \frac{R[X]}{P_\lambda(X)}$ . Donc,  $R[\mathcal{G}] = R[\lambda e]$ ; le premier éclatement donne l'algèbre  $R[\mathcal{G}_1] = R[\frac{\lambda}{\pi}e]$ , et on reconnaît  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{H}_1$  (cf 1.4). En poursuivant les éclatements on découvre la suite :

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R = \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0 = \mu_p$$

Utilisons cette suite pour donner une démonstration plus géométrique de 1.4.1. Soit  $G$  un  $R$ -schéma en groupes fini et plat tel que  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_K \simeq G_K$ . On a vu que,  $G$  étant propre, cet isomorphisme se prolonge en un morphisme  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R \rightarrow G$ . Considérons la composition vers le modèle minimal  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R \xrightarrow{s} G \xrightarrow{t} \mu_p$  et sa suite standard qui est celle ci-dessus (à un automorphisme près de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ). Si l'image de la fibre spéciale par  $t$  est le groupe trivial 1, alors le premier cran de la suite standard de  $t$  est  $\mathcal{H}_1$ . En itérant, tant que l'image de la fibre spéciale par  $t_i : G \rightarrow \mathcal{H}_i$  est 1, le cran suivant est  $\mathcal{H}_{i+1}$ . Lorsque ce n'est plus le cas, c'est que  $t_i$  est dominant sur la fibre spéciale, donc  $G \simeq \mathcal{H}_i$ .  $\square$

### 3.3 Noyau de l'éclatement d'une action

Passons à l'étude du noyau d'une action éclatée. Un premier lemme va nous éclairer :

**Lemme 3.3.1** *Soient  $\mu : G \times X \rightarrow X$  et  $\nu : G^H \times X^Y \rightarrow X^Y$  dans la situation de 3.2.1(iii). Soient  $K = \ker(\mu)$  et  $L = \ker(\nu)$  leurs noyaux. Notons  $u : G^H \rightarrow G$  et  $f : X^Y \rightarrow X$  les éclatements. Alors,*

- (i)  $L \subset u^{-1}(K)$ .
- (ii)  $L = u^{-1}(K)$  si  $Y = X_k$ .

**Preuve :** Les morphismes  $u$  et  $f$  sont dominants, donc le morphisme  $t := (u|_L, f)$  aussi. On considère le triangle

$$\begin{array}{ccc} & L \times X^Y & \\ \swarrow t & & \searrow t \\ u(L) \times X & \xrightarrow{(\text{id}, \mu|_{u(L) \times X})} & u(L) \times X \end{array}$$

qui commute par compatibilité de  $\mu$  et de  $\nu$ . Or  $t$  est un épimorphisme dans la catégorie des schémas séparés ([EGA1], cor. 9.5.6) donc  $(\text{id}, \mu|_{u(L) \times X}) = \text{id}$  i.e.  $\mu|_{u(L) \times X} = \text{pr}_2$ . Donc  $u(L)$  agit trivialement, il factorise par le noyau  $K$ , d'où le résultat. L'assertion (ii) est évidente car si  $Y = X_k$ , alors  $X^Y = X$  et  $f = \text{id}$ .  $\square$

Ce lemme indique qu'il y a deux situations antagonistes :

- (1) si on n'éclate que le groupe  $G$  (i.e.  $Y = X_k$ ), alors  $L = u^{-1}(K)$  a tendance à augmenter. Par exemple, si on a initialement une action fidèle i.e. un noyau trivial  $K = 1$ , alors  $L = \ker(u)$  n'est pas trivial (sauf si  $u$  est un isomorphisme).
- (2) si on n'éclate que le schéma  $X$  (i.e.  $H = G_k$ ), alors  $u = \text{id}$  et par le lemme  $L \subset u^{-1}(K) = K$ . Donc ici le noyau diminue.

Dans l'application que nous avons en vue au paragraphe 4, on dispose d'un morphisme modèle  $f : X' \rightarrow X$ , et un groupe  $G$  agit universellement fidèlement sur  $X$ . Le morphisme  $f$  est décomposé canoniquement en sa suite standard d'éclatements. Il s'agit alors de « suivre » l'action de  $G$  lors de ces éclatements, et notamment, de faire en sorte qu'elle reste universellement fidèle (voir la preuve de 4.1 pour  $G$  abélien, au paragraphe suivant).

Partant d'une action universellement fidèle ( $K = 1$ ), dans le but de conserver cette propriété, le point (2) ci-dessus ainsi que 3.1.3(ii) montrent qu'on a intérêt à éclater des groupes « gros ». Le sous-schéma fermé  $Y \subset X_k$  à éclater étant imposé (dans la suite standard on éclate les images successives de la fibre spéciale par  $f$ ), le plus gros sous-groupe de  $G$  que l'on peut éclater pour obtenir encore une action doit stabiliser  $Y$ , i.e. doit être inclus dans le transporteur  $\text{Transp}_{G_k}(Y)$  (voir 1.2). Or, lorsque  $G$  est fini sur  $R$ , celui-ci est bien un sous-groupe de  $G_k$  (et pas seulement un sous-monoïde) :

**Lemme 3.3.2** *Si  $G$  est fini sur  $R$  on a  $H = \text{Transp}_{G_k}(Y) = \text{Norm}_{G_k}(Y)$ , c'est-à-dire que  $H$  est un sous-groupe (fermé) de  $G_k$ .*

**Preuve :** La base  $k$  étant un corps algébriquement clos, on sait que le schéma en groupes  $G_k$  est annulé par son ordre  $n$ . Donc le morphisme d'inversion est  $\pi_{n-1}$ , l'élévation à la puissance  $n - 1$ . Le résultat est alors clair sur les foncteurs de points de  $G, X, Y$  puisque  $g(Y) \subset Y$  implique  $g^{-1}(Y) = g^{n-1}(Y) \subset Y$ , q.e.d.  $\square$

La question qui se pose alors est la suivante :

**Question 3.3.3** Soit  $X$  un  $R$ -schéma affine, plat, de type fini (ou localisé, ou complété d'un schéma de type fini). Soit  $G$  un  $R$ -schéma en groupes fini et plat, et  $\mu : G \times X \rightarrow X$  une action universellement fidèle. Soit  $Y$  un sous-schéma fermé de la fibre spéciale  $X_k$ , et  $H = \text{Transp}_{G_k}(Y)$  son transporteur. L'action éclatée  $\nu : G^H \times X^Y \rightarrow X^Y$  est-elle universellement fidèle ?

L'exemple du paragraphe 5 donne de bonnes raisons de penser que la réponse est positive lorsque le groupe  $G$  est un  $p$ -groupe cyclique. Dans ce cas  $G$  a un modèle minimal qui est un groupe diagonalisable, et la simplicité de ce dernier permet de contrôler effectivement l'action. La démonstration du théorème 5.1 le montre ; par ailleurs il est vraisemblable que la seule difficulté supplémentaire vienne du fait que les algèbres de Hopf des schémas en groupes mis en jeu (à la place des  $\mathcal{H}_\ell$ ) ne sont plus monogènes (c'est ce que montre par exemple le calcul de la suite standard de  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_R \rightarrow \mu_{p^2,R}$ , comme dans 3.2.2).

Il faut noter qu'une tentative pour démontrer la proposition directement dans les termes de 3.3.3, c'est-à-dire en revenant aux définitions des éclatements, du transporteur... sur les anneaux de fonctions, semble ne pas pouvoir aboutir. Par ailleurs un essai par des méthodes plus formelles (utilisant les propriétés universelles et la functorialité) semble vain également car l'éclatement représente un foncteur défini sur les schémas *plats sur  $R$*  alors qu'au contraire le noyau a tendance à ne pas être plat.

**Exemple 3.3.4** Donnons un exemple qui montre qu'on doit effectivement éclater le transporteur tout entier. Soit  $G = \mu_{p,R}$  agissant sur  $X = \mathbb{A}_R^1 = \text{Spec}(R[t])$ , et éclatons l'origine  $Y = O$  dans  $X_k$ , définie par l'idéal  $(t)$ . Le transporteur, égal au normalisateur, est  $\mu_{p,k}$ . L'action est donnée par

$$\begin{aligned} R[t] &\rightarrow \frac{R[z]}{z^p-1} \otimes R[t] \\ t &\mapsto z \otimes t \end{aligned}$$

Si on éclate seulement  $\{1\} \subset \mu_{p,k}$ , c'est-à-dire que l'on pose  $u = \frac{z-1}{\pi}$ , alors l'action obtenue est  $t \mapsto (1 + \pi u) \otimes t$  qui n'est pas fidèle sur la fibre spéciale.

## 4 Réduction des actions de groupes sur un anneau de valuation discrète (cas affine)

Nous allons énoncer dans ce paragraphe un résultat similaire au théorème 2.1, lorsque  $X$  est maintenant supposé affine. La validité du théorème en question est conditionnée par celle de 3.3.3.

Le problème dans le cas affine est qu'on ne peut plus parler d'un schéma (ou même d'un espace algébrique)  $\text{Aut}_R(X)$ . Une idée naturelle pour contourner cet obstacle serait de plonger  $X$  dans un espace affine  $\mathbb{A}_R^N$ , de manière équivariante ( $G$  agit alors sur  $\mathbb{A}_R^N$  par automorphismes linéaires, par exemple par permutation des coordonnées). L'intérêt

est qu'on peut ensuite plonger  $\mathbb{A}_R^N$  dans  $\mathbb{P}_R^N$ , et considérer la clôture projective  $\overline{X}$  de  $X$  dans  $\mathbb{P}_R^N$ . Il y a maintenant un schéma  $\text{Aut}_R(\overline{X})$ , et l'action de  $G$  sur  $X$  se propage à  $\overline{X}$ . Malheureusement, si on fait apparaître de la sorte un groupe  $\widetilde{G}$ , on ne peut pas montrer qu'il agit universellement fidèlement sur  $X$  : une raison à cela est que la fibre spéciale  $X_k$  n'est pas dense dans la fibre spéciale  $(\overline{X})_k$  de  $\overline{X}$ .

Le principe de la démonstration est donc tout à fait différent. Il utilise les éclatements de Néron, sous la forme particulière du paragraphe 3, puisqu'on éclate ici des actions de groupes sur des schémas, en éclatant *en même temps* le schéma et le groupe qui agit. La méthode que nous proposons pour une approche effective du modèle  $\widetilde{G}$ , ne fonctionne que dans le cas des groupes abéliens.

**Théorème 4.1** *Soit  $G$  un groupe fini abélien d'ordre  $n$  et  $R$  un anneau de valuation discrète qui contient une racine primitive  $n$ -ème de l'unité. Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma affine, de type fini (ou localisé, ou complété d'un schéma de type fini), avec  $A$  plat sur  $R$  et séparé pour la topologie  $\pi$ -adique. Soit  $\mu : G \times X \rightarrow X$  une action de  $G$  sur  $X$ , fidèle sur la fibre générique  $X_K$ . Supposons que la réponse à la question 3.3.3 soit positive pour  $G$ . Alors,  $G$  a un unique modèle  $\widetilde{G}$  (fini et plat sur  $R$ ), qui agit universellement fidèlement sur  $X$ , et que  $G$  domine compatiblement.*

On rappelle que, lorsque deux groupes  $G, G'$  agissent sur  $X$ , on dit que  $G$  domine  $G'$  *compatiblement* si  $G$  domine  $G'$  (donc on a un morphisme  $u : G \rightarrow G'$ ) de telle sorte que l'action de  $G$  se déduise de celle de  $G'$  par  $u$ .

## Remarques 4.2

- (i) Compte tenu des commentaires faits à la suite de la question 3.3.3, il semble raisonnable de conjecturer que le résultat du théorème est donc vrai pour  $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ .
- (ii) Comme on l'a fait remarquer dans 1.3, le théorème prend tout son sens si on suppose les fibres de  $X$  au-dessus de  $R$  intègres.
- (iii) Intuitivement, l'hypothèse que «  $A$  est plat sur  $R$  et séparé pour la topologie  $\pi$ -adique » est nécessaire pour éviter la situation où  $X$  est en fait un  $K$ -schéma. Elle sert de manière essentielle lorsqu'on utilise la proposition 1.5.1.
- (iv) Si  $X$  est un  $R$ -schéma en groupes et que  $G$  agit par morphismes de groupes, il en est de même de  $\widetilde{G}$ . En effet, les axiomes qui traduisent le fait que  $G$  agit par morphismes de groupes sont des égalités entre des schémas plats sur  $R$ , vraies par hypothèse sur la fibre générique ; or on rappelle qu'un tel morphisme est déterminé par sa valeur sur la fibre générique.
- (v) Pour diverses raisons, il est sans espoir de vouloir étendre le résultat par recollement à un  $R$ -schéma quelconque (séparé, de type fini, localement libre sur  $R$ ). Par exemple, étant donné un recouvrement affine de  $X$ , on ne peut pas assurer que les  $U_i \cap U_j$  soient localement libres sur  $R$ . Par ailleurs,  $\widetilde{G}$  ne « varie pas le long de  $X$  », ce qui annonce des incompatibilités sur les intersections  $U_i \cap U_j$ .

Faisons l'observation (essentielle) que la proposition 2.3 se reconduit ici de la même façon. Passons à la démonstration :

**Preuve :** Par hypothèse,  $X_K$  est muni d'une action fidèle de  $G$ , qui coïncide sur  $\text{Spec}(K)$  avec son dual de Cartier  $D(G)$  (puisque'il y a dans  $R$  une racine primitive  $p^n$ -ème de l'unité). Cela correspond par 1.5.1 à une  $G$ -graduation  $A_K = \bigoplus_{g \in G} (A_K)_g$ . Posons  $B_g = (A_K)_g \cap A$  et  $B = \bigoplus_{g \in G} B_g$  : il est clair que c'est un sous-anneau de  $A$ , plat et séparé pour la topologie  $\pi$ -adique, donc muni par construction d'une action universellement fidèle de  $D(G)$

(proposition 1.5.1). Le schéma  $Y = \text{Spec}(B)$  est un modèle de  $X_K$ , et on a un morphisme modèle  $f : X \rightarrow Y$ . De plus  $G$  domine  $D(G)$ , compatiblement aux actions sur  $X$  et  $Y$ . Soit  $X = X_n \rightarrow X_{n-1} \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = Y$  la suite standard de  $f$  (proposition 3.1.5). Elle correspond à éclater les images successives  $Z_0, Z_1, \dots$  de  $X_k$  dans  $Y, X_1, \dots$ . Il est clair par ailleurs que l'image de  $G_k$  dans  $D(G)_k$  stabilise  $Z_0$ , c'est-à-dire qu'elle est incluse dans le transporteur, égal au normalisateur par le lemme,  $\text{Norm}_{D(G)_k}(Z_0)$ . En éclatant, dans  $D(G)$ , ce normalisateur tout entier, on obtient un  $R$ -schéma en groupes  $\tilde{G}_1$  qui agit universellement fidèlement sur  $X_1$ , compte tenu de l'hypothèse que 3.3.3 a une réponse positive. On itère en éclatant  $\text{Norm}_{\tilde{G}_{1,k}}(Z_1)$ , etc. Au terme du processus on obtient un  $R$ -schéma en groupes  $\tilde{G} := \tilde{G}_n$  qui agit universellement fidèlement sur  $X = X_n$ .

Prouvons l'unicité de  $\tilde{G}$ . Soit  $G'$  un modèle de  $G$ , dominé par  $G$ , et agissant sur  $X$  compatiblement. On a une factorisation  $G \rightarrow G' \rightarrow D(G)$  (minimalité du dual de Cartier, cf [WaWe, cor. 2.4]). Soit  $G' = G'_m \rightarrow \cdots \rightarrow G'_0 = D(G)$  la suite standard. L'image de la fibre spéciale par  $G'_1 \rightarrow D(G)$  est incluse dans  $\text{Norm}_{D(G)_k}(Z_0)$ , donc l'éclatement donne  $G'_1 \rightarrow \tilde{G}_1$  (3.1.3(ii)). En itérant on voit que  $G'_i$  domine  $\tilde{G}_i$ , pour tout  $i$ , d'où finalement un morphisme  $u : G' \rightarrow G'_n \rightarrow \tilde{G}$ . On a alors un diagramme d'actions

$$\begin{array}{ccc} G' \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \parallel \\ \tilde{G} \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Dans cette situation, le noyau de l'action de  $G'$  est  $\ker(G' \rightarrow \tilde{G})$  (lemme 3.3.1), donc trivial en supposant que  $G'$  agit universellement fidèlement. Ainsi  $G' \simeq \tilde{G}$ .  $\square$

## 5 Exemple : réduction des revêtements de degré $p$

Soit  $(R, \mathfrak{m}_R, k, K, \pi)$  un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel algébriquement clos. Dans ce paragraphe nous appliquons la méthode du précédent à l'étude de la réduction des revêtements de courbes lisses sur  $R$ , dans le cas du groupe de Galois  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . C'est l'aspect local qui est traité : on considère donc un germe de courbe lisse sur  $R$ , c'est-à-dire le spectre de  $A = R[[t]]$ , et on étudie la réduction de revêtements sur  $K$  de la forme  $\phi : \text{Spec}(B_K) \rightarrow \text{Spec}(A_K)$ , galoisiens de groupe  $G$ . Le cas où  $\phi$  est un torseur a été traité par [He], [GM1]. Ici nous étendons la classification au cas d'une action non nécessairement libre, comme illustration de la technique des éclatements de Néron.

Dans ce paragraphe, on suppose que  $R$  contient une racine primitive  $p$ -ème de l'unité  $\zeta$ , et on pose  $\lambda = \zeta - 1$ . On note  $v_\pi$  la valuation normalisée de  $R$  et  $s = v_\pi(\lambda)$ . On sait qu'il existe une unité  $\gamma_0 \in R^\times$  telle que  $p = \gamma_0 \lambda^{p-1}$ , de sorte qu'il existe  $\gamma \in R^\times$  tel que  $p = \gamma \pi^{s(p-1)}$ . Enfin, dans tout le § 5, on note par une barre  $\bar{\phantom{x}}$  la réduction modulo  $\pi$ , i.e., pour toute  $R$ -algèbre  $B$  et  $b \in B$ ,  $\bar{b} \in B_k$ .

Le résultat du paragraphe est le théorème suivant. Soit  $X = \text{Spec}(A)$ , où  $A = R[[t]]$ , un germe de courbe lisse sur  $R$ . Soit  $\phi : Y_K \rightarrow X_K$  un revêtement galoisien de groupe  $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ;  $Y_K$  est une  $R$ -algèbre formellement lisse et  $\phi$  est génériquement étale. Soit  $Y = \text{Spec}(B)$  obtenu par normalisation de  $X$  dans  $Y_K$ ; le groupe  $G$  agit sur  $Y$ . On suppose que la fibre spéciale de  $Y$  est intègre. Les anneaux locaux  $A_{(\pi)}$  et  $B_{(\pi)}$  des points génériques des fibres spéciales de  $X$  et  $Y$  sont des anneaux de valuation discrète; soit  $\delta$  la valuation de la différentielle de l'extension correspondante.

**Théorème 5.1** *On a  $\delta = (s - m)(p - 1)$  pour un  $m \in \{0, \dots, s\}$ , et  $X$  est le quotient de  $Y$  par  $\mathcal{H}_m$  agissant universellement fidèlement.*

Le groupe  $\mathcal{H}_m$  (voir 1.4) est donc le modèle de réduction  $\tilde{G}$  du groupe  $G$  pour son action sur  $\text{Spec}(B)$ . La preuve du théorème donne la structure précise de  $B$  comme  $A$ -algèbre (voir lemme 5.3.2); contrairement au cas des toseurs,  $B$  n'est pas en général  $A$ -algèbre monogène.

Dans la démonstration du théorème 4.1, on a vu qu'il existe un anneau intermédiaire  $A \subset C \subset B$ , avec action universellement fidèle de  $D(G) = \mu_{p,R}$  (prendre garde que les notations sont différentes de celles de 4.1). De plus,  $A$  est l'anneau d'invariants de  $C$  sous  $D(G)$  et  $C_K = B_K$ . L'action  $\tilde{G} \times \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B)$  est obtenue à partir de  $D(G) \times \text{Spec}(C) \rightarrow \text{Spec}(C)$  par une suite finie d'éclatements : c'est la suite standard entre  $\text{Spec}(B)$  et  $\text{Spec}(C)$ , et les éclatements successifs des normalisateurs dans  $\tilde{G}_0 = D(G)$ ,  $\tilde{G}_1 \dots$ . La difficulté majeure pour mener ceci à bien est la connaissance de l'algèbre  $C$  et des éclatés : c'est ce qui occupe 5.1, 5.2 et une partie de 5.3.

## 5.1 Description de $C$

Par la proposition 1.5.2 on a donc une graduation  $B_K = \bigoplus_{j=0}^{p-1} (B_K)_j$  avec de plus  $(B_K)_j = A_K w_j$  (les indices sont à prendre modulo  $p$ ). L'algèbre  $C$  est alors définie par  $C = \bigoplus_{j=0}^{p-1} (B_K)_j \cap B$ . Dans les lignes qui suivent nous allons décrire ces algèbres  $B_K$  et  $C$ , pour ensuite suivre le processus d'éclatements qui nous mènera à  $\tilde{G} = \mathcal{H}_m$ . Les résultats sont résumés par (III.1), (III.2), (III.3), (III.4).

### Choix de $w_j$

Par platitude,  $B_K = B[1/\pi]$ . Donc dans la décomposition ci-dessus, on peut choisir  $w_j \in B_K$  avec

$$w_j \in B, \quad \bar{w}_j \neq 0 \tag{III.1}$$

Le choix de  $w_j$  dans le « sous-espace associé à  $\zeta^j$  » est unique à multiplication par une unité de  $A_K$  près, et la condition ci-dessus montre qu'il est en fait unique à multiplication par un élément de  $A$  près.

### Puissances de $w_j$

Pour la suite, posons  $w := w_1$ . On a  $w^j \in A_K w_j$  donc il existe  $h_j \in A_K$  satisfaisant  $w^j = h_j w_j$ . Mais,  $B_k$  étant intègre,  $h_j \in A$  et  $\bar{h}_j \neq 0$ . En particulier, pour  $j = p$  on a  $w^p = f \in A$ , et  $\bar{f} \neq 0$ .

L'hypothèse que  $B$  n'a pas de diviseur de zéro empêche  $f$  d'être une puissance  $p$ -ème. De plus,  $f$  peut être choisi sans facteur puissance  $p$ -ème, car si  $w^p = f' u^p$ , alors  $w' = w/u$  satisfait  $(w')^p = f' \in A$ , donc  $w' \in B$  car  $B$  est intégralement clos, donc on peut remplacer  $w$  par  $w'$ . L'anneau  $A$  étant factoriel, décomposons  $f$  en facteurs irréductibles :

$$f = q_1^{e_1} \dots q_r^{e_r}, \quad 1 \leq e_i < p \tag{III.2}$$

Observons que, à un automorphisme de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  près (i.e. quitte à changer le choix de  $w$ ), on peut supposer que  $e_1 = 1$ . Le cas  $f \in A^\times$  peut être inclus dans cette formulation si l'on

accepte que  $q_1 \in A^\times$ . Ce qui a été fait pour  $w$  peut être fait pour tous les  $w_j$ , en particulier on a ( $f_j$  choisi sans facteur puissance  $p$ -ème) :

$$w_j^p = f_j \in A \quad (\text{III.3})$$

### Choix de $h_j$ ; coefficients $h_{i,j}$ ; présentations

On a  $(h_j)^p f_j = (h_j w_j)^p = w_j^{jp} = f_j^j = q_1^{j e_1} \dots q_r^{j e_r}$ , et comme  $f_j$  n'a pas de facteur puissance  $p$ -ème, on voit que, quitte à multiplier par une unité si nécessaire, on peut prendre  $h_j = q_1^{\lfloor \frac{j e_1}{p} \rfloor} \dots q_r^{\lfloor \frac{j e_r}{p} \rfloor}$ . Par conséquent  $f_j = \frac{f_j^j}{(h_j)^p} = q_1^{j e_1 \bmod p} \dots q_r^{j e_r \bmod p}$ . La relation suivante s'en déduit aussitôt :

$$w_i w_j = h_{i,j} w_{i+j} \quad (\text{III.4})$$

où  $h_{i,j} := f^{\lfloor \frac{i+j}{p} \rfloor} \frac{h_{i+j}}{h_i h_j} = q_1^{\lfloor \frac{(i+j)e_1}{p} \rfloor - \lfloor \frac{ie_1}{p} \rfloor - \lfloor \frac{je_1}{p} \rfloor} \dots q_r^{\lfloor \frac{(i+j)e_r}{p} \rfloor - \lfloor \frac{ie_r}{p} \rfloor - \lfloor \frac{je_r}{p} \rfloor} \in A$ . Les  $h_j$  sont récupérés à partir des  $h_{i,j}$  par  $h_j = h_{1,1} h_{1,2} \dots h_{1,j-1}$ . Enfin, comme la table de multiplication de  $B_K$  est entièrement déterminée par les  $h_{i,j}$ , on obtient la présentation suivante :

$$B_K \simeq \frac{A_K[X_1, \dots, X_{p-1}]}{(X_i X_j - h_{i,j} X_{i+j})_{i,j}}$$

Pour ce qui est de l'algèbre  $C$ , on a  $C_i = (B_K)_i \cap B = A w_i$ , et ce qui précède montre :

**Lemme 5.1.1** *On a  $C \simeq \frac{A[X_1, \dots, X_{p-1}]}{(X_i X_j - h_{i,j} X_{i+j})_{i,j}}$ .* □

Partant de cette présentation, on peut donner une description plus commode de  $C$ , qui montre en particulier que  $C$  est intègre. Considérons l'injection de  $\mathcal{A} := \frac{A[X]}{X^p - f}$  dans son corps de fractions  $\mathcal{H}$ . Soit  $\alpha$  l'image de  $X$  dans  $\mathcal{A}$ , et considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi_0 : A[X_1, \dots, X_{p-1}] &\rightarrow \mathcal{A} \left[ \frac{\alpha^2}{h_2}, \dots, \frac{\alpha^{p-1}}{h_{p-1}} \right] \subseteq \mathcal{H} \\ X_i &\mapsto \frac{\alpha^i}{h_i} \end{aligned}$$

De toute évidence,  $\varphi_0$  s'annule sur les relations  $X_i X_j - h_{i,j} X_{i+j}$  et donc induit un morphisme  $\varphi$  qui est un morphisme surjectif de  $A$ -modules libres de rang  $p$ , donc  $\varphi$  est un isomorphisme.

## 5.2 Formes réduites

**Lemme 5.2.1** *Il existe un entier maximal  $r \geq 0$  tel que  $\exists u, v \in A$ ,  $f = w^p + \pi^r v$ . On a  $r = pm$  avec  $m \leq s$ , et,  $u, v$  étant choisis,  $\bar{v}$  n'est pas une puissance  $p$ -ème. Une telle forme réduite pour  $f$  n'est pas unique.*

**Preuve :** Noter que, comme cas particulier du lemme,  $r = 0$  ssi  $\bar{f}$  n'est pas une puissance  $p$ -ème. Établissons d'abord la première assertion. Si elle n'est pas vraie, il existe des éléments  $u_n, v_n$  tels que  $f = u_n^p + \pi^{r_n} v_n$  avec  $r_n \rightarrow \infty$ . Mais  $A$  étant complet pour la topologie  $\pi$ -adique, on doit avoir  $u_n^p \rightarrow f = w^p$ , et donc par le principe des tiroirs, une sous-suite des  $u_n$  tend vers  $\zeta^e w$  pour un  $e$ . Mais  $w = \lim \zeta^{-e} u_n \in A$  est une contradiction.

Soit  $f = u^p + \pi^r v$  une telle expression avec  $r$  maximal. Nous allons montrer que  $r \leq ps$ . Pour ce faire, considérons, pour un entier  $e$  quelconque pour le moment, l'élément de  $B_K$  défini par  $\theta_e = \frac{u - \bar{u}}{\pi^e}$ . Il satisfait l'équation

$$f = u^p + \pi^r v = (u + \pi^e \theta_e)^p \quad \text{i.e., en développant : } \pi^{ep} \theta_e^p + \dots + p\pi^e u^{p-1} \theta_e = \pi^r v$$

D'abord on observe que  $\bar{u} \neq 0$ . En effet, si  $u = \pi^\beta u_0$  avec  $\beta \geq 1$ , alors choisissant  $e = \beta$  dans l'équation on aurait  $\pi^{\beta p} |f$  contredisant l'hypothèse que  $f$  est choisi sans puissance  $p$ -ème. Supposons maintenant que  $r > ps$  et choisissons  $e = s$ . On peut diviser les deux membres par  $\pi^{ps}$ , d'où une équation unitaire donc  $\theta_s \in B$ . Après réduction modulo  $\pi$  on obtient  $\bar{\theta}_s^p + \bar{\gamma} \bar{u}^{p-1} \bar{\theta}_s = 0$  (se rappeler que  $p = \gamma \pi^{s(p-1)}$ ). Cette équation est scindée :

$$\bar{\theta}_s \prod_{i=0}^{p-2} (\bar{\theta}_s - \bar{\sigma}^i \bar{\tau} \bar{u}) = 0 \quad (\text{III.5})$$

où  $\sigma \in R$  est une racine  $(p-1)$ -ème de l'unité, et  $\tau \in R$  est une racine  $(p-1)$ -ème de  $-\gamma$ .

Montrons qu'alors on a  $B = A[\theta_s]$ . Pour cela il suffit de voir que  $A[\theta_s]$  est intégralement clos ; on utilise le critère  $(R_1) + (S_2)$  de Serre. La condition  $(S_2)$  est automatique car  $A[\theta_s]$  est d'intersection complète. Pour vérifier  $(R_1)$  il faut considérer les idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $A[\theta_s]$  de hauteur 1. On peut supposer que  $\mathfrak{p}$  est au-dessus de l'idéal  $(\pi)$  de  $R$ . D'après l'équation (III.5) ci-dessus les idéaux recherchés sont  $\mathfrak{p} = (\pi, \theta_s)$  et les  $\mathfrak{p}_i = (\pi, \theta_s - \sigma^i \tau u)$  pour  $i \in \{0, \dots, p-2\}$ . On doit montrer que les localisés en ces premiers sont des anneaux de valuation discrète. Traitons le cas du localisé en  $\mathfrak{p} = (\pi, \theta_s)$ . Toujours par l'équation (III.5) on a  $\theta_s \prod_i (\theta_s - \sigma^i \tau u) = \pi z$  (avec  $z \in A[\theta_s]$ , et pas seulement  $z \in B$ ). Or dans  $A[\theta_s]_{\mathfrak{p}}$  l'élément  $\theta_s - \sigma^i \tau u$  est inversible ; il s'ensuit que  $\theta_s \in (\pi)$  donc  $A[\theta_s]_{\mathfrak{p}}$  est principal engendré par  $\pi$ . Le cas des autres localisés  $A[\theta_s]_{\mathfrak{p}_i}$  est similaire. Il s'ensuit que  $A[\theta_s] = B$ . Comme  $B \otimes k$  est supposé intègre, et que  $A[\theta_s] \otimes k$  ne l'est pas, ceci est impossible.

Voyons maintenant que  $p|r$ . Par contraposée, la division euclidienne donne  $r = pm + r_0$ ,  $0 < r_0 < p$ ,  $m < s$ . Après division par  $\pi^{pm}$ , l'équation vérifiée par  $\theta_m$  est

$$\theta_m^p + \dots + \gamma \pi^{(s-m)(p-1)} u^{p-1} \theta_m = \pi^{r_0} v$$

Soit  $\theta_m = \pi^\delta \theta'$  avec  $\delta$  la  $\pi$ -valuation de  $\theta_m \in B_K$ . Comme  $(s-m)(p-1) > 0$ , l'équation réduite modulo  $\pi$  est  $\bar{\theta}_m^p = 0$  donc  $\delta \geq 1$  ( $B_k$  est intègre). Alors, dans le membre de gauche, tous les termes ont une valuation  $\geq p$  ; dans le membre de droite, c'est  $v_\pi = r_0 < p$ , contradiction.

Enfin,  $\bar{v}$  n'est pas une puissance  $p$ -ème, car si on avait  $v = c^p + \pi^\beta d$ , alors  $u^p + \pi^r v = (u + \pi^m c)^p - pu^{p-1} \pi^m c - \dots - pu(\pi^m c)^{p-1} + \pi^{mp+\beta} d$  ce qui contredirait la maximalité de  $r = mp$ .  $\square$

Réciproquement :

**Lemme 5.2.2** *Si  $f = u^p + \pi^{pm} v$  avec  $\bar{v}$  non puissance  $p$ -ème, alors  $r = pm$  est le  $r$  maximal.*

**Preuve :** Imaginons qu'on ait  $f = u^p + \pi^{pm} v = a^p + \pi^{pn} b$  avec  $m < n \leq s$ . Alors  $u$  et  $a$  doivent être égaux modulo  $\pi$ , d'où  $u = a + \pi^t \delta$  avec  $\delta \in A$ ,  $\bar{\delta} \neq 0$ . L'équation satisfaite par  $\delta$  est

$$\pi^{pn} b = \gamma \pi^{s(p-1)} \pi^t \delta a^{p-1} + \dots + \pi^{tp} \delta^p + \pi^{pm} v$$

En comparant les  $\pi$ -valuations on voit que nécessairement  $t = m$ . En divisant par  $\pi^{mp}$  on obtient une équation unitaire dont la réduction modulo  $\pi$  est  $\bar{\delta}^p + \bar{v} = 0$ . Ainsi,  $\bar{v}$  est une puissance  $p$ -ème.  $\square$

Une conséquence de ce lemme est que  $r = r(f)$  est invariant par multiplication par un élément  $a^p$ ,  $a \in A$ ,  $\bar{a} \neq 0$ . En particulier, on a  $r(f_j) = r((h_j)^p f_j) = r(f^j)$ . En élevant  $f = u^p + \pi^{pm}v$  à la puissance  $j$ , on voit que  $r(f) \leq r(f^j)$ . Donc,  $r(f) \leq r(f_j)$ , et par symétrie on a égalité. En conclusion, pour tout  $j$  il existe  $u_j, v_j$  tels que

$$w_j^p = f_j = u_j^p + \pi^{pm}v_j \quad (\text{III.6})$$

On verra *in fine* que  $m$  a une signification géométrique en termes de la différence de l'extension d'anneaux locaux des points génériques de  $\text{Spec}(A_k)$  et  $\text{Spec}(B_k)$ , comme annoncé dans le théorème 5.1.

### 5.3 Le processus d'éclatements

De manière intuitive, on peut voir dès le départ que  $C_k$  n'a qu'un premier minimal (i.e.  $\text{Spec}(C)$  est irréductible), car  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(C)$  est *ensemblément* surjective. Donc, le processus consiste à éclater la préimage (dans  $C$ ) du nilradical de  $C_k$  pour rendre  $C_k$  intègre. Notons  $C_\ell$  le  $\ell$ -ème éclaté de la suite standard (3.1.5).

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \text{Spec } B & \longrightarrow & \text{Spec } B \\
 \downarrow & \searrow \text{dashed} & \downarrow \text{dashed} \\
 & \tilde{G}_1 \times \text{Spec } C_1 & \longrightarrow \text{Spec } C_1 \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 \tilde{G} \times \text{Spec } C & \longrightarrow & \text{Spec } C
 \end{array}$$

**Lemme 5.3.1** *Pour  $1 \leq \ell \leq m$ ,  $C_\ell$  est engendré comme  $A$ -algèbre par les éléments  $\psi_{j,\ell} = \frac{w_j - u_j}{\pi^\ell}$ . Si  $\ell < m$  les images de ces éléments dans  $(C_\ell)_k$  sont nilpotentes ; l'algèbre réduite de  $(C_\ell)_k$  est  $A_k$ .*

**Preuve :** Les  $\psi_{j,\ell}$  satisfont une équation entière dérivée de  $w_j^p = u_j^p + \pi^{pm}v_j$  :

$$(\psi_{j,\ell})^p + \dots + \gamma \pi^{(s-\ell)(p-1)} u_j^{p-1} \psi_{j,\ell} = \pi^{p(m-\ell)} v_j \quad (\text{III.7})$$

Par conséquent,  $\psi_{j,\ell} \in B$  car  $B$  est intégralement clos. Par définition  $C_\ell$  est engendré par tous les  $c/\pi^\ell$  avec  $c \in C \cap \pi^\ell B$ . Écrivons  $c = \sum_i c_i w_i \in C$ , avec  $c_i \in A$ , alors

$$c = \sum c_i u_i + \sum c_i \pi^\ell \psi_{j,\ell}$$

Ceci montre que  $c \in C \cap \pi^\ell B \Rightarrow \sum_i c_i u_i \in A \cap \pi^\ell B = \pi^\ell A$ , de sorte que  $C_\ell = A[\{\psi_{j,\ell}\}_{j=1 \dots p-1}]$ . Alors, pour  $\ell < m$ , par l'équation ci-dessus,  $(\bar{\psi}_{j,\ell})^p = 0$ , et il est clair que  $((C_\ell)_k)_{\text{red}} = A_k$ .  $\square$

**Lemme 5.3.2**  $C_m = B$ .

**Preuve :** Par le critère  $(R_1) + (S_2)$  il suffit de vérifier que  $(C_m)_k$  est intègre, car alors le localisé  $(C_m)_{(\pi)}$  sera un anneau de valuation discrète, donc  $C_m$  intégralement clos, donc  $C_m = B$ . A partir de maintenant écrivons simplement  $\psi_j$  pour  $\psi_{j,m}$ . Des relations (III.4) pour  $C$  on déduit

$$(\pi^m \psi_i + u_i)(\pi^m \psi_j + u_j) = h_{i,j}(\pi^m \psi_{i+j} + u_{i+j}) \quad (\text{III.8})$$

Donc  $u_i u_j - h_{i,j} u_{i+j} \in A \cap \pi^m B = \pi^m A$  est de la forme  $\pi^m \sigma_{i,j}$  pour un  $\sigma_{i,j} \in A$  déterminé de manière unique. Les relations définissant  $C_m$  sont obtenues à partir de (III.8) en éliminant la  $\pi$ -torsion, d'où

$$\pi^m \psi_i \psi_j + (u_i \psi_j + u_j \psi_i) + \sigma_{i,j} = h_{i,j} \psi_{i+j}$$

Ce sont des relations définissant  $C_m$  comme  $A$ -algèbre, et par conséquent

$$(C_m)_k \simeq \frac{A_k[X_1, \dots, X_{p-1}]}{(\bar{u}_i X_j + \bar{u}_j X_i) + \bar{\sigma}_{i,j} - \bar{h}_{i,j} X_{i+j}}_{i,j}$$

De  $\bar{h}_{i,j} \bar{\psi}_{i+j} = \bar{u}_i \bar{\psi}_j + \bar{u}_j \bar{\psi}_i + \bar{\sigma}_{i,j}$ ,  $\bar{h}_j \bar{u}_j = \bar{u}^j$  et  $h_j = h_{1,1} h_{1,2} \dots h_{1,j-1}$ , il découle par récurrence que

$$\bar{h}_i \bar{\psi}_i = i \bar{u}^{i-1} \bar{\psi} + \bar{\tau}_i \quad (\text{III.9})$$

où  $\tau_i := \sum_{d=1}^{i-1} h_d \sigma_{1,d} u^{i-1-d}$  (partir de  $\bar{h}_{i+1} = \bar{h}_i \bar{h}_{1,i}$  et multiplier par  $\bar{\psi}_{i+1}$ ).

Après réduction modulo  $\pi$ , l'équation (III.7) est irréductible. En effet, si  $m = s$ , c'est une équation d'Artin-Schreier, qui si elle avait une racine serait entièrement scindée, donc toutes les racines se relèveraient, et donc  $\psi_j \in A$ . Si  $m < s$ , l'équation est  $(\bar{\psi}_j)^p = \bar{v}_j$  or  $\bar{v}_j$  n'est pas une puissance  $p$ -ème. En conséquence, dans tous les cas  $\mathcal{A}' = A_k[\bar{\psi}]$  est intègre. Soit  $\mathcal{H}' = \text{Frac } \mathcal{A}'$  et définissons un morphisme

$$\begin{aligned} \phi_0 : A_k[X_1 \dots X_{p-1}] &\rightarrow \mathcal{H}' \\ X_i &\mapsto \frac{i \bar{u}^{i-1} \bar{\psi} + \bar{\tau}_i}{\bar{h}_i} \end{aligned}$$

A cause de (III.9) il est clair que toutes les relations  $(\bar{u}_i X_j + \bar{u}_j X_i) + \bar{\sigma}_{i,j} - \bar{h}_{i,j} X_{i+j}$  sont dans le noyau de  $\phi_0$ , et que le morphisme induit  $\phi$  est un isomorphisme sur son image.  $\square$

Soit  $\delta$  la valuation de la différentielle de l'extension des anneaux locaux  $A_{(\pi)}$  et  $B_{(\pi)}$  des points génériques des fibres spéciales de  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Y = \text{Spec}(B)$  (voir énoncé du théorème 5.1). La différentielle est l'idéal annulateur du module des différentielles  $\Omega_{B_{(\pi)}/A_{(\pi)}}^1$ . Par 5.3.2, on a  $B = A[\psi_{j,m}]_{1 \leq j \leq p-1}$ . En différentiant les équations satisfaites par  $\psi_{j,m}$  :  $(\psi_{j,m})^p + \dots + \gamma \pi^{(s-m)(p-1)} u_j^{p-1} \psi_{j,m} = v_j$  on obtient que l'idéal annulateur est  $(\pi^\delta)$  où  $\delta = (s-m)(p-1)$ . On peut enfin conclure :

**Théorème (5.1)** *On a  $\delta = (s-m)(p-1)$  pour un  $m \in \{0, \dots, s\}$ , et  $X$  est le quotient de  $Y$  par  $\mathcal{H}_m$  (voir 1.4) agissant universellement fidèlement.*

**Preuve :** Comme indiqué au début de 5.3, on suit le procédé d'éclatements décrit dans la preuve de 4.1 en éclatant dans  $C_\ell$  (tant que  $\ell < m$ ) l'idéal  $I_\ell = \sqrt{\pi} = (\pi, \psi_{1,\ell}, \dots, \psi_{p-1,\ell})$ . Par récurrence, on établit la description suivante. On a  $\tilde{G}_\ell = \mathcal{H}_\ell$ ; l'algèbre de Hopf de  $\mathcal{H}_\ell$ ,

intermédiaire entre  $R[\mu_p] = \frac{R[z]}{z^p-1}$  et  $R[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = R^p$ , est engendrée par  $\frac{z-1}{\pi^\ell}$  (3.2.2). L'action de  $\mathcal{H}_\ell$  sur  $C_\ell$  est donnée par

$$\tilde{\mu}_\ell(\psi_{j,\ell}) = \tilde{\mu}_\ell\left(\frac{w_j - u_j}{\pi^\ell}\right) = \frac{1}{\pi^\ell}\tilde{\mu}(w_j - u_j) = \frac{1}{\pi^\ell}(z^j \otimes w_j - 1 \otimes u_j) = 1 \otimes \psi_{j,\ell} + \frac{z^j - 1}{\pi^\ell} \otimes w_j$$

Comme  $\frac{z^j-1}{\pi^\ell}$  est non nul modulo  $\pi$  dans  $R[\mathcal{H}_\ell]$  (c'est un générateur de  $R[\mathcal{H}_\ell] \otimes k$ ), l'action est fidèle sur la fibre spéciale. Par ailleurs on voit que  $(\mathcal{H}_\ell)_k$  ne stabilise pas le sous-schéma d'idéal  $I_\ell \otimes k = \sqrt{0}$  (c'est-à-dire,  $\tilde{\mu}_\ell(I_\ell) \not\subset R[\mathcal{H}_\ell] \otimes I_\ell$ ) donc c'est le sous-groupe trivial qu'on éclate (voir démonstration du théorème 4.1). On obtient  $\tilde{G}_{\ell+1} = \mathcal{H}_{\ell+1}$ .

Lorsque  $\ell + 1 = m$ , on a  $\tilde{G}_m = \mathcal{H}_m$ . Par le lemme précédent 5.3.2, on a  $C_m = B$  ce qui signifie la fin de la suite d'éclatements.  $\square$

## Chapitre IV

# A moduli space for wild covers in positive characteristic

ABSTRACT : In this note we study the modular properties of a family of cyclic coverings of  $\mathbb{P}^1$  of degree  $N$ , in characteristic  $p \geq 0$ . This provides an example of an algebraic stack of wildly ramified covers whose moduli space has good reduction. We compute the automorphism group of these curves, provided that  $N$  and  $p$  are both odd. We construct a coarse moduli space in the tame case ( $N$  prime to  $p$ ), describe the cusps of its natural compactification, and calculate the modular Picard group. We also construct a coarse moduli space in the wild case, over an algebraically closed field  $k$  of characteristic  $p$ .

We are interested here in algebraic curves called  *$N$ -state Potts curves* ( $N \geq 3$  is an integer), that provide interesting examples of families of Galois covers, both in the cases of tame and wild ramification. They were previously studied by S-S. Roan in [Ro].

In the theory of Galois covers of curves, much is known in the *tame* case where the characteristic  $p \geq 0$  of the base field does not divide the order of the group of automorphisms. Precisely, fix a genus  $g$ , a finite group  $G$ , and invariants of ramification. Then the Galois covers  $C \rightarrow D \simeq C/G$  with  $g = g(C)$  and ramification as prescribed form a smooth algebraic stack over  $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$ . It is also known how to compactify it with stable covers. By contrast, when  $p$  divides  $|G|$ , the base of the (uni)versal deformation of a  $G$ -cover is very nasty in general (not even reduced), meaning that the corresponding classifying stack is far from being smooth. Moreover, there exist smooth  $G$ -covers in characteristic 0 that do not have good (i.e. smooth) reduction to characteristic  $p$ , and vice versa there exist smooth  $G$ -covers in char.  $p$  that do not lift to char. 0. Thus it is hard in general to establish bridges between char. 0 and char.  $p$ .

We focus here on the problem of giving such a bridge ; essentially this means building a moduli space over a valuation ring of mixed characteristics  $(0, p)$ , and studying specialization and generization. This is possible for the example of  $p$ -state Potts curves (the arguments given in section 4 need very little adaptation to yield this, as we indicate in 4.2). It is worth observing that general theorems prove the existence of a coarse moduli space

---

Key words : covers of algebraic curves, Hurwitz moduli space, algebraic stack, wild ramification, reduction mod  $p$ .

AMS Classification : 14D22, 14H10, 14L30.

(as an algebraic space) for separated algebraic stacks [KeMo]. However, such an object, come out of the blue, is hard to comprehend. By contrast, here we propose an « explicit » construction, thanks to which we can provide simple answers to reduction problems. The construction makes use of the existence of a  $j$ -invariant, like in the case of elliptic curves or Igusa's classification of curves of genus 2.

The strategy of the article is to give full details in the case of tame Potts curves (i.e.  $N$  prime to  $p$ ), in order to prepare the ground for the study of all the phenomena that remain quite obscure in the wild case (i.e.  $p|N$ ). In particular, further work should treat two aspects over  $R$  (mixed characteristic) : the problem of compactifying (in a modular way) the space of  $p$ -Potts curves, and the reduction problem for curves of level  $N$  divisible by  $p$ , e.g.  $N = p^2$  (see 2.2).

Let us now introduce the main character of the article. Let  $N \geq 3$  be an odd integer.

**Definition 0** *An  $N$ -state Potts curve (or  $N$ -Potts curve) is a (smooth) hyperelliptic curve of genus  $N - 1$ , which is a cyclic covering of  $\mathbb{P}^1$  of degree  $N$ .*

Actually there is another definition when  $N$  is prime to the characteristic, slightly different at least from a modular point of view. We will rather use this variant in the study of the tame case, because it fits in the general setting of chapter II. We will indicate this in the text.

As a first step, in order to study the basic algebraic and arithmetic properties of Potts curves, we need a precise knowledge of finite subgroups of the projective linear group  $\mathrm{PGL}_2$  over a field. The classification of finite subgroups of  $\mathrm{PGL}_2$  does not give their description as subsets but only their group-theoretic structure. Hence we gathered some useful results in the first section.

In the second section we introduce Potts curves and compute their automorphism groups. It turns out that only when  $N = p$  does there exist Potts curves in the wild ramification case (2.2).

In the third section, we treat the tame case. For simplicity we assume that all base schemes contain a primitive  $N$ -th root of unity  $\zeta_N$ , and we rule out the prime 2 because of hyperellipticity. The main result of this section is the computation of the moduli space of the stack  $\mathcal{P}^t$  of  $N$ -Potts curves (the exponent « t » stands for « tame »), as a stack over  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$  (theorem 3.1.1) :

**Theorem** *The scheme  $\mathbb{A}_*^1 \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$  is a coarse moduli space for the algebraic stack  $\mathcal{P}^t$ .*

Also, the modular Picard group of  $\mathcal{P}^t$  and the compactification by stable curves are described.

At last, in the fourth section, we tackle the wild case. We build the moduli space of  $p$ -Potts curves over an algebraically closed field of characteristic  $p > 0$ , and obtain an even more precise result on the corresponding stack  $\mathcal{P}^w$  (the exponent « w » stands for « wild ») (see theorem 4.1.2) :

**Theorem** *The scheme  $\mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$  is a coarse moduli space for the algebraic stack  $\mathcal{P}^w$ . Moreover, the map from  $\mathcal{P}^w$  to its moduli space is a gerbe, with fibres isomorphic to  $BG$  where  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (precisely,  $\mathcal{P}^w // G \simeq \mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$ ).*

**Notations :** In the whole text,  $k$  is a field of characteristic  $p \neq 2$ . The characteristic exponent of  $k$  is  $\mathrm{expchar}(k) = \max\{1, \mathrm{char}(k)\}$ . As usual, the prime field is  $\mathbb{F}_p$ , e.g.  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ .

We denote by  $(m, n)$  the gcd of two integers  $m$  and  $n$ . When  $p > 0$  and  $n$  is an integer with  $n = p^v n_0$  and  $(n_0, p) = 1$ , we denote by  $\mu_n^* = \mu_{n_0}^*$  the set of primitive  $n$ -th roots of unity in an algebraic closure of  $k$ . In particular,  $\mu_p^* = \{1\}$ . Also,  $|E|$  stands for the cardinal of a set  $E$ . Let  $N \geq 3$  be an odd integer, and  $\zeta_N \in \mu_N^*$ , fixed once for all. We assume in the whole text that  $\zeta_N \in k$ .

## 1 Preliminaries on Dickson's theorem

There is no pretence to originality in the contents of this section, but the results are stated here for our needs because they could not be found in the literature. We give a classification of *conjugacy* classes of elements of finite order in  $\mathrm{PGL}_2(k)$ , instead of merely *isomorphism* classes. Its use is to prepare the ground for the proofs of 2.1.6 and 2.2.2 that give the automorphisms of Potts curves. The reader may without prejudice skip this section and go straight to § 2, referring to the results below when necessary.

Because of their simplicity, proofs are sometimes elliptical (or even omitted). In this section,  $k$  is algebraically closed. We define an equivalence relation in  $\mu_n^*$  by  $\rho' \sim \rho$  iff  $\rho' = \rho$  or  $\rho' = 1/\rho$ .

**Proposition 1.1** *Let  $A \in \mathrm{PGL}_2(k)$  be an automorphism of finite order  $n$ . Then,*

- (i)  *$n$  is either prime to  $p$ , or equal to  $p$ .*
- (ii) *as an automorphism of  $\mathbb{P}_k^1$ ,  $A$  is conjugated to  $x \mapsto \rho x$ , for some  $\rho \in \mu_n^*$ , when  $(n, p) = 1$ , resp. to  $x \mapsto x + 1$ , when  $n = p$ .*

*The set  $\mu_n^*/\sim$  classifies conjugation classes of elements of order  $n$ , and more precisely,*

$$\mathrm{ord}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \text{there exists } \rho \in \mu_n^*/\sim \text{ such that } P_\rho(A) := (1+\rho)^2 \det A - \rho(\mathrm{tr} A)^2 = 0$$

*(this makes sense because  $P_\rho(A)$  is homogeneous in the coefficients of  $A$ ).*

**Proof :** Assume  $A \neq \mathrm{id}$ .

(i) if  $A$  has only one eigenvalue  $\lambda \in k$ , then it is conjugated to  $\begin{bmatrix} \lambda & u \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  with  $u\lambda \neq 0$ , that is to say, conjugated to  $x \mapsto x + 1$ . One readily checks with  $\rho = 1$  that the last claim  $P_1(A) = 0$  is true.

(ii) if  $A$  has two distinct eigenvalues  $\lambda_+, \lambda_-$ , necessarily  $(n, p) = 1$ . Then  $A$  is conjugated to  $\begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}$  and we have  $\lambda_+ = \rho\lambda_-$  for some  $\rho \in \mu_n^*$ . Thanks to the characteristic polynomial we can compute

$$\lambda_\pm = \frac{\mathrm{tr} A \pm \delta}{2}, \quad \text{where } \delta^2 = \Delta = (\mathrm{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

$$\begin{aligned} \text{Consequently, } \rho = \frac{\mathrm{tr} A + \delta}{\mathrm{tr} A - \delta} \quad & \text{hence } (\mathrm{tr} A = 0, \rho = -1) \text{ or } \delta = \frac{\rho-1}{\rho+1} \mathrm{tr} A \\ & \text{hence } (\mathrm{tr} A = 0, \rho = -1) \text{ or } (\mathrm{tr} A)^2 - 4 \det A = \left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^2 (\mathrm{tr} A)^2 \\ & \text{hence } (\mathrm{tr} A = 0, \rho = -1) \text{ or } \det A = \frac{\rho}{(\rho+1)^2} (\mathrm{tr} A)^2 \\ & \text{hence } P_\rho(A) = 0. \end{aligned}$$

Conversely we can read backwards these calculations; the square root may force to change  $\rho$  into  $1/\rho$ , but this is harmless since  $P_\rho$  and  $P_{1/\rho}$  are proportional.  $\square$

**Examples :** a matrix  $A \in \mathrm{PGL}_2$  has order 2 if and only if  $\mathrm{tr} A = 0$ ;  $A$  has order 3 if and only if  $\det A = (\mathrm{tr} A)^2$ ;  $A$  has order 4 if and only if  $2 \det A = (\mathrm{tr} A)^2$ .

**Corollary 1.2** *Let  $q = p^n$ . The order of an element  $A \in \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$  divides  $q - 1$ ,  $q + 1$ , or  $p$ .*

**Proof :** Take  $A$  an element of order  $n$  prime to  $p$ . By proposition 1.1, there exists  $\rho \in \mu_n^*$  algebraic over  $\mathbb{F}_q$ , of degree at most 2 (hence belonging to  $\mathbb{F}_{q^2}$ ), such that  $A$  corresponds to  $x \mapsto \rho x$ . If  $\rho \in \mathbb{F}_q$ , we have  $\rho^{q-1} = 1$ . Else, the minimal polynomial of  $\rho$  over  $\mathbb{F}_q$  is  $P = X^2 + (2 - \frac{(\text{tr } A)^2}{\det A})X + 1$ . But  $P$  can also be written  $P = X^2 - (\rho + \rho^q)X + \rho^{q+1}$  with the Frobenius  $\text{Fr}(x) = x^q$ , generating  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Hence  $\rho^{q+1} = 1$  and we are done.  $\square$

**Corollary 1.3** *There are  $q^2 - 1$  elements of order  $p$  in  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ , and they all belong to  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ . Moreover the set of fixed points of any order  $p$  element of  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ , acting on  $\mathbb{P}^1(k)$ , is  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ .*  $\square$

Actually Dickson gave a comprehensive description of all finite subgroups of  $\text{SL}_2(k)$  ( $k$  algebraically closed), see for example [Su, chap. 3, §6, th. 6.17]. As we are interested in the subgroups of  $\text{PGL}_2(k) = \text{PSL}_2(k)$ , theorem 6.17 of [Su] takes the following shape :

**Theorem 1.4 (Dickson)** *Let  $k$  be an algebraically closed field with  $\text{expchar}(k) = p \neq 2$ . Then any finite subgroup  $G \subset \text{PGL}_2(k)$  is isomorphic to a subgroup among the following list :*

If  $(p, |G|) = 1$ ,

(1) a cyclic group, dihedral group,  $\mathfrak{S}_4$ ,  $\mathfrak{A}_4$  or  $\mathfrak{A}_5$ ,

and, if  $p \mid |G|$ ,

(2)  $G = Q \rtimes C$  a semi-direct product of a normal, elementary abelian,  $p$ -Sylow  $Q$  by a cyclic group of order prime to  $p$ ,

(3)  $\mathfrak{A}_5$  if  $p = 3$ ,

(4)  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ ,  $q = p^s$ ,

(5)  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ .  $\square$

Thanks to the criterion in proposition 1.1 we can make certain finite subgroups of  $\text{PGL}_2(k)$  explicit : we are aiming at cyclic groups, dihedral groups, and those isomorphic to  $\mathfrak{S}_4$ ,  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$  and  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ . In the sequel we use the concise notation  $\langle \alpha(x) \rangle$  for the subgroup generated by a homography  $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ .

**Proposition 1.5** *The conjugacy classes of cyclic and dihedral subgroups of  $\text{PGL}_2(k)$  are :*

(i)  $\begin{cases} \mathbb{C}_n = \langle \rho x \rangle & (\rho \in \mu_n^*) \text{ for } (n, p) = 1 \\ \mathbb{C}_p = \langle x + 1 \rangle & \text{for } n = p. \end{cases}$

(i)  $\begin{cases} \mathbb{D}_n = \langle \rho x, \frac{1}{x} \rangle & (\rho \in \mu_n^*) \text{ for } (n, p) = 1 \\ \mathbb{D}_p = \langle x + 1, -x \rangle & \text{for } n = p. \end{cases}$   $\square$

**Proposition 1.6** *The subgroups isomorphic to  $\mathfrak{S}_4$  ( $p \neq 2, 3$ ) are conjugated to*

$$\mathfrak{S}_4 = \langle ix, \frac{x+1}{x-1} \rangle \simeq \langle (1234), (12) \rangle .$$

**Proof :** Let  $\nu : \mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\sim} G$  be an isomorphism with values in a subgroup of  $\mathrm{PGL}_2(k)$ ;  $a = \nu(1234)$  and  $b = \nu(12)$  generate  $G$ . Up to conjugation,  $a(x) = ix$ . A priori the involution  $b$  can be written  $b(x) = \frac{rx+s}{tx-r}$ , but using  $ab = \nu(134)$  has order 3 yields  $r^2 = st$ . Conjugation by  $\phi : x \mapsto rx/t$  leaves  $a$  invariant while  $b$  maps to the desired  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ . To complete the proposition, one checks that these two elements generate a subgroup isomorphic to  $\mathfrak{S}_4$ .  $\square$

**Proposition 1.7** *The subgroups isomorphic to  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$  are all conjugated to the “standard”  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$  corresponding to the field inclusion  $\mathbb{F}_q \hookrightarrow k$ ; the same result holds for  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ .*

**Proof :** In order to get the desired result we shall use (some) relations in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ , which is generated by three elements  $r, s, t$

$$r(x) = x + 1, \quad s(x) = ux, \quad t(x) = 1/x$$

where  $u$  is (any) generator of the multiplicative group  $\mathbb{F}_q^*$ . We put  $m = \frac{q-1}{p-1}$  and observe that  $v = u^m$  is a generator of  $\mathbb{F}_p^*$ ; in particular  $v$  is an integer modulo  $p$ . Then we have a relation  $r^v s^m = s^m r$ , it is just the homography  $x \mapsto vx + v$ . Finally note that  $n = \mathrm{ord}(rt)$  is prime to  $p$ . Hence,  $n$  divides  $q - 1$  or  $q + 1$ , and at any rate, for any primitive  $n$ -th root of unity  $\lambda$  in  $\mathbb{F}_{q^2}^*$ , we have  $\lambda^{q\pm 1} = 1$  hence  $\lambda + \lambda^{-1} \in \mathbb{F}_q$ .

Now let  $G$  be a subgroup of  $\mathrm{PGL}_2(k)$ , and  $\nu : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \rightarrow G$  be an isomorphism. Denote  $e = \nu(r)$ ,  $f = \nu(s)$ ,  $g = \nu(t)$  so that  $G = \langle e, f, g \rangle$ . As  $\langle f, g \rangle \simeq \langle s, t \rangle = \mathbb{D}_{q-1}$ , by the above result 1.5, with a first conjugation and for suitable  $u$ , we can suppose  $f = s$  and  $g = t$ . For clarity, we now rewrite the relations we will use :

$$e^p = 1 \tag{IV.1}$$

$$e^v f^m = f^m e \tag{IV.2}$$

$$(eg)^n = 1 \tag{IV.3}$$

Let us write  $e(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , then (IV.1) reads  $bc = -\frac{1}{4}(a-d)^2$ . Induction using this yields

$$e^k(x) = \frac{\left(\frac{k+1}{2}a - \frac{k-1}{2}d\right)x + kb}{kcx - \frac{k-1}{2}a + \frac{k+1}{2}d}$$

We then write (IV.2) explicitly and obtain  $a = d$ , and  $c = 0$ . At this point,  $e(x) = x + b/a$ . But by (IV.3) there exists  $\lambda \in \mu_n^* \subset \mathbb{F}_{q^2}^*$  such that  $(1 + \lambda)^2 a^2 = -\lambda b^2$ , and so  $\beta := \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -(\lambda + \lambda^{-1} + 2) \in \mathbb{F}_q$ . Finally we apply a conjugation by  $\phi : x \mapsto \frac{b}{a}x$ , then  $G = \langle x + b/a, ux, 1/x \rangle$  is mapped to  $\langle x + 1, ux, \frac{1}{\beta x} \rangle$ , equal to  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$  as announced. For  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ , the arguments are similar.  $\square$

## 2 Potts curves and their automorphisms

By an *algebraic curve*, we mean a scheme of finite type over  $k$ , geometrically integral, projective, of dimension 1, and smooth unless otherwise stated.

This section is devoted to the computation of the automorphisms of Potts curves, firstly in the case when  $p \nmid N$ , secondly when  $p|N$ . In the former case (2.1), we adopt a definition different from definition 0 : it allows us to consider the stack of Potts curves as a classical

Hurwitz stack (coverings with prescribed ramification invariants). This definition does not take hyperellipticity for granted; we have to establish it to link the two viewpoints. At last we study the fields of definition of Potts curves. In the latter case (2.2), we show that  $N = p$  is the only possibility; the computation of the automorphisms turns out to be simpler.

## 2.1 Tame case. Hyperellipticity

We propose an alternative definition of Potts curves, based on Hurwitz data, and we will show that this new definition is equivalent to definition 0 given in the introduction.

Let  $G$  be a finite group of order prime to  $\text{expchar}(k)$ . Recall that to an action of  $G$  on an algebraic curve  $C$ , is attached a topological invariant called *Hurwitz datum* or *ramification datum*. Let  $x \in C$  be a fixed point for  $G$ . There is a faithful action  $\chi_x$  of the stabilizer  $G_x$  on the cotangent space  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . If a point  $y$  lies in the orbit of  $x$ , the pair  $(G_y, \chi_y)$  is conjugated to  $(G_x, \chi_x)$ . The Hurwitz datum is the list of all conjugation classes of couples  $(G_x, \chi_x)$ , indexed by the set of orbits of fixed points.

**Definition 2.1** An  $N$ -Potts curve is a cyclic covering of degree  $N$  of  $\mathbb{P}^1$ , that is to say a couple  $(C, \sigma)$  defined over  $k$ , where  $C$  is an algebraic curve and  $\sigma$  is an automorphism of  $C$  of order  $N$ . We assume that  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  acts with 4 fixed points and that the Hurwitz datum is

$$\begin{aligned} H_1 = H_2 = G \text{ and } \chi_1 = \chi_2 = \chi : \sigma &\mapsto \zeta_N && \text{(orbits of points } a, b) \\ H_3 = H_4 = G \text{ and } \chi_3 = \chi_4 = \chi^{-1} : \sigma &\mapsto \zeta_N^{-1} && \text{(orbits of points } c, d) \end{aligned}$$

An isomorphism between Potts curves  $\varphi : (C, \sigma) \rightarrow (C', \sigma')$  is an isomorphism of algebraic curves  $\varphi : C \rightarrow C'$  that commutes with  $\sigma$  and  $\sigma' : \varphi\sigma = \sigma'\varphi$ .

**Remark 2.1.1** Note that, in the definition, the root  $\zeta_N$  is fixed, which amounts to marking the choice of a generator  $\sigma$  of  $G$  (see also 2.1.4).

By the Riemann-Hurwitz formula, we get the genus  $g(C) = N - 1$ . Notice that a birational equation can be easily drawn from the definition : the field extension  $k(C)/k(x)$  of the function field of  $\mathbb{P}^1$  is a Kummer extension of degree  $N$ ; it has a generator  $t \in k(C)$  such that  $t^N \in k(x)$ , i.e.

$$t^N = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{IV.4}$$

and  $P, Q$  are polynomials of degree 2 according to the ramification. Multiplying by  $Q^N$  and substituting  $t \rightarrow tQ$  we get

$$t^N = P(x) Q(x)^{N-1} = (x - a)(x - b)(x - c)^{N-1}(x - d)^{N-1}; \tag{IV.5}$$

where  $\sigma$  acts by  $t \mapsto \zeta_N t$ .

Potts curves, defined as coverings of  $\mathbb{P}^1$  (of genus  $g' = 0$ ), with  $r = 4$  ramification points and the given Hurwitz datum  $\xi$ , are parameterized by a Hurwitz scheme  $\mathcal{H}_{g,G}(\xi) = \mathcal{H}_{N-1, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}(\xi)$ . It is known that, over an algebraically closed field of characteristic prime to  $N$ , this scheme is equidimensional of dimension  $3g' - 3 + r = 0 - 3 + 4 = 1$  [BR].

Finally we want to point out the functorial behaviour of Potts curves with regard to the group  $G$ . When  $N = LM$  is a non-prime integer, let  $H = \langle \sigma^M \rangle \simeq \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$  and

$\sigma/H$  a generator of  $G/H \simeq \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ . Then  $(C/H, \sigma/H)$  is an  $M$ -Potts curve, and we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (C, \sigma) & \xrightarrow{L} & (C/H, \sigma/H) \\ & \searrow \mathcal{N} & \swarrow M \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

### Automorphisms

In view of equation (IV.5) we notice that, in  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ , there is one and only one subgroup isomorphic to  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , generated by involutions that interchange the four points  $a, b, c, d$ , namely

$$\tau_0 : \begin{cases} a \leftrightarrow b \\ c \leftrightarrow d \end{cases} \quad \mu_0 : \begin{cases} a \leftrightarrow c \\ b \leftrightarrow d \end{cases} \quad \tau_0 \mu_0 = \mu_0 \tau_0 : \begin{cases} a \leftrightarrow d \\ b \leftrightarrow c \end{cases}$$

Such subgroups of involutions and their action on “(2-2)-partitions”, as Roan calls the organized quadruple  $(\{a, b\}, \{c, d\})$ , are studied in [Ro, 1, Lemma 2]. Before going further, we need a scheme-theoretic tool which we now introduce.

**Description 2.1.2** A general technique allows to describe a tame cyclic covering of curves (or even, families of curves) in terms of invertible sheaves on the base, see [Hart, IV,2,Ex 2.7.].

Let  $X \rightarrow S$  be an  $S$ -curve, and  $G = \langle \sigma \rangle$  be cyclic of order  $N$ ; we assume  $N$  to be invertible in the local rings of  $S$ . Then the morphism  $f : X \rightarrow Y = X/G$  is finite hence affine, and we know that this implies  $X \simeq \text{Spec}(\mathcal{A})$  where  $\mathcal{A}$  is the sheaf of quasi-coherent algebras  $f_* \mathcal{O}_X$ . Actually, here we have a simple description of  $\mathcal{A}$  since, by the assumption of invertibility of  $N$ , there is a decomposition  $f_* \mathcal{O}_X = \bigoplus_{j=0}^{N-1} \mathcal{L}_j$  with  $\mathcal{L}_j$  corresponding to the “eigenspace” associated to the eigenvalue  $\zeta_N^j$ . The local study on the fibers shows that  $\mathcal{L}_j$  is an invertible sheaf. Finally, as  $(\sigma^\sharp)^N = \text{id}$ , we get  $\mathcal{L}_1^N \simeq \mathcal{O}_Y(-D)$  where  $D$  is the effective Cartier branch divisor of  $f$ , divisor of zeroes of a global section  $s$ .

Conversely, with  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$  and  $s$  we can endow  $f_* \mathcal{O}_X$  with a product mapping  $(l, l') \in \mathcal{L}_j \times \mathcal{L}_{N-j}$  to  $sl l' \in \mathcal{O}_Y$ , and we recover  $X = \text{Spec}(\bigoplus_{j=0}^{N-1} \mathcal{L}_j)$ .

As a conclusion, we can consider the datum of a cyclic  $N$ -tuple covering  $X \rightarrow Y = X/G$  as being equivalent, up to isomorphism, to that of a triple  $(Y, \mathcal{L}, s)$  where  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(Y)$  and  $s$  is a global section of  $\mathcal{L}^{-N}$ . In the sequel we will denote  $X = X(\mathcal{L}, s)$ , the base  $Y$  being understood.  $\square$

In our situation, the covering  $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  (quotient by  $\sigma$ ) is described by  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(-2)$  and  $s = (X - a)(X - b)(X - c)^{N-1}(X - d)^{N-1}$ . There is an isomorphism  $\phi : \tau_0^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$  such that  $\phi^{\otimes N}(\tau_0^* s) = s$ , so that  $\tau_0$  has a lift :

$$\begin{array}{ccc} (C, \sigma) = C(\tau_0^* \mathcal{L}, \tau_0^* s) & \xrightarrow{\exists \tau} & C(\mathcal{L}, s) = (C, \sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\tau_0} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

It is important to point out that the above construction 2.1.2 keeps track of the fact that a generator of  $G$  is marked. Indeed, the invertible sheaf  $\mathcal{L}$  is conditioned to a choice of a primitive root  $\zeta_N$ , so that an isomorphism  $X \xrightarrow{\sim} X'$  of coverings of  $Y$  maps  $\sigma$  to  $\sigma'$ .

Consequently,  $\tau$  satisfies  $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$ . Also we have that  $\tau^2 = \sigma^j$  for some  $j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , because it induces the identity on  $\mathbb{P}^1$ . But 2 being prime to  $N$ , we may suppose that  $j = 2k$  is even. Then,  $(\tau\sigma^{-k})^2 = 1$ , and  $\tau\sigma^{-k}$  induces the same automorphism of  $\mathbb{P}^1$  as  $\tau$ ; therefore we can assume that  $\tau^2 = 1$ .

As for  $\mu_0$ , we have  $\mu_0^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$  and  $\mu_0^*s = (X - a)^{N-1}(X - b)^{N-1}(X - c)(X - d)$ , and so  $\mu_0$  lifts to  $\mu$

$$\begin{array}{ccc} (C, \sigma^{-1}) = C(\mu_0^*\mathcal{L}, \mu_0^*s) & \xrightarrow{\exists\mu} & (C, \sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\mu_0} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

such that  $\mu^{-1}\sigma\mu = \sigma^{-1}$ . As above, we may change  $\mu$  so as to have  $\mu^2 = 1$ ; then  $\mu$  and  $\sigma$  generate a group isomorphic to the dihedral group  $\mathbb{D}_N$ .

**Proposition 2.1.3** *C is hyperelliptic, and  $\tau$  is the hyperelliptic involution.*

**Proof :** A fixed point  $x$  of  $\tau$  can not be a fixed point of  $\sigma^j$ , because  $\pi x$  is a fixed point of  $\tau_0$ , but,  $\sigma^j x = x \Rightarrow \pi x \in \{a, b, c, d\}$ , and this is not the case.

Now let  $\alpha$  be one of the two fixed points of  $\tau_0$ , and  $\beta \in \pi^{-1}(\alpha)$ . We have  $\pi\tau\beta = \tau_0\pi\beta = \pi\beta$ , and therefore  $\exists j, \tau\beta = \sigma^j\beta$ . As  $\tau^2 = 1$  we derive  $\beta = \tau\sigma^j\beta = \sigma^j\tau\beta = \sigma^{2j}\beta$ . If  $2j \not\equiv 0 (N)$ , then  $\pi\beta = \alpha$  is a branch point and also a fixed point of  $\tau_0$ , this is impossible. Hence,  $2j \equiv 0 (N)$ , so  $j \equiv 0 (N)$ , i.e.  $\tau\beta = \beta$ .

We get  $2N$  fixed points for  $\tau$ , namely  $\text{Fix } \tau = \pi^{-1}(\text{Fix } \tau_0)$ , organized into two orbits of  $G$ . Apply Riemann-Hurwitz's formula to the quotient  $C \rightarrow C/\tau$  of degree 2 :

$$2(N - 1) - 2 = 2(2g_{C/\tau} - 2) + 2N \implies g_{C/\tau} = 0$$

meaning that  $C/\tau \simeq \mathbb{P}^1$ , as desired. □

**Remark 2.1.4** In view of this result, we change nothing if we also require Potts curves to be hyperelliptic in definition 2.1. This explains the link between this definition and definition 0. Actually there is one little difference, emphasized in remark 2.1.1, due to the fact that in definition 2.1 (and in all the study in the tame case) a choice of a root of unity is made once for all, and this root of unity corresponds to the inertia at fixed points of the automorphism of order  $N$ . By the way, in [Ro], the definition chosen for Potts curves is a third one :

**Definition 2.1.bis (Roan)** An  $N$ -Potts curve is a hyperelliptic curve of genus  $N - 1$ , with an order  $N$  automorphism having exactly 4 fixed points. □

Exploiting the quotient by  $\tau$  we can get another affine equation for a Potts curve  $C$ . As a matter of fact,  $\sigma$  induces on  $C/\tau \simeq \mathbb{P}^1$  an order  $N$  automorphism (conjugated to) :  $x \mapsto \zeta_N x$ . The Weierstrass points  $\text{Fix}(\tau)$ , composed of two orbits of  $\sigma$ , are  $\{\zeta_N^j a\}_{0 \leq j \leq N-1}$  and  $\{\zeta_N^j b\}_{0 \leq j \leq N-1}$  for certain  $a, b$  with  $a^N \neq b^N \neq 0$ . The corresponding equation is

$$y^2 = (x^N - a^N)(x^N - b^N) = x^{2N} + Ax^N + B \tag{IV.6}$$

and we can recover (IV.4) with the choice of a rational parameter for the conic  $y^2 = u^2 + Au + B$ , e.g. take  $z = \frac{y+\sqrt{B}}{x^N}$ ,  $t = \frac{x}{(2\sqrt{B})^{1/N}}$  (and  $\lambda = \frac{-A}{2\sqrt{B}}$ ) :

$$t^N = \frac{z - \lambda}{z^2 - 1} \tag{IV.7}$$

The automorphisms  $\sigma, \tau, \mu$  have the following expressions :

$$\begin{aligned} \text{on model (IV.7)} : \quad & \sigma(z, t) = (z, \zeta_N t) \quad ; \quad \tau(z, t) = \left(\frac{\lambda z - 1}{z - \lambda}, t\right) \quad ; \quad \mu(z, t) = \left(\frac{z+1-2\lambda}{z-1}, \frac{1}{A^{1/N} t}\right) \\ \text{on model (IV.6)} : \quad & \sigma(x, y) = (\zeta_N x, y) \quad ; \quad \tau(x, y) = (x, -y) \quad ; \quad \mu(x, y) = \left(\frac{B^{1/N}}{x}, \frac{\sqrt{B}y}{x^N}\right). \end{aligned}$$

Now let us introduce a modular invariant. Set  $j = \frac{B}{A^2 - 4B} \neq 0$  for equation (IV.6) ; it is  $j = \frac{1/4}{\lambda^2 - 1}$  for equation (IV.7). Moreover  $j$  has also a nice expression with respect to the original general form (IV.4)

$$t^N = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}.$$

To see this we apply (on  $x$ ) a homography sending  $a$  to  $\infty$ ,  $c$  to 1 and  $d$  to -1. It transforms the equation into an equation of type (IV.7), and we compute

$$\lambda = \frac{2(ab + cd) - (a+b)(c+d)}{(a-b)(c-d)} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 4 \frac{(a-c)(a-d)(b-d)(b-c)}{(a-b)^2(c-d)^2}$$

whence

$$16j = \frac{\text{disc}(P) \text{disc}(Q)}{\text{res}(P, Q)}$$

(disc meaning discriminant, and res, resultant). As is expected,

**Proposition 2.1.5** *Two Potts curves  $(C, \sigma)$  and  $(C', \sigma')$  of invariants  $j$  and  $j'$  are  $\bar{k}$ -isomorphic iff  $j = j'$ .*

**Proof :** Let  $\varphi$  be an isomorphism with  $\sigma'\varphi = \varphi\sigma$ . Then it induces a map on the quotients :  $\tilde{\varphi} : C/\tau \rightarrow C'/\tau'$ , and if we consider equations of type (IV.6) for  $C$  and  $C'$ , then  $G$ -equivariance reads  $\zeta_N \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(\zeta_N x)$ . The only possible  $\tilde{\varphi}$ 's are  $\tilde{\varphi}(x) = \lambda x$ , and this forces  $A = \lambda^N A'$ ,  $B = \lambda^{2N} B'$  and  $j = j'$ .

Conversely, if  $j = j'$  with  $C$  and  $C'$  given by (IV.6), choose  $\lambda$  such that  $A = \lambda^N A'$ ,  $B = \lambda^{2N} B'$ . Then  $\varphi : (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^N y)$  is a birational map from  $C$  to  $C'$ , and clearly  $\sigma'\varphi = \varphi\sigma$ . It is a morphism since  $C$  and  $C'$  are smooth.  $\square$

We are now well enough acquainted with Potts curves to compute their automorphism groups, using the results of section 1. On the way, we provide a correction to [Ro, section 2, proposition 5], where the case of  $j = -1/4$  was forgotten.

We need a few notations. For  $q$  a power of  $p$  let  $R \subset \mathbb{F}_q^\times$  be the subgroup of  $x$ 's with  $x^2 \in \mathbb{F}_q^\times$ , there is then a "square" morphism sitting in a non-split exact sequence  $1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow R \xrightarrow{\wedge^2} \mathbb{F}_q^\times \rightarrow 1$ .

**Theorem 2.1.6** *Let  $k$  be a field with  $p = \text{expchar}(k) \neq 2$ , and  $N \geq 3$  an odd integer, with  $(N, p) = 1$ . Let  $(C, \sigma)$  be a Potts  $N$ -state curve.*

(i) *The automorphism group of  $C$  is the following.*

If  $p \neq 3, 5$ ,  $N = 3$ ,  $j = -1/54$  :

$$\text{Aut}_{\bar{k}}(C) = \widetilde{\mathfrak{S}}_4$$

*the representation group of  $\mathfrak{S}_4$  where the elements corresponding to transpositions have order 2 [Su, chap. 3, §2, (2.21)].*

If  $p > 0$ ,  $2N - 1 = q$  is a power of  $p$ ,  $j = -1/4$  (including the case  $N = 3$ ,  $p = 5$ ,  $j = -1/54$ ) :

$$\text{Aut}_{\bar{k}}(C) = \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \times_{\mathbb{F}_q^\times} R$$

(the product is fibered with respect to the determinant and  $\wedge^2$ ).

In all other cases,

$$\begin{aligned} j \neq -1/4 : \quad & \text{Aut}_{\bar{k}}(C) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{D}_N \\ j = -1/4 : \quad & \text{Aut}_{\bar{k}}(C) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{D}_{2N}. \end{aligned}$$

(ii) The group of “modular” automorphisms (i.e. those commuting with  $\sigma$ ) is, for all  $N, p$  :

$$\begin{aligned} j \neq -1/4 : \quad & \text{Aut}_{\bar{k}}(C, \sigma) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ j = -1/4 : \quad & \text{Aut}_{\bar{k}}(C, \sigma) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

**Proof :** >From now on we will denote by  $O_\Gamma(x)$  the orbit of a point  $x$  under the action of a group  $\Gamma$ , and  $\Gamma_x$  its stabilizer. We know that  $\langle \tau \rangle$  has order 2 and is normal in  $\text{Aut}_{\bar{k}}(C)$  (because of the uniqueness of the hyperelliptic involution), hence it is central. Set  $G = \text{Aut}_{\bar{k}}(C) / \langle \tau \rangle$  so that there is a central extension

$$1 \rightarrow \langle \tau \rangle \rightarrow \text{Aut}_{\bar{k}}(C) \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (\text{IV.8})$$

When  $f \in \text{Aut}_{\bar{k}}(C)$ ,  $f_0$  denotes its image in  $G$ , as in 2.1. Denote by  $\Sigma = O_{\sigma_0}(a) \sqcup O_{\sigma_0}(b)$  the set of the  $2N$  branch points, then by 2.1.2,  $G$  can be identified with the subgroup of  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  of the homographies stabilizing  $\Sigma$ . What we shall do is to determine  $G$  thanks to Dickson’s list, and then find the class of the corresponding extension.

Notice that  $\langle \tau, \sigma, \mu \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{D}_N \subset \text{Aut}_{\bar{k}}(C)$  so that  $\mathbb{D}_N \subset G$ . Also  $G$  acts transitively on  $\Sigma$ , because  $\mathbb{D}_N$  already does, and consequently

$$\forall s \in \Sigma, \quad 2N = |O_G(s)| = |G| / |G_s|.$$

Now we read through the list in Dickson’s theorem to find all possible  $G$ ’s. Before, we observe that, according to the results of the previous section, we have simple representatives for the conjugation classes of finite subgroups of  $\text{PGL}_2(\bar{k})$  isomorphic to a given subgroup among  $\mathbb{D}_n$ ,  $\mathfrak{S}_4$ ,  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ ,  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ . Clearly, a conjugation does not change  $C$  up to isomorphism, since it is just a change of variable on  $X$  in equation (IV.6). That is why from (2) on, we shall identify  $G$  with the representatives given in propositions 1.5, 1.6, 1.7.

(1) The groups that can not appear.

First of all, neither the cyclic groups nor  $\mathfrak{A}_4$  possess dihedral subgroups  $\mathbb{D}_N$  (since  $N \geq 3$ ), so they are ruled out. Now, let us see that the occurrence of  $G \simeq \mathfrak{A}_5$  is also impossible. The only dihedral subgroups in  $G$  are  $\mathbb{D}_3$  and  $\mathbb{D}_5$ , whence  $N = 3$  or 5. Assume  $N = 3$ ; then we must have  $G_s \simeq \mathbb{D}_5$  for some  $s \in \Sigma$ , because it is a subgroup of  $\mathfrak{A}_5$  with 10 elements. Denote  $H := \langle \sigma_0, \mu_0 \rangle \simeq \mathbb{D}_3$ ; then one can show that  $G_s \cap H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , and then there must be in  $H$  a non trivial automorphism with a fixed point in  $\Sigma$ . This is a contradiction. When  $N = 5$ , just interchange the roles of  $\mathbb{D}_3$  and  $\mathbb{D}_5$  (the former stands for  $G_s$ , the latter for  $H$ ), and the argument carries on. Also, note that this is true for any  $p$  (cases 1 and 3 of Dickson’s theorem 1.4).

Finally, a group of type  $Q \rtimes C$  (case 2) can not contain  $\mathbb{D}_N$  with  $(N, p) = 1$ .

(2) The case of  $G = \text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$  or  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ ,  $q = p^n$ .

We proceed in several steps. Let  $Q$  be a  $p$ -Sylow of the stabilizer  $G_a$  ( $Q$  is also a  $p$ -Sylow for  $G$ ).

(a) we show that  $\Sigma$  coincides with the set of fixed points of order  $p$  elements of  $G$ . Indeed, if  $g \in G$  has order  $p$ , then it belongs to some  $p$ -Sylow  $Q'$  conjugated to  $Q$  (in,  $G$ ), so  $t^{-1}gt \in G_a$  whence  $g$  fixes  $ta$ . Conversely, take  $s \in \Sigma$ , then  $G_s$  contains a  $p$ -Sylow of  $G$ , hence an element of order  $p$ .

(b) by corollary 1.3,  $\Sigma = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ ; in particular,  $2N = |\Sigma| = q + 1$ . Thus we get the birational hyperelliptic equation  $y^2 = x^q - x$  with genus  $\frac{q-1}{2} = N - 1$ . Clearly  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \subseteq G$  since it stabilizes  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ ; but a priori  $G$  could be bigger. However, the only subgroups of  $\text{PGL}_2(\bar{k})$  containing  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$  are isomorphic to  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_{q'})$  or  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_{q'})$ , but then  $q' = 2N - 1 = q$  and hence  $G = \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ . In particular the group  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$  is ruled out. Moreover, for an element  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  and  $\delta \in R$  such that  $\delta^2 = ad - bc$ , there is an action  $(x, y) \mapsto \left( \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{\delta y}{(cx+d)^{\frac{q+1}{2}}} \right)$ . This is the fiber product structure stated in the theorem.

(c) we now give an expression for  $\sigma$ . Choose a generator  $\xi$  of  $\mathbb{F}_{q^2}^\times$  such that  $\zeta = \zeta_N = \xi^{2(q-1)} \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ . The minimal polynomial of  $\zeta$  is  $X^2 - \psi X + 1$  where  $\psi = \zeta + \zeta^{-1} \in \mathbb{F}_q$ . Moreover,  $\phi = \xi^{q-1}$  is a square root of  $\zeta$ , and  $\theta = \phi + \phi^{-1} \in \mathbb{F}_q$ . We notice that  $\psi + 2 = \theta^2$  is a square in  $\mathbb{F}_q$  whereas  $\psi^2 - 4 = (\zeta - \zeta^{-1})^2$  is not. An automorphism  $g \in G$  is conjugated to  $x \mapsto \zeta x$  if and only if  $(1 + \zeta)^2 \det g = \zeta (\text{tr } g)^2$ , i.e.  $\theta^2 \det g = (\text{tr } g)^2$ . Apply this to get  $\sigma_0 = \begin{bmatrix} \theta^2 & -\theta^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  up to conjugation, and

$$\sigma(x, y) = \left( \theta^2 \frac{x-1}{x}, \frac{y x^{\frac{q+1}{2}}}{\theta} \right).$$

Its fixed points are given by the equation  $X^2 - \theta^2 X + \theta^2 = 0$  with discriminant  $\Delta = \psi^2 - 4$ . As this is not a square in  $\mathbb{F}_q$ , each of the two solutions, sitting outside of  $\mathbb{F}_q$ , gives two points  $(x, y)$ . We can then check that the ramification is as in 2.1, yielding a genuine Potts curve.

(d) at last we diagonalize  $\sigma_0$  so as to compute the invariant. The eigenvalues satisfy the same equation as the fixed points; the solutions are  $1 + \zeta^{\pm 1}$ . The transition matrix is

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \zeta & 1 + \zeta^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P^{-1} \sigma_0 P = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We compute  $P(\phi^j)^q = \left[ \frac{(1+\zeta)\phi^{j+1} + \zeta^{-1}}{\phi^{j+1}} \right]^q = \frac{(1+\zeta^{-1})\phi^{-j+1} + \zeta}{\phi^{-j+1}} = \frac{(1+\zeta)\phi^{j+1} + \zeta^{-1}}{\phi^{j+1}} = P(\phi^j)$ .

We conclude that  $P^{-1}$  maps the two- $\sigma$ -orbit-partition  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  to  $\{\phi^{2j}\}_{0 \leq j \leq \frac{q+1}{2}} \sqcup \{\phi^{2j+1}\}_{0 \leq j \leq \frac{q+1}{2}}$ .

After conjugation by  $P$ , the ‘‘Potts’’ equation is

$$Y^2 = (X^{\frac{q+1}{2}} - 1)(X^{\frac{q+1}{2}} + 1)$$

and the invariant is  $j = -1/4$ .

(3) The case of  $G = \mathbb{S}_4 = \langle ix, \frac{x+1}{x-1} \rangle$  (for  $N = 3$ ).

This case can happen only if  $p \neq 3$ , cf theorem 1.4. Fix  $\sqrt[8]{i}$  a 8th root of unity and  $i$  its square. With the notations of proposition 1.6,  $x \mapsto ix$  is  $\nu(1234)$  and  $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$  is  $\nu(12)$ . Applying a permutation on  $\{1, 2, 3, 4\}$  if necessary, we identify  $\sigma_0$  and  $\mu_0$  with  $\nu(123)$  and  $\nu(12)$ , respectively. For  $s \in \Sigma$ , its stabilizer  $G_s$  has cardinal 4, hence it is cyclic because two commuting involutions never have a common fixed point. We can choose  $s$  so that  $G_s$  is generated by  $a_0(x) = ix$ .

Now, we claim that  $a_0$  can not have a single fixed point lying in  $\Sigma$ , because, should that be, then  $a_0$  would act freely on  $\Sigma - \{s\}$ , and hence its order would divide  $2N - 1 = 5$ . Hence,  $\text{Fix}(a_0) = \{0, \infty\} \subset \Sigma$ . The  $G$ -orbit of  $\{0, \infty\}$  is  $\{0, \infty, \pm 1, \pm i\} = \Sigma$ . We can now give an equation

$$y^2 = x(x^4 - 1)$$

with the automorphisms

$$\begin{aligned} a(x, y) &= (ix, \sqrt{i}y) & \sigma(x, y) &= \left(-i\frac{x-1}{x+1}, \frac{2\sqrt{2i}y}{(x+1)^3}\right) \\ \mu(x, y) &= \left(\frac{x+1}{x-1}, \frac{2\sqrt{2}y}{(x-1)^3}\right) & \lambda(x, y) &= \left(-\frac{x-1}{x+1}, \frac{2\sqrt{2}y}{(x+1)^3}\right) \end{aligned}$$

The ‘‘Potts’’ equation  $y^2 = (x^3 - (2 + \sqrt{3})^3)(x^3 + 1)$  is obtained after a conjugation changing  $\sigma_0$  into  $x \mapsto jx$ ,  $j \in \mu_3^*$ . It allows to compute the invariant  $j = -1/54$  but is less workable for the determination of the class of the extension (IV.8). It can happen that  $G \supsetneq \mathbb{S}_4$  only if  $G$  is  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$  or  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ , but we know this implies  $q = 2N - 1 = 5$ . When  $p = q = 5$ , we have  $-1/54 = -1/4$ , and according to what was done before,  $G = \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ .

Now let us check, referring to the definition in [Su, chap. 2, §9, def. 9.10], that  $\text{Aut}_{\bar{k}}(C)$  is a representation group of  $\mathfrak{S}_4$ . Put  $H = \text{Aut}_{\bar{k}}(C)$  and  $Z = \langle \tau \rangle$ . Assume  $L$  is a proper subgroup of  $H$  such that  $H = ZL$ , then  $[H : L] = 2$ ,  $L \cap Z = 1$ , hence  $H = Z \times L$  does not contain any element of order 8, contradicting the existence of  $a$ . Furthermore, denote by  $M(G)$  the Schur multiplier, then  $|Z| = |H' \cap Z| = 2 = |M(G)|$  by checking that  $\tau = [\mu, \lambda]$  is a commutator. Third, obviously,  $|H| = |G| \cdot |M(G)|$ . Then the result follows by [Su, chap. 3, §2, (2.21)].

(4) The dihedral case  $G = \mathbb{D}_M = \langle \varepsilon x, \frac{1}{x} \rangle$ ,  $\varepsilon \in \mu_M^*$ , for  $N|M$ .

It is the last possibility. A  $\mathbb{D}_M$ -orbit

$$\left\{ x, \varepsilon x, \dots, \varepsilon^{M-1}x, \frac{1}{x}, \dots, \frac{\varepsilon^{M-1}}{x} \right\}$$

has cardinal 2 if  $x = 0$  or  $\infty$ ,  $2M$  if  $x$  is in general position, and  $M$  if  $x$  is one of  $\pm\sqrt{\varepsilon^j}$ . We conclude that, in general,  $M = N$ ;  $M = 2N$  occurs when the points of the orbit are vertices of a regular  $2N$ -gon, yielding the equation  $y^2 = x^{2N} - 1$ . The invariant is then  $j = -1/4$ , and  $\sigma_0$  has a ‘‘root’’  $\sqrt{\sigma_0} : x \mapsto \zeta_{2N}x$ .

(5) Computation of the centralizer of  $\sigma$ .

The letter  $\mathbf{C}$  stands for a centralizer. The only non-obvious case is  $G = \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ , for which

$$\text{Aut}_{\bar{k}}(C, \sigma) / \langle \tau \rangle = \mathbf{C}_{\text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)}(\sigma_0) = P \cdot \mathbf{C}_{\text{PGL}_2(\bar{k})} \left( \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot P^{-1} \cap \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q).$$

The homographies commuting to  $x \mapsto \zeta x$  are  $x \mapsto ux$ , for  $u \in \bar{k}$ . Requiring that  $P \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \in \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ , we get  $u^{q+1} = u^{2N} = 1$ . Hence the above quotient has cardinal less than  $2N$ . To conclude, observe that

$$\sqrt{\sigma_0} = \begin{bmatrix} \theta(\theta + 1) & -\theta^2 \\ 1 & \theta \end{bmatrix}$$

whose square is  $\sigma_0$ , has order  $2N$ .

□

The following picture (figure IV.1) illustrates the situation when  $j = -1/4$ , with the orbits  $O_\sigma(b)$  and  $O_\sigma(a)$  intertwined.

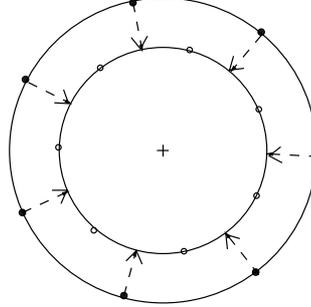


FIG. IV.1 – Exceptional configuration for  $\tau$ 's fixed points

Before tackling the wild case, we can make a few remarks concerning fields of definition and moduli. We now fix  $k_s \subset \bar{k}$ , a separable closure sitting inside an algebraic closure of  $k$ . It is natural to ask whether there exist  $N$ -Potts curves defined over the prime field  $\mathbb{F}_p$  or its cyclotomic extension  $\mathbb{F}_p(\zeta_N)$ . Actually, it is reasonable to look for a field of definition of a Potts curve only among extensions of  $\mathbb{F}_p(\zeta_N)$ . Indeed, if  $(C, \sigma)$  is defined over  $k$ , then  $\sigma$  is defined over  $k$  and, if  $A$  is a matrix (with coefficients in  $k$ ) representing its action on  $C/\tau$ , we know there exists  $\zeta \in \mu_n^*$  such that  $(1 + \zeta)^2 \det A - \zeta (\text{tr } A)^2 = 0$  (proposition 1.1). In characteristic 0 with  $N \geq 5$ , this forces  $\zeta_N \in k$ . Henceforth we will assume that all fields considered contain  $\zeta_N$ .

Recall [DèEm] that a *field of definition* for  $(C, \sigma)$  is a field  $\kappa$  such that there exists  $(C_0, \sigma_0) \xrightarrow{\bar{k}} (C, \sigma)$  defined over  $\kappa$ . The *field of moduli* is the field of invariants  $\kappa = k_s^G$  under  $G = \{ \rho \in \text{Aut}(k_s/\mathbb{F}_p) \mid (C, \sigma)^\rho \xrightarrow{\bar{k}} (C, \sigma) \}$ ; in other words, for  $\rho \in \text{Aut}(k_s/\mathbb{F}_p)$ ,  $(C, \sigma)^\rho \simeq (C, \sigma) \iff \rho$  fixes  $\kappa$ .

Consider the following curves  $C_j$  with invariant  $j$  and affine model

$$\begin{aligned} y^2 &= x^{2N} + (1 + 4j)x^N + j(1 + 4j) && \text{if } j \neq -1/4 \\ y^2 &= x^{2N} - 1 && \text{if } j = -1/4 \end{aligned}$$

Then, using  $C_j$ , one shows (exactly like in the case of elliptic curves) :

**Proposition 2.1.7** *Let  $(C, \sigma)$  be an  $N$ -Potts curve of invariant  $j$ , (a priori) defined over  $k_s$ . Then  $\mathbb{F}_p(\zeta_N, j)$  is both its field of moduli and a minimal field of definition.* □

## 2.2 Wild case

In this subsection, we study  $N$ -Potts curves when  $p|N$ . Here it is definition 0 that applies (the ramification data of definition 2.1 do not make sense any more). We must add to definition 0 the fact that an isomorphism between Potts curves  $(C, \sigma, \tau)$  and  $(C', \sigma', \tau')$  is an isomorphism of algebraic curves  $\varphi : C \rightarrow C'$  such that  $\varphi\sigma = \sigma'\varphi$  and  $\varphi\tau = \tau'\varphi$ . When  $(N, p) = 1$  the two notions of isomorphism coincide. As a matter of fact it is not so clear that such curves exist : in the following paragraph we give the conditions that guarantee that it is the case.

Let  $(C, \sigma, \tau)$  be an  $N$ -Potts curve and  $\Gamma = \langle \sigma, \tau \rangle$ . We observe that  $\sigma$  induces an automorphism of order  $N$  on the quotient  $C/\tau \simeq \mathbb{P}^1$ . By proposition 1.1, the only possible case is

$$N = p,$$

and the induced automorphism  $\bar{\sigma}$  is  $x \mapsto x + 1$  up to conjugation. From a different point of view, we can notice that the Riemann-Hurwitz formula with higher ramification excludes a priori a valuation  $v_p(N)$  greater or equal to 2. >From now on  $C$  is a  $p$ -Potts curve. As in proposition 2.1.3, it is easy to count  $2p$  fixed points for the hyperelliptic involution  $\tau$ , they form two orbits of  $\sigma$  (just lift the 2 fixed points of the involution induced on  $C/\sigma$ ). The affine model we have described is

$$y^2 = (x^p - x)^2 + A(x^p - x) + B \quad (A, B \in \bar{k}). \quad (\text{IV.9})$$

Hence, there exist  $N$ -Potts curves when, and only when,  $N = p$ .

We now want to define a modular invariant. In the present situation it is plainly seen that the modular problem is different according to whether we want to classify objects  $(C, \Gamma)$  or  $(C, \sigma, \tau)$  (see remark 2.1.1). In the first case, an isomorphism  $\varphi : (C, \Gamma) \rightarrow (C', \Gamma')$  is an isomorphism  $\varphi : C \rightarrow C'$  that is equivariant for the actions of  $\Gamma$  and  $\Gamma'$ , up to an automorphism of  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . This amounts to saying that  $\varphi\sigma\varphi^{-1} = \sigma'^i$ , for some  $i \in \mathbb{F}_p^\times$ . So let us define distinct invariants in  $\mathbb{A}_*^1(k)$ , by

$$j(C, G) = \frac{1}{(A^2 - 4B)^{\frac{p-1}{2}}} \quad \text{and} \quad j(C, \sigma) = \frac{1}{A^2 - 4B}.$$

### Proposition 2.2.1

- (1) two  $p$ -Potts "couples"  $(C, \Gamma)$  and  $(C', \Gamma')$  are  $\bar{k}$ -isomorphic iff  $j = j'$ .
- (2) two  $p$ -Potts curves  $(C, \sigma, \tau)$  and  $(C', \sigma', \tau')$  are  $\bar{k}$ -isomorphic iff  $j = j'$ .

**Proof :**

(1) Let  $C$  and  $C'$  be given by an equation (IV.9). An isomorphism  $\varphi : C \rightarrow C'$  with  $\sigma'_0\varphi = \varphi\sigma_0^i$  ( $i \in \mathbb{F}_p^\times$ ), gives an automorphism  $\tilde{\varphi}$  on the quotients by  $\tau$ , satisfying  $\tilde{\varphi}(x+iu) = \tilde{\varphi}(x) + u'$ . Thus  $\tilde{\varphi}(x) = rx + t$ ,  $r = u'/iu \in \mathbb{F}_p^\times$ ,  $t \in \bar{k}$ . To a point  $(x, y)$ ,  $\varphi$  associates  $(rx + t, \pm ry)$ , and so

$$\begin{aligned} r^2 y^2 &= ((rx + t)^p - (rx + t))^2 + A'((rx + t)^p - (rx + t)) + B' \\ r^2 y^2 &= r^2 (x^p - x + t^p - t)^2 + A'r(x^p - x + t^p - t) + B' \\ y^2 &= (x^p - x)^2 + \underbrace{\frac{A' + 2r(t^p - t)}{r}}_A (x^p - x) + \underbrace{\frac{r^2(t^p - t)^2 + A'r(t^p - t) + B'}{r^2}}_B \end{aligned}$$

whence  $A^2 - 4B = \frac{A'^2 - 4B'}{r^2}$  and  $j = j'$ .

Conversely, assume that  $j = j'$ . In  $\mathbb{F}_p^\times$ ,  $w$  is a square iff  $w^{\frac{p-1}{2}} = 1$ , therefore there exists  $r \in \mathbb{F}_p^\times$  such that  $A'^2 - 4B' = r^2(A^2 - 4B)$ . Then choose  $t \in \bar{k}$  a root of  $t^p - t = \frac{1}{2r}(rA - A')$ , we have

$$A = \frac{A' + 2r(t^p - t)}{r} \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{4} \left[ A^2 - \frac{A'^2 - 4B'}{r^2} \right] = \frac{r^2(t^p - t)^2 + A'r(t^p - t) + B'}{r^2}$$

So, going backwards through the above lines, we see that  $\varphi : (x, y) \mapsto (rx + t, ry)$  gives a map between  $C$  and  $C'$ , taking  $\sigma_0 : x \mapsto x + 1$  to  $\sigma'_0 : x \mapsto x + r$ .

(2) In what precedes it is enough to put  $u = u' = i = 1$ . One sees that  $r = 1$ , the result follows. □

Let  $(C, \sigma, \tau)$  be a curve given by equation (IV.9). Let  $r, s$  be the roots of  $T^2 + AT + B$ , and  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) a root of  $T^p - T - r$  (resp.  $T^p - T - s$ ), so that (IV.9) reads

$$y^2 = (x^p - x - r)(x^p - x - s) = \prod_{i=0}^{p-1} (x - \alpha + i) \prod_{i=0}^{p-1} (x - \beta + i).$$

We have the following automorphisms :

$$\sigma(x, y) = (x + 1, y) \quad ; \quad \tau(x, y) = (x, -y) \quad ; \quad \mu(x, y) = (\alpha + \beta - x, y).$$

**Proposition 2.2.2** *Let  $(C, \sigma, \tau)$  be  $p$ -Potts curve, then  $\text{Aut}_{\bar{k}}(C) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{D}_p$  and  $\text{Aut}_{\bar{k}}(C, \sigma, \tau) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .*

**Proof :** It is still true (cf theorem 2.1.6) that

- $\langle \tau \rangle$  is of order 2, normal and central,
- $G = \text{Aut}_{\bar{k}}(C) / \langle \tau \rangle$  is the subgroup of  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  of homographies stabilizing  $\Sigma = O_{\sigma_0}(\alpha) \sqcup O_{\sigma_0}(\beta)$ ,
- $\mathbb{D}_p \subset G$  and  $2p = [G : G_x]$ ,  $\forall x \in \Sigma$ .

Let  $Q$  be a  $p$ -Sylow of  $G$  containing  $\sigma_0$ ; by Dickson's theorem  $Q$  is elementary abelian. Assume that  $|Q| > p$ , then there exists  $\theta \in Q$  commuting with  $\sigma_0$  (hence  $\theta(x) = x + u$ ), with  $\theta \notin \langle \sigma_0 \rangle$  (hence  $u \notin \mathbb{F}_p$ ). Moreover  $\theta$  stabilizes  $\Sigma$ ; as  $u \notin \mathbb{F}_p$ ,  $\theta$  exchanges the orbits  $O_{\sigma_0}(\alpha)$  and  $O_{\sigma_0}(\beta)$ . Therefore

$$(\exists i, j \in \mathbb{F}_p) \quad \begin{cases} \alpha + u = \beta + i \\ \beta + u = \alpha + j \end{cases}$$

which implies  $u = \frac{i+j}{2} \in \mathbb{F}_p$ , a contradiction. Consequently,  $Q = \langle \sigma_0 \rangle$ ; we can now read through the list in Dickson's theorem.

If  $G = \text{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$  or  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ , then  $|G_\alpha| = (p^2 - 1)/d$  with  $d = 1$  or  $2$ . This order is prime to  $p$ , hence  $G_\alpha$  est cyclic, but this contradicts corollary 1.2.

The only remaining possibility is  $G = Q \rtimes C = \langle \sigma_0 \rangle \rtimes \langle \varphi \rangle$ , because  $\mathfrak{A}_5$  is ruled out by the same arguments as in the case  $(N, p) = 1$ . The order of  $\varphi$  is  $2m$  prime to  $p$ ; changing the point  $\alpha$  in the orbit if necessary, we can assume that its stabilizer is  $G_\alpha = \langle \varphi^2 \rangle$ . As  $Q$  is normal,  $\varphi^{-1}\sigma_0\varphi = \sigma_0^\ell$  for some  $\ell \in \mathbb{F}_p^*$ , from which we deduce that  $\varphi(x) = \frac{1}{\ell}x + b$  for some  $b \in \bar{k}$ . As  $\varphi^2$  fixes  $\alpha$ , we derive  $(\ell^2 - 1)\alpha = \ell(\ell + 1)b$ . If  $\ell + 1 \neq 0$  it implies  $\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{\ell} + b = \alpha$ ; so  $\ell = -1$ ,  $\varphi^2 = 1$  and  $m = 1$ . □

We see that the remarkable symmetry previously obtained when  $j = -1/4$  can not occur here for a  $p$ -state curve. Indeed, in order to lie between the points of the orbit of  $\alpha$ , the points in the orbit of  $\beta$  must take "semi-integer" values  $\alpha + i/2$  that are none other than integer values  $\alpha + i$ , whence  $j = 0$ : the curve must degenerate (cf figure IV.2).

### 3 Moduli space : tame case

We established in the previous section that whenever  $k$  is an algebraically closed field of characteristic prime to  $2N$ , containing a primitive  $N$ -th root of unity, there is a bijection

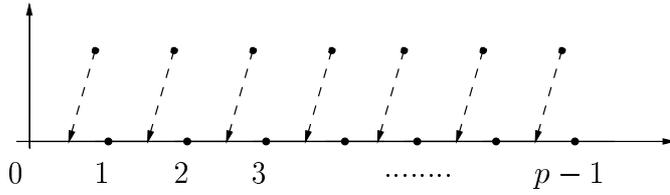


FIG. IV.2 – Collision of the orbits in the exceptional case for  $p$ -Potts curves

between the affine punctured line  $\mathbb{A}_*^1 = \mathbb{A}^1 - \{0\}$  over  $k$  and isomorphism classes of  $N$ -Potts curves. We now show, in 3.1, that the affine punctured line over  $\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$  is the (coarse) moduli space of the stack  $\mathcal{P}^t$  of Potts curves (the exponent « t » stands for « tame »). As an immediate consequence we have a result of good reduction (3.2). In 3.3, we compute the modular Picard group of the stack  $\mathcal{P}^t$ . At last we determine combinatorially the stable curves that are involved as stable limits in the process of compactification of the moduli space of  $\mathcal{P}^t$ , in 3.4.

We often view a scheme  $T$  as its functor of points, or as the stack  $\text{Sch}/T$  of schemes above  $T$ . We adopt the framework of 2.1 and state :

**Definition 3.1** A family of  $N$ -Potts curves is a projective, smooth morphism of  $\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$ -schemes  $C \rightarrow S$ , together with an  $S$ -automorphism  $\sigma : C \rightarrow C$  of order  $N$ , such that the geometric fibers  $(C_s, \sigma_s)$  are Potts curves in the sense of definition 2.1.

It follows from standard arguments that the category  $\mathcal{P}^t$ , fibered over  $\text{Sch}/\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$  (endowed with the étale topology), whose objects are families of  $N$ -Potts curves, is a stack. By [DM] and [We], this stack is algebraic. It is known [We], [BR] that this stack admits a coarse moduli space, the definition of which we briefly recall :

**Definition 3.2** A coarse moduli space for a stack  $\mathcal{P}$  over a base scheme  $S$  is a scheme  $P/S$  together with a  $S$ -morphism  $\mathcal{P} \rightarrow P$ , such that

- (1) for any geometric point  $\text{Spec}(k)$  of  $S$ , the morphism  $\mathcal{P} \rightarrow P$  induces a bijection

$$\mathcal{P}(\text{Spec } k) / \simeq \longrightarrow P(k)$$

between isomorphism classes of objects of  $\mathcal{P}$  over  $k$ , and  $k$ -rational points of  $P$ ,

- (2) any morphism  $\mathcal{P} \rightarrow Q$  with values in a  $\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$ -scheme  $Q$  factors through  $\mathcal{P} \rightarrow P$ .

### 3.1 Proof of the main result

We now show :

**Theorem 3.1.1** *There exists a morphism  $\Phi : \mathcal{P}^t \rightarrow \mathbb{A}_*^1$  such that*

$$\mathbb{A}_*^1 = \text{Spec} \left( \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}][j, \frac{1}{j}] \right)$$

*is a (coarse) moduli space for  $N$ -Potts curves.*

Let  $f : C \rightarrow S$  be a family of Potts curves. We are going to build in a canonical way a classifying morphism  $j : S \rightarrow \mathbb{A}_*^1$ , and we can restrict ourselves to do it locally on the base  $S$  (for the fppf or étale topology), canonicity ensuring the possibility to glue. First off, it is necessary to view  $f : C \rightarrow S$  as a hyperelliptic curve :

**Proposition 3.1.2** *There exists an involution  $\tau : C \rightarrow C$  such that  $f : C \rightarrow S$  becomes a family of hyperelliptic curves (in the sense of [KL]).*

**Proof :** Let  $G = \langle \sigma \rangle$ . As  $C$  is projective over  $S$  with  $G$  acting faithfully, the quotient  $D = C/G$  exists and the natural projection  $\pi : C \rightarrow D$  is finite of degree  $N$ . We can add that its formation commutes with base change (in particular with geometric fibers), see [KL, th. 4.12], [KaMa]. Therefore for  $s : \text{Spec } \Omega \rightarrow S$  a geometric point,  $D_s \simeq C_s/G \simeq \mathbb{P}^1$ , that is to say  $D$  is a bundle in projective lines over  $S$ . By an (implicit) étale surjective change of base it can be “untwisted” so that  $D \simeq \mathbb{P}^1 \times S$ .

To construct  $\tau$  we must handle the ramification of  $\pi$ . Let  $W = C^G$  denote the Weierstrass subscheme of fixed points of  $G$ . It is étale and finite of degree 4 over  $S$ , and associated to a relative Cartier divisor over  $S$ . The closed immersion  $i : W \hookrightarrow C$  induces after base change by  $W$ , a section  $a$  of  $h : \mathbb{P}^1 \times W \rightarrow W$ .

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^1 \times W \\ & \searrow & \nearrow w \\ & W & \nwarrow \varphi \end{array}$$

Repeating this process with  $W - A$  where  $A$  is the image of  $a$ , we assume that we have four disjoint sections  $a, b, c, d$  (because of the description of the ramification on the fibers). Their images are closed subschemes  $A, B, C, D$  that are supports of effective Cartier divisors still denoted  $A, B, C, D$  — in terms of sheaves of ideals :  $\mathcal{I}_A \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_W}(-A)$ , etc. Localizing, we now assume  $W = \text{Spec } R$  affine. As  $A, B, C, D$  are images of sections of  $\pi$  the invertible sheaves  $\mathcal{I}_A, \dots, \mathcal{I}_D$  have degree 1, i.e. there exists an open cover  $\{U_i = \text{Spec } R_i\}_{i \in I}$  — common to the four sheaves, refining if necessary — and homogeneous polynomials of degree 1 in  $R_i[X, Y]$ , such that

$$\begin{cases} \mathcal{I}_A|_{U_i} &= (a_2^{(i)}X - a_1^{(i)}Y) \mathcal{O}_{U_i} \\ \mathcal{I}_B|_{U_i} &= (b_2^{(i)}X - b_1^{(i)}Y) \mathcal{O}_{U_i} \\ &\vdots \end{cases}$$

Define a transformation  $\tau^{(i)} \in \text{End}(R_i^2)$  by

$$\tau^{(i)} = \begin{bmatrix} a_1b_1c_2d_2 - c_1d_1a_2b_2 & a_1c_1d_1b_2 + b_1c_1d_1a_2 - a_1b_1c_1d_2 - a_1b_1d_1c_2 \\ (a_1b_2 + a_2b_1)c_2d_2 - (c_1d_2 + c_2d_1)a_2b_2 & -(a_1b_1c_2d_2 - c_1d_1a_2b_2) \end{bmatrix}$$

(indexes  $i$  are omitted). Its determinant

$$\delta = -(a_1c_2 - a_2c_1)(a_1d_2 - a_2d_1)(b_1c_2 - b_2c_1)(b_1d_2 - b_2d_1)$$

is invertible in  $R_i$ . Indeed take  $\mathfrak{m}$  a maximal ideal of  $R_i$ , and  $\Omega$  an algebraically closed extension of  $R_i/\mathfrak{m}$ . It defines an  $\Omega$ -point  $w$  of  $W$ ; the corresponding fiber is a curve  $C_w$  whose branch points in  $\mathbb{P}^1_\Omega$  are  $a_w := [a_{1,w} : a_{2,w}]$ ,  $\dots$ ,  $d_w := [d_{1,w} : d_{2,w}]$ , whence

$$\delta \bmod \mathfrak{m} = \delta_w = -(a_w - c_w)(a_w - d_w)(b_w - c_w)(b_w - d_w) \neq 0$$

(in dehomogenized coordinates). The  $\tau^{(i)}$  patch together in an involution  $\tau$  of  $\mathbb{P}^1_W$  —  $\tau$  being involutive comes from the vanishing of the trace, cf proposition 1.1. Furthermore  $\tau$  satisfies

$$\tau^* \mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B, \quad \tau^* \mathcal{I}_C = \mathcal{I}_D$$

because its local expression mimics the expression in the case of the projective line over a field.

Description 2.1.2 of the cyclic covering  $C \rightarrow C/G \simeq \mathbb{P}^1 \times W$  in terms of invertible sheaves is

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes \mathcal{O}_W \\ \mathcal{L}^N \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_W}(-\mathcal{D}) \end{cases} \quad \text{where} \quad \mathcal{D} = A + B + (N-1)C + (N-1)D.$$

It is clear that  $\tau$  respects the data  $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ , hence it lifts to an automorphism  $\tau$  of  $C$  with  $\tau\sigma = \sigma\tau$ . As in the case of a single Potts curve, we can assume  $\tau^2 = \text{id}$ .

To carry on the construction we had to make an étale surjective extension  $S' \rightarrow S$ . Let  $S'' = S' \times_S S'$ . By unicity of the hyperelliptic involution on  $C \times_{S'} S''$ , the pullbacks of  $\tau$  via the two projections  $S'' \rightarrow S'$  coincide, hence  $\tau$  descends to  $S$ .  $\square$

**Proof of theorem 3.1.1 :** We split the proof into two steps.

**1st step :** construction of  $j$  and  $\Phi$ .

Let  $f : C \rightarrow S$  be a Potts curve over  $S$ . By proposition 3.1.2,  $f$  is equipped with an involution  $\tau \in \text{Aut}_S(C)$ . Then  $E = C / \langle \tau \rangle$  is a bundle in projective lines over  $S$ , denote by  $r : C \rightarrow E$  the natural projection and by  $q : E \rightarrow S$  the structure morphism. As  $\sigma$  commutes with  $\tau$  it induces an  $S$ -automorphism of order  $N$  on  $E$ . The divisor of fixed points  $C^G$  has degree 4 over  $S$ ; similarly  $T = E^\sigma$  is an étale 2-section of  $E/S$ . Up to an étale base extension, we reduce to the case where this section is a sum of two disjoint sections :  $\Delta = \Delta_0 \sqcup \Delta_\infty$ . If we set  $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\Delta_0)$  (of degree 1 on the fibers), then  $E$  is the projective space  $\mathbb{P}(\mathcal{V})$  associated to  $\mathcal{V} = q_*\mathcal{O}(1)$ . Tautologically we have  $\mathcal{O}(1)|_{\Delta_0} \simeq \mathcal{O}_{\Delta_0} \simeq \mathcal{O}_S$ . It is equivalent to give the section  $\Delta_0$  or a surjective morphism with kernel denoted  $\mathcal{M}$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{O}(1)|_{\Delta_0} \simeq \mathcal{O}_S \rightarrow 0$$

Besides, the section  $\Delta_\infty$  yields a similar sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{L}_\infty \rightarrow 0$$

Furthermore  $\mathcal{O}(\Delta_\infty) = q^*(\mathcal{M}_\infty^{-1}) \otimes \mathcal{O}(1)$ , or equivalently  $q^*(\mathcal{M}_\infty) = \mathcal{O}(-\Delta_\infty) \otimes \mathcal{O}(1)$ . The fact that the two sections are disjoint can be expressed by  $\mathcal{O}(-\Delta_\infty)|_{\Delta_0} \simeq \mathcal{O}_{\Delta_0}$ . Therefore, restricting to  $\Delta_0$ ,

$$q^*(\mathcal{M}_\infty)|_{\Delta_0} \simeq \mathcal{O}(1)|_{\Delta_0}$$

that is to say  $\mathcal{M}_\infty \simeq \mathcal{L}$ . The inverse isomorphism gives an arrow  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{V}$  that splits the above sequence. As a result,  $E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{O}_S)$ ;  $\sigma$  acts by multiplication by  $\zeta_N^{-1}$  on  $\mathcal{M}$ , and trivially on  $\mathcal{O}_S$ .

Now let us consider the double cover  $r : C \rightarrow E$ . It is described by the decomposition  $r_*\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}$  and by a section  $\theta \in \Gamma(E, \mathcal{L}^{-2})$ , image of the Weierstrass section. Since  $\mathcal{L}^{-1}$  has degree  $N$  on the fibers, we have  $\mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}(N) \otimes q^*\mathcal{H}$  (for some  $\mathcal{H} \in \text{Pic}(S)$ ). By restriction to  $\Delta_0$ , as  $\theta|_{\Delta_0}$  is everywhere nonzero (the fixed loci for the actions of  $G$  and  $\tau$  are disjoint fiberwise), we get  $\mathcal{H}^2 \simeq \mathcal{O}_S$ , hence  $\mathcal{L}^{-2} \simeq \mathcal{O}_E(2N)$ . Consequently we can identify  $\theta$  with a  $\sigma$ -invariant section of

$$\Gamma(E, \mathcal{O}_E(2N)) = \Gamma(S, q_*\mathcal{O}_E(2N)) = \Gamma(S, \text{Sym}^{2N}(\mathcal{V})) = \bigoplus_{j=0}^{2N} \Gamma(S, \mathcal{M}^j).$$

Therefore  $\theta \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{M}^N \oplus \mathcal{M}^{2N})$ . Looking locally on the fibers, one sees that the component of  $\theta$  on  $\mathcal{O}_S$  is invertible. We normalize it to 1, and denote by  $A \in \Gamma(S, \mathcal{M}^N)$ ,  $B \in \Gamma(S, \mathcal{M}^{2N})$  the other components (with global coordinates  $X, Z$  on  $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ , we write :  $\theta = X^{2N} + AX^N Z^N + BZ^{2N}$ ). Finally note that neither  $B$  nor  $A^2 - 4B$  vanish, hence  $\mathcal{M}^{2N} \simeq \mathcal{O}_S$  and

$$j = \frac{B}{A^2 - 4B} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$$

yields a well-defined morphism  $S \rightarrow \mathbb{A}_*^1$ . It is clear that the construction is functorial, providing the morphism  $\Phi : \mathcal{P}^t \rightarrow (\mathbb{A}_*^1)$ .

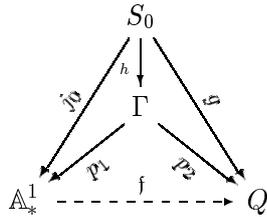
**2nd step : universal property.**

That  $\Phi(\text{Spec } k) : \mathcal{P}^t(\text{Spec } k) / \simeq \rightarrow \mathbb{A}_*^1(k)$  is bijective (for any geometric point  $\text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$ ) is a consequence of the first step. The rest of the proof (universal property) goes as in [MS] : let  $\Psi : \mathcal{P}^t \rightarrow Q$  be a morphism of stacks to a scheme. We can exhibit a tautological family (i.e. one whose classifying morphism  $S \rightarrow \mathbb{A}_*^1$  is finite surjective) thanks to the one-parameter family (IV.7). Indeed consider  $S_0 = \text{Spec} \left( \mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}] \left[ \lambda, \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right] \right)$  and  $f_0 : C_0 \rightarrow S_0$  the curve given, as a covering of  $\mathbb{P}^1 \times S_0$ , by

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}(-2) \otimes \mathcal{O}_{S_0} \quad \text{and} \quad s = Y(Z - \lambda Y)(Z^2 - Y^2)^{N-1} \in \Gamma(\mathbb{P}^1 \times S_0, \mathcal{L}^{-N}) \quad (\text{IV.10})$$

Its invariant  $j_0 = \frac{1/4}{\lambda^2 - 1}$  determines a morphism  $j_0 = \Phi(f_0) : S_0 \rightarrow \mathbb{A}_*^1$ . Let  $g : S_0 \rightarrow Q$  be the morphism  $\Psi(f_0)$ ; let  $\Gamma \subset \mathbb{A}_*^1 \times Q$  be the scheme-theoretic image of  $h = (j_0, g)$ . First of all we observe that,  $j_0$  being finite and  $p_1$  separated,  $h$  is finite. In particular,  $h$  is closed, hence  $\Gamma = h(S_0)$  as sets. Second notice that  $\Gamma$  is irreducible because it is the image of  $S_0$  irreducible; hence it is integral. Third  $p_1$  is closed and bijective. It is closed and surjective because  $j_0$  is, and injective because for  $\mu, \mu' \in S_0$ ,

$$j_0(\mu) = j_0(\mu') \Rightarrow C_{0,\mu} \simeq C_{0,\mu'} \Rightarrow g(\mu) = g(\mu')$$



The last implication comes from the diagram of naturality of  $\Psi$  for  $\text{Spec } k(\mu) \rightarrow S_0$ . Thus  $p_1$  is dominant, bijective and separable (since  $j_0$  is), hence it is a birational map. At last,  $\mathbb{A}_*^1$  being normal, Zariski's Main Theorem states that  $p_1$  is an isomorphism. Then the composition  $f := p_2 \circ p_1^{-1} : \mathbb{A}_*^1 \rightarrow Q$  satisfies  $g = f \circ j_0$ , and we obtain a factorization for  $\Psi$

$$\mathcal{P}^t \rightarrow \mathbb{A}_*^1 \xrightarrow{f} Q$$

□

It must be said that  $\mathbb{A}_*^1$  is not a fine moduli space : in general the mapping  $\Phi(S) : \mathcal{P}^t(S) \rightarrow \mathbb{A}_*^1(S)$  is not bijective. Indeed, by proposition 2.1.5 it suffices to choose a field  $k$

containing some  $\lambda \notin k^N$  to produce two  $N$ -Potts curves non-isomorphic over  $k$ , but with the same invariant. For instance if  $a, b \in k$  and  $\lambda \notin k^N$ ,

$$\begin{aligned} C_1 : Y^2 &= X^{2N} + aX^N + b \\ C_2 : Y^2 &= X^{2N} + \lambda aX^N + \lambda^2 b \end{aligned}$$

show that  $\Phi(\text{Spec}(k))$  is not injective. Actually in general  $\Phi(S)$  is not surjective either. This is due to the extra automorphism when  $j = -1/4$  (proposition 2.1.6), causing ramification of  $j$  above  $-1/4$  :

$$j + \frac{1}{4} = \frac{A^2}{4(A^2 - 4B)}$$

### 3.2 Reduction modulo a prime not dividing $2N$

According to 2.2, the moduli space  $P^t$  of  $N$ -Potts curves can not have good reduction at a prime factor  $\mathfrak{p}$  of  $N$ , if  $N \neq \mathfrak{p}$ . The case of  $N = \mathfrak{p}$  is left aside until §4. Finally, the previous paragraph (explicit construction of the classifying morphism for  $f : C \rightarrow S$ ) shows that reduction mod  $\mathfrak{p}$  can be done when  $(N, \mathfrak{p}) = 1$ . We obtain (compare with the elliptic case [KaMa]) :

**Theorem 3.2.1** *Assume that  $\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$  is a prime with  $(N, \mathfrak{p}) = 1$  and  $\mathfrak{p} \neq 2$ . Then the fiber of the moduli space  $P^t$  over  $\mathfrak{p}$  is isomorphic to  $P_{\mathfrak{p}}^t$ , the moduli space for  $N$ -Potts curves in characteristic  $\mathfrak{p}$ .  $\square$*

### 3.3 Modular Picard group

We are going to see that, in spite of the equality of all moduli spaces of tame Potts curves (for varying  $N$ ), the Picard groups associated to the stacks are distinct. The exceptional automorphisms (for  $j = -1/4$ , see theorem 2.1.6(ii)) are known to contribute to the Picard group. In order to take them into account, we will perform the computation over the base  $\mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]$ . So in this section and only here, this will be the base scheme.

We refer the reader to the pioneering article [Mu] for modular Picard groups; let us remind that an invertible sheaf  $\mathcal{L}$  on  $\mathcal{P}^t$  consists in the following data :

- an invertible sheaf  $\mathcal{L}(f)$  on  $S$ , for all families  $f : C \rightarrow S$ ,
- an isomorphism  $\mathcal{L}(F) : \mathcal{L}(f') \xrightarrow{\sim} g^* \mathcal{L}(f)$  for all morphisms  $F : f' \rightarrow f$ ; here the morphism  $F$  is a cartesian square  $C' \simeq C \times_S S'$  and  $g$  is the map  $S' \rightarrow S$ . These isomorphisms must be compatible to composition in an obvious sense.

The Picard group  $\text{Pic}(\mathcal{P}^t)$  is the set of isomorphism classes of invertible sheaves, endowed with the obvious tensor product.

By looking at the action of automorphisms on invertible sheaves, we are going to define a morphism

$$\beta : \text{Pic}(\mathcal{P}^t) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$$

(remind that the base is  $\mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]$ , so that we should write  $\mathcal{P}^t \otimes \mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]$ , but we don't for simplicity). In what follows denote by  $\sqrt{\sigma}$  the exceptional automorphism when  $j = -1/4$ , so that  $G = \text{Aut}(C, \sigma)$  is generated by  $\tau$ , and  $\sigma$  or  $\sqrt{\sigma}$ .

**Construction of  $\beta$  :**

Let  $\mathcal{L}$  be an invertible sheaf on  $\mathcal{P}^t$  and  $f : C \rightarrow S$  a family of  $N$ -Potts curves. By the definition applied to  $F = \tau$  the automorphism of  $f$ , there exists an (auto-)morphism

$\mathcal{L}(\tau) : \mathcal{L}(f) \rightarrow \mathcal{L}(f)$ . Such an object is multiplication by a global section  $\beta_1$  of  $\mathcal{O}_S^\times$ ; moreover, as  $\tau$  is an involution,  $(\beta_1)^2 = 1$ .

Besides, since  $\tau$  induces the hyperelliptic involution on the fibers, it is clear that  $\beta_1(\mathcal{L}_s)$  is a continuous function of  $s$ . Now take for  $f$  a tautological family as in the proof of 3.1.1 : it has a connected base and contains all isomorphism classes in its fibers. This shows that  $\beta_1(\mathcal{L})$  is well-defined as  $\beta_1(\mathcal{L}_s)$  on any fiber of any family of Potts curves.

Applying the same considerations with  $\sigma$  or  $\sqrt{\sigma}$  instead of  $\tau$ , we obtain a map

$$\beta = (\beta_1, \beta_2) : \text{Pic}(\mathcal{P}^t) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})$$

Obviously, if  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{M}$  are invertible sheaves on  $\mathcal{P}^t$ , then  $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})(\tau) = \mathcal{L}(\tau) \otimes \mathcal{M}(\tau)$ , and it is nothing else than multiplication by  $\beta_1(\mathcal{L}) \beta_1(\mathcal{M})$ . Hence  $\beta$  is a morphism.

The following should now be quite close to intuition :

**Lemma 3.3.1**  *$\beta$  is surjective.*

**Proof :** Let  $(f : C \rightarrow S, \tau, \sigma)$  be a family of Potts curves :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{r} & C/\tau \\ & \searrow \sigma & \swarrow \sigma \\ & S & \end{array}$$

To show surjectivity of  $\beta$  it is tempting, as in [Mu], to evaluate  $\beta$  on the (pushforward of the) determinant sheaf  $\omega_C = \bigwedge^{N-1} \Omega_C$ , with  $\Omega_C$  the sheaf of differential 1-forms. On the hyperelliptic curve  $C : y^2 = x^{2N} + Ax^N + B$ , there is a basis of  $\Gamma(C, \Omega_C)$  that has the virtue of diagonalizing the action of  $G$  : this basis is  $\varphi_i = x^{i-1} \frac{dx}{y}$  for  $1 \leq i \leq N-1$ , and

$$\begin{aligned} \sigma^* \varphi_i &= \zeta_N^i \varphi_i \quad \text{or} \quad \sqrt{\sigma}^* \varphi_i = \zeta_{2N}^i \varphi_i \\ \tau^* \varphi_i &= -\varphi_i. \end{aligned}$$

Actually the induced action on  $\omega_C$  is trivial, but instead we can take advantage of the fact that the action is not trivial on  $\Omega_C$  and its eigen-subsheaves. There is indeed a decomposition

$$f_* \Omega_C = \bigoplus_{i=1}^{N-1} \mathcal{F}_i$$

where  $\mathcal{F}_i = \ker(\sigma^* - \zeta^i \text{id})$  is an invertible sheaf. The action of  $\sigma$  on  $\mathcal{F}_1$  is (tautologically) multiplication by  $\zeta_N$ , and the action of  $\sqrt{\sigma}$  is multiplication by  $\zeta_{2N}$ . As a result  $\beta(\mathcal{F}_1) = (-1, \zeta_{2N})$ .

We have to find another element to generate  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})$ . We know that the data of a curve  $C \rightarrow S$  and its involution  $\tau$  determine canonically an invertible sheaf  $\mathcal{L}$  of degree  $-N$  on  $C/\tau$ . The sheaf  $q_*(\mathcal{L}^{-1})$  on  $S$  is locally free of rank  $N+1$ . In the case  $S = \text{Spec}(k)$ , the quotient map  $r$  is given on the usual equation (IV.6) by  $(x, y) \mapsto x$ , and  $q_*(\mathcal{L}^{-1})$  is just  $\Gamma(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}(N))$ , the space of homogeneous polynomials in  $(x, x')$  of degree  $N$ . Here  $\sigma$  acts by multiplication by  $\zeta_N$  on  $x$ , and trivially on  $x'$ . As above there is a decomposition of the sheaf into locally free subsheaves

$$q_*(\mathcal{L}^{-1}) = \bigoplus_{i=0}^N \mathcal{G}_i$$

where  $\mathcal{G}_i = \ker(\sigma^* - \zeta^i \text{id})$ . If  $i \geq 1$ ,  $\mathcal{G}_i$  is an invertible sheaf, and  $\mathcal{G}_0$  is locally free of rank 2. We obtain at once  $\beta(\mathcal{G}_1) = (1, \zeta_{2N})$ ; then  $\beta(\mathcal{F}_1)$  and  $\beta(\mathcal{G}_1)$  generate the group  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})$ .  $\square$

The result is then very similar to the one in the elliptic case (see [Mu]), except that here there is an arithmetic contribution of the base  $\mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]$  :

**Proposition 3.3.2** *The Picard group of  $\mathcal{P}^t$  as a stack over  $\mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]$  sits in an exact sequence*

$$0 \rightarrow \text{Pic} \left( \mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}] \right) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{P}^t) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

**Proof :** Let us follow Mumford [Mu, §6, p. 74, Main Theorem]. We must find the kernel of the map  $\beta$ . To this aim, take  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(\mathcal{P}^t)$  such that  $\beta(\mathcal{L}) = 0$ . It is enough to show that  $\mathcal{L}(f)$  comes from the base for any atlas  $S \rightarrow \mathcal{P}^t$  (corresponding to a curve  $f : C \rightarrow S$ ).

Let  $I := S \times_{\mathcal{P}^t} S$  that is a smooth scheme (it is the  $\text{Isom}(f, f)$  of Mumford). In the sequel, we write  $\mathbb{A}_*^1$  for  $\mathbb{A}_*^1 \otimes \mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]$ . Consider the compositions  $q_i = p_i \circ g \circ \varphi$  ( $i = 1, 2$ ) :

$$I \xrightarrow{\varphi} \widetilde{S \times_{\mathbb{A}_*^1} S} \xrightarrow{g} S \times_{\mathbb{A}_*^1} S \xrightleftharpoons[p_1]{p_2} S$$

(tilda  $\widetilde{\phantom{x}}$  stands for normalization). The morphism  $\varphi$  is cyclic  $2N$ -uple and étale. By the definition of an invertible sheaf, there is an isomorphism

$$\psi : q_1^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} q_2^* \mathcal{L}$$

At this stage, one uses  $\beta(\mathcal{L}) = 0$  to show that  $\psi$  actually comes from an isomorphism  $\psi_0 : p_1^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{L}$  : here everything is as in [Mu]. Then observe that  $\psi_0$  is descent data for the invertible sheaf  $\mathcal{L}(f)$ , with respect to the flat morphism  $j : S \rightarrow \mathbb{A}_*^1$ . By descent, we obtain existence of an invertible sheaf  $\mathcal{L}_0$  on  $\mathbb{A}_*^1$ , and an isomorphism  $\phi : \mathcal{L}(f) \xrightarrow{\sim} j^* \mathcal{L}_0$ .

It remains to show that  $\text{Pic}(\mathbb{A}_*^1 \otimes \mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}]) = \text{Pic}(\mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}])$ , which is easy. Since all the rings in question are noetherian, integral and regular, the Picard groups equal the class groups of Weil divisors of the corresponding affine schemes. Let  $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_{2N}, \frac{1}{2N}])$ . We have  $\text{Pic}(X \times \mathbb{A}^1) \simeq \text{Pic}(X)$  (see [Hart], II, prop. 6.6 ; this is a classical result in K-theory for normal rings). Denote by  $t$  a coordinate on  $\mathbb{A}^1$ , and by  $Z$  the prime divisor in  $X \times \mathbb{A}^1$  with equation  $t$ , so that  $U = X \times \mathbb{A}_*^1 = (X \times \mathbb{A}^1) - Z$ . Restriction to  $U$  gives a surjective map  $\text{Pic}(X \times \mathbb{A}^1) \rightarrow \text{Pic}(U)$ , whose kernel is generated by the class of  $Z$  ([Hart], II, prop. 6.5). But as  $Z$  is principal, its class is zero and the map is bijective.  $\square$

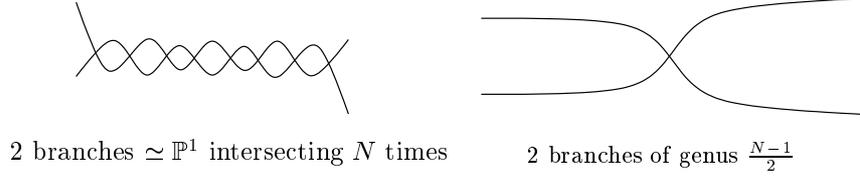
### 3.4 Compactification by stable curves

It is known by the general theory of tame Hurwitz spaces [BR], that there exists a compactification for  $\mathcal{P}^t$ . Actually there is a proper smooth  $\mathbb{Z}[\zeta_N, \frac{1}{2N}]$ -stack  $\overline{\mathcal{P}^t}$ , with a coarse moduli space  $\overline{P^t}$  which is projective and normal. We now describe the « cusps » of  $\overline{P^t}$  over an algebraically closed field  $k$  of characteristic prime to  $2N$ .

*Hence in 3.4 all schemes (in particular  $P^t$ ,  $\overline{P^t}$ ,  $\mathbb{A}_*^1$ ,  $\mathbb{P}^1$ ) are over  $k$ .*

Recall the Potts data  $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ,  $g = N - 1$  and  $\xi$  the ramification written in definition 2.1. In order to determine the stable curves lying on the boundary of the compactification of the Hurwitz (Potts) scheme, we use on the one hand the discriminant morphism, and on the other hand we use the combinatorial description of stable curves via their dual graph  $\Gamma$ , see [DM], [BR]. The discriminant is the morphism (with values in the moduli space of curves of genus 0 with four marked points gathered by pairs),  $\overline{P^t} = \overline{H}_{g,G}(\xi) \rightarrow \overline{M}_{0,(2,2)}$  that to an isomorphism class  $[C]$  associates  $[C/G]$  marked by the branch points.

**Proposition 3.4.1** *The compactification of  $P^t = \mathbb{A}_*^1$  is  $\overline{P^t} = \mathbb{P}^1$ , and the two cusps are*



**Proof :** First,  $\overline{P^t}$  is a normal proper curve of genus zero, hence it is  $\mathbb{P}^1$ .

In dual graphs, we shall indicate marked points by wavy edges. Hence let  $(C, G)$  be a stable Potts curve. We have  $\Gamma_\Sigma = \Gamma_C/G$ , where  $\Sigma = C/G$  has genus 0. We recall that  $g' = \sum_i g_{\Sigma_i} + h^1(\Gamma_\Sigma)$ , so that the irreducible components  $\Sigma_i$  of  $\Sigma$  are all rational, and that  $\Gamma_\Sigma$  is a (connected) tree. Taking into account the four marked points and the stability conditions,  $\Gamma_\Sigma$  must be one of the two graphs :



Actually,  $G$  being cyclic, there is no dihedral stabilizer, therefore a double point in  $C$  maps to a double point in  $\Sigma$  [BR]. Hence the first graph can not occur.

Let  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , be irreducible components of  $C$  above  $\Sigma_i$ , and intersecting at  $x$ . The stabilizer of  $x$  is  $H = G_x$ , and  $h = [G : H]$  is its index. Take  $a \in C_1$  a (smooth) ramification point ; the stabilizer of  $C_1$  is  $G_1 = G$  because by assumption  $G = G_a \subset G_1$ . Similarly  $G_2 = G$ , thus  $C$  has only two irreducible components.

Now let us write the Riemann-Hurwitz formula for the restrictions  $\pi|_{C_i}$ , from  $C_i$  to  $C_i/G_i \simeq \Sigma_i \simeq \mathbb{P}^1$ . There is only one orbit of double points, therefore their number is  $|G.p| = |G/G_p| = h$  :

$$2g_i - 2 = N(-2) + \underbrace{2(N-1)}_{(r)} + \underbrace{h(N-h)}_{(d)} = h(N-h) - 2, \quad \forall i = 1, 2.$$

where  $(r)$  is the contribution of the ramification points, and  $(d)$  the contribution of the double points. In particular  $g_1 = g_2$ , and we also know that  $g(C) = N-1 = g_1 + g_2 + h^1(\Gamma_C) = g_1 + g_2 + h - 1$ . So,  $h(N-h) = 2g_1 = N-h$ , whence  $h = N$  or  $1$ .

Letting the family  $y^2 = x^{2N} + 2x^N + t$  degenerate when  $t \rightarrow 1$ , we get  $y^2 = (x^N + 1)^2$ . In this way we see that the first cusp described above is the Potts curve of invariant  $j = \infty$ . Moreover, it is obvious that there is only one (isomorphism class of) Potts curve with this combinatorial aspect.

A similar description with equations for the other cusp would be more tricky. However, since we know that the other cusp can not have the same combinatorics, we necessarily get the second picture for  $j = 0$ . □

## 4 Moduli space : wild case $N = p$

The computations of 2.2 seem to suggest that  $\mathbb{A}_*^1$  is the coarse moduli space also for  $p$ -Potts curves in characteristic  $p > 0$ . Actually this is only « set-theoretic » as the moduli

space includes nilpotent elements. We compute this in section 4.1, and indicate briefly in 4.2 how the result can be extended to the case of the stack  $p$ -Potts curves over a ring of mixed characteristic.

#### 4.1 Moduli space in characteristic $p$

We will work over a field  $k$  of characteristic  $p > 3$ , assumed to be algebraically closed. The reason for this is that we will make use of some results stated in the literature in the case of algebraically closed fields, but it is likely that everything could actually be done over  $\mathbb{F}_p$ .

The purpose of this section is to provide the construction analogous to 3.1.1.

**Definition 4.1.1** Let  $S$  be a scheme over  $k$ . A  $p$ -Potts curve over  $S$  is a triple  $(C, \sigma, \tau)$  composed of a smooth projective  $S$ -curve, and two automorphisms,  $\sigma : C \rightarrow C$  of order  $p$  and  $\tau : C \rightarrow C$  of order 2, such that the geometric fibers are Potts curves in the sense of definition 0. The stack of  $p$ -Potts curves in characteristic  $p$  is denoted  $\mathcal{P}^w$  (the exponent « w » stands for « wild »).

For the definition and other considerations on the operation of 2-quotient denoted « // », see I.3.0.2.

**Theorem 4.1.2** *Let  $p > 3$  be a prime. If  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , then we have*

$$\mathcal{P}^w // G \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$$

*In particular,  $\mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$  is a coarse moduli space for  $\mathcal{P}^w$ .*

Before we go into the proof, we want to make some preliminary remarks.

**Remark 4.1.3** For a  $p$ -Potts curve  $(C, \sigma, \tau)$  over an algebraically closed field, there are 2 fixed points in  $C$  for the action of  $\sigma$ , and each has conductor  $m = 1$ . This follows from the description made in 2.2.

The proof below consists essentially in doing a quotient « in families », and to this aim we will use the following lemma.

**Lemma 4.1.4** *Let  $A$  be a  $k$ -algebra and  $\omega \in A$  be such that  $\omega^{p-1} = 0$ , so that  $\zeta = 1 + \omega$  satisfies  $1 + \zeta + \dots + \zeta^{p-1} = 0$ . Let  $\sigma$  be the automorphism of the graded ring  $A[X, Y]$  acting by*

$$X \mapsto \zeta X + Y \quad , \quad Y \mapsto Y$$

*Then the algebra of invariants  $A[X, Y]^\sigma$  is generated as an  $A$ -algebra by  $Y$  and the norm  $N(X) = \prod_{i=1}^p \sigma^i(X) = \prod_{i=1}^p (X + (1 + \zeta + \dots + \zeta^{i-1})Y)$ . In particular, for all  $a \in A$  the norm  $N(X + aY)$  is invariant under  $\sigma$ , hence  $N(X + aY) = N(X) + \xi Y^p$  for some  $\xi = \xi_a \in A$ .*

**Proof :** Clearly  $Y$  plays no role and we can dehomogenize by setting  $Y = 1$ . The norm  $N(X)$  is monic. If  $A$  is a field, then the result is a trivial calculation ; the difficulty comes from the fact that  $A$  can be as « bad » as possible. Let  $i : A[N(X)] \rightarrow A[X]^\sigma$  be the inclusion. It is known that, as the action is faithful fibre by fibre,  $A[X]^\sigma$  is of finite type over  $A$  and its formation commutes with base change  $A \rightarrow A'$  (this is a special case of results concerning actions of smooth curves, see for example [BM2], prop. 3.7). Hence, the cokernel  $M = \text{coker}(i)$  is a finite  $A$ -module, and for every maximal ideal  $m \subset A$ , we have  $M \otimes A/m = 0$ . By Nakayama's lemma, it follows that  $M = 0$ .  $\square$

The proof of theorem 4.1.2 proceeds in two steps. First we will construct a morphism from  $\mathcal{P}^w$  to the coarse moduli space, and then we will check that it factors through the sought-for isomorphism.

**1st step : construction of a morphism**  $\Phi : \mathcal{P}^w \rightarrow \mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$

Here we keep the notations of the proof of 3.1.1. Let  $(f : C \rightarrow S, \sigma, \tau)$  be a  $p$ -Potts curve over  $S$  in characteristic  $p$ . Let  $C \xrightarrow{r} E \xrightarrow{q} S$  be the factorization of  $f$ . Then  $\sigma$  induces an automorphism of order  $p$  of  $E$ , still denoted  $\sigma$ .

By the remarks above, the divisor of fixed points  $C^\sigma$  has degree 4 over  $S$ , but is no longer étale, and similarly the divisor  $T = E^\sigma$ , with degree 2 over  $S$ , is not étale but nevertheless fppf over  $S$ . Making the base change  $T \rightarrow S$  we can assume that there is a section to  $q : E \rightarrow S$ . For simplicity we omit to write this base change, and we call  $\Delta \subset T$  the image of the section. Then the difference  $\Delta' = T - \Delta$  is still an effective relative Cartier divisor, and  $T = \Delta + \Delta'$ . As is seen on the fibres,  $\Delta$  and  $\Delta'$  have the same support (and the same degree), but they are not necessarily equal (see below).

>From now on we work with the section  $\Delta$  : setting  $\mathcal{V} = q_*\mathcal{O}(\Delta)$ , we have  $E = \mathbb{P}(\mathcal{V})$  whose sheaf  $\mathcal{O}(1)$  is  $\mathcal{O}(\Delta)$ . The section corresponding to  $\Delta$  gives a surjective map  $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{O}(1)|_\Delta$  whose kernel is known to be  $N_\Delta^\vee \otimes \mathcal{M}$ , with  $N_\Delta^\vee$  the conormal sheaf of  $\Delta$  in  $E$ . But  $N_\Delta^\vee \simeq \mathcal{O}(-\Delta)|_\Delta \simeq \mathcal{O}(-1)|_\Delta$ , so that  $\ker(h) \simeq \mathcal{O}_S$ . Hence we have an extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{O}(1)|_\Delta \rightarrow 0 \quad (\text{IV.11})$$

Let us see now how  $\sigma$  acts on this. As an automorphism of  $E$ , it pulls back  $\mathcal{O}(1)$  to an invertible sheaf of degree 1, i.e. there is an isomorphism  $u_\sigma : \sigma^*\mathcal{O}(1) \simeq \pi^*\mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(1)$  for some  $\mathcal{K}$ . Moreover  $\sigma$  is the identity on  $\Delta$ , so that restricting  $u_\sigma$  to  $\Delta$  shows that  $\mathcal{K}$  is trivial. Now  $\sigma$  is given by a surjective morphism of sheaves

$$q^*\mathcal{V} \rightarrow \sigma^*\mathcal{O}(1) \xrightarrow{u_\sigma} \mathcal{O}(1)$$

Taking direct images by  $q$ , we obtain an automorphism  $\varphi_\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . This  $\varphi_\sigma$  induces an automorphism of  $\mathcal{M}$  and of  $\ker(h) \simeq \mathcal{O}_S$ , and is well determined up to a global section of  $\mathcal{O}_S^\times$ . So we can demand that  $\varphi_\sigma|_{\mathcal{O}_S} = \text{id}$ , which makes  $\varphi_\sigma$  canonical. Now the action on  $\mathcal{M}$  is given by multiplication by a global section  $\zeta \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^\times)$ , and as  $\varphi_\sigma$  has order  $p$  we have  $\zeta^p = 1$ . In the end this means that if we choose locally a section of  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ , or equivalently a system of global coordinates  $X, Y$  on  $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ , the action is

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(Y) &= Y \\ \varphi_\sigma(X) &= \zeta X + \psi Y \quad (\text{for some } \psi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) \end{aligned}$$

On the geometric fibres above points of  $S$ ,  $\sigma$  has order  $p$  and this requires  $\psi(s) \neq 0$  for all  $s$ , hence  $\psi \in \Gamma(\mathcal{O}_S^\times)$ . So, changing  $X$  into  $\psi^{-1}X$ , we can reduce to  $\psi = 1$ . Finally  $\sigma$  is given by the matrix  $\begin{bmatrix} \zeta & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  which has order  $p$  if and only if

$$1 + \zeta + \dots + \zeta^{p-1} = 0$$

It is equivalent to say that  $\omega = \zeta - 1$  is nilpotent of order  $p - 1$ .

The double cover  $r$  is described by the decomposition  $r_*\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}$  and by a section  $\theta \in \Gamma(E, \mathcal{L}^{-2})$ , well determined up to an element of  $\Gamma(E, \mathcal{O}_E^\times)$ . Also,  $\mathcal{L}^{-2} \simeq \mathcal{O}_E(2p)$ ,

so we can identify  $\theta$  with a  $\sigma$ -invariant section of  $\Gamma(E, \mathcal{O}_E(2p)) = \Gamma(S, \text{Sym}^{2p}(\mathcal{V}))$ . By lemma 4.1.4 we get

$$\theta = UN(X)^2 + AN(X)Y^p + BY^{2p}$$

for some sections  $U, A, B$  belonging to  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ . Looking on the fibres we see that  $U$  is everywhere nonzero, so, changing  $\theta$  into  $U^{-1}\theta$ , we can reduce to  $U = 1$ . For the same reason  $A^2 - 4B$  is invertible, hence we can define  $j = \frac{1}{(A^2 - 4B)} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ . Note that the construction exhibits a « root of unity »  $\zeta \in \mathcal{O}_S$ , that is to say,  $j$  is actually given by a morphism

$$j : \frac{k[y]}{1+y+\dots+y^{p-1}}[X, 1/X] \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$$

under which  $y \mapsto \zeta$ .

Now we check the independance of  $j$  with respect to the choices made. The only places where we could not normalize in some way are the choice of the section  $\Delta$  (rather than  $\Delta'$ ) and the choice of a coordinate system  $X, Y$ . First we change  $X, Y$  to other coordinates  $X^\sharp, Y^\sharp$  adapted to (IV.11), i.e.

$$\begin{aligned} X^\sharp &= \alpha X + \beta Y \\ Y^\sharp &= \gamma Y \end{aligned}$$

The condition  $\varphi_\sigma(X^\sharp) = \zeta X^\sharp + Y^\sharp$  leads to  $\alpha = \beta\omega + \gamma$  (recall that  $\omega = \zeta - 1$ ). So,  $X^\sharp = (\gamma + \omega\beta)(X + \frac{\beta}{\gamma + \omega\beta}Y)$  (observe that  $\gamma + \omega\beta$  is invertible because  $\gamma$  is). Using 4.1.4 again, we have

$$N(X^\sharp) = (\gamma + \omega\beta)^p(N(X) + \xi Y^p) = \gamma^p(N(X) + \xi Y^p)$$

because  $\omega^p = 0$ . Because of the normalization  $U = 1$  this implies  $\gamma^p = 1$  and

$$\begin{aligned} \theta &= \theta^\sharp = N(X^\sharp)^2 + A^\sharp N(X^\sharp)(Y^\sharp)^p + B^\sharp (Y^\sharp)^{2p} \\ &= (N(X) + \xi Y^p)^2 + A^\sharp (N(X) + \xi Y^p)Y^p + B^\sharp Y^{2p} \\ &= N(X)^2 + (A^\sharp + 2\xi)N(X)Y^p + (B^\sharp + A^\sharp\xi + \xi^2)Y^{2p} \end{aligned}$$

so we derive  $A = A^\sharp + 2\xi$ ,  $B = B^\sharp + A^\sharp\xi + \xi^2$ , hence  $(A^\sharp)^2 - 4B^\sharp = A^2 - 4B$ . Hence the invariant  $j$  is unchanged.

Now assume we choose the section  $\Delta'$  instead of  $\Delta$ . Its equation is given by the equation  $\sigma(X) - X = \zeta X + Y - X = Y + \omega X$ , meaning that  $\Delta$  and  $\Delta'$  have the same support. They are equal if and only if  $\omega = 0$ , for example if the scheme  $S$  is reduced. Then we work with the coordinate system  $X' = X$ ,  $Y' = Y + \omega X$ , so

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(X') &= \zeta X + Y = X' + Y' \\ \varphi_\sigma(Y') &= Y + \omega(\zeta X + Y) = \zeta Y' \end{aligned}$$

The condition that  $\varphi_\sigma$  acts trivially on  $Y'$  leads to consider  $\varphi'_\sigma = \zeta^{-1}\varphi_\sigma$ , and

$$\begin{aligned} \varphi'_\sigma(X') &= \zeta^{-1}(X' + Y') \\ \varphi'_\sigma(Y') &= Y' \end{aligned}$$

The norm  $N'$  for  $\varphi'_\sigma$  is the same as that for  $\varphi_\sigma$  (direct calculation). Hence  $N'(X') = N(X)$  since  $X' = X$ . Furthermore  $(Y')^p = Y^p$  because  $\omega^p = 0$ , and one sees that

$$\theta = \theta' = N(X')^2 + A'N(X')(Y')^p + B'(Y')^{2p} = N(X)^2 + A'N(X)Y^p + B'Y^{2p}$$

has unchanged coefficients  $A' = A$ ,  $B' = B$ . Thus, the only change is that as a morphism  $\frac{k[y]}{1+y+\dots+y^{p-1}}[X, 1/X] \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ , the invariant  $j$  maps  $y$  to  $\zeta^{-1}$ . The consequence is that  $j = j_\Delta$  and  $j' = j_{\Delta'}$  coincide only on  $k[y + y^{-1}] = k[z]/z^{(p-1)/2}$  where we set  $z = (y + y^{-1})/2 - 1$ . That is to say, what is well-defined is a morphism to  $\mathbb{A}_*^1 \otimes k[z]/z^{(p-1)/2}$ .

We completed the construction after base change to  $T = E^\sigma$  (it was omitted in the notations). However, the canonicity of the construction yields a descent datum on  $T \times_S T$ . Thus by fppf descent, we obtain a morphism  $j$  defined on  $S$ , with values in  $\mathbb{A}_*^1$ .

Finally it is obvious that everything is functorial with respect to the curve  $C \rightarrow S$ , hence, we defined a morphism  $\Phi : \mathcal{P}^w \rightarrow \mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$ .

## 2nd step : end of proof of theorem 4.1.2

Let us first recall some notation to be used in the proof of proposition 4.1.5. Let  $W(k)$  be the ring of infinite Witt vectors of  $k$ , and consider the extension  $R = W(k)[\zeta + \zeta^{-1}]$  where  $\zeta$  is a primitive  $p$ -th root of unity. The minimal polynomial of  $\zeta + \zeta^{-1}$  over  $W(k)$  is the polynomial

$$\psi(X) = \sum_{\ell=0}^{(p-1)/2} \binom{p-1-\ell}{\ell} (-1)^\ell (X+4)^{(p-1)/2-\ell}$$

(see [BM1], 4.2.5 and 4.2.6) which is the gcd of two Tchebychev polynomials  $S$  and  $T$ . Note that  $\psi$  is monic and  $\psi \equiv X^{(p-1)/2}$  modulo  $p$  (because the Tchebychev polynomial  $T$  is congruent to  $X^p$  modulo  $p$ ). As a consequence,  $R/pR \simeq k[z]/z^{(p-1)/2}$ .

Now, it is known from chapter II that the stack  $\mathcal{P}^w$  is a separated Deligne-Mumford stack of finite type over  $k$  (see II.5.1.1 as well as II.5.2).

>From proposition 2.2.2 we know that  $p$ -Potts curves (over any base  $S/k$ ) have the constant group scheme  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  as their automorphism group (use non-ramification of  $\text{Aut}_S(C, \sigma, \tau)$ ). Hence by I.3.0.2 the morphism  $\Phi$  factors through

$$\Psi : \mathcal{P}^w // G \rightarrow \mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$$

with the stack  $\mathcal{Q} := \mathcal{P}^w // G$  representable by an algebraic space ([L-MB], chapter 8). Thanks to deformation theory, known from [BM1], we shall show that  $\Psi$  is étale :

**Proposition 4.1.5** *Let  $(C, \sigma, \tau)$  be a  $p$ -Potts curve over  $k$ . Then the ring that prorepresents the functor of deformations of  $C$  to local, artinian  $k$ -algebras is  $\frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}[[t]]$ .*

**Proof :** This is an example of the computation of deformations of  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -actions on smooth curves by Bertin and Mézard [BM1]. Indeed as  $\tau$  has order 2 which is assumed to be prime to  $p$ , the deformation ring of  $(C, \sigma, \tau)$  is the deformation ring of  $(D = C/\tau, \sigma)$  (we still denote  $\sigma$  the automorphism induced on  $C/\tau$ ).

We first look at deformations of  $(D, \sigma)$  to  $W(k)$ -algebras, like in [BM1]. In this article, corollary 3.3.5 shows that the universal deformation ring of  $(D, \sigma)$  is

$$R_{\text{gl}} = (R_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} R_r)[[U_1, \dots, U_N]]$$

with  $N = \dim_k H^1(D/\sigma, \pi_*^\sigma(\mathcal{T}_D))$ . Here there is only  $r = 1$  orbit of fixed points, with conductor  $m = 1$  (see remark 4.1.3). Also,  $R_1 = \frac{W(k)[[X]]}{\psi(X)}$  by [BM1], theorem 4.2.8. Finally, the computation of  $N$  is done in the course of the proof of theorem 4.2.8, namely  $N = 1$ . Reducing modulo  $p$ , we have  $R_1/pR_1 = \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}$  as explained at the beginning of the section. We obtain the universal ring for deformations to  $k$ -algebras as  $\frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}}[[u]]$ .  $\square$

As the 2-quotient  $\mathcal{P}^w \rightarrow \mathcal{Q}$  is étale (I.3.0.2), it follows from the proposition that the extensions of complete local rings corresponding to  $\Psi$  are trivial, meaning that both  $\Phi$  and  $\Psi$  are étale. A first consequence is that  $\mathcal{Q}$  is not only an algebraic space, but in fact a scheme. Also, considering the fibre square :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}' & \xrightarrow{u'} & \mathbb{A}_*^1 \otimes k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Q} & \xrightarrow{u} & \mathbb{A}_*^1 \otimes \frac{k[z]}{z^{(p-1)/2}} \end{array}$$

we have that  $u'$  is étale, hence  $\mathcal{Q}'$  reduced. Moreover  $u'$  is bijective, so by Zariski's Main Theorem for schemes  $u'$  is an isomorphism. So  $\mathcal{Q}_{\text{red}} = \mathcal{Q}'$  is affine, which implies that  $\mathcal{Q}$  itself is. Now using [SGA1], Exp. I, th. 6.1 we get that  $u$  is an isomorphism.

## 4.2 Moduli space in mixed characteristic

It is a natural attempt to try to unify the characteristic  $p$  and characteristic 0 sides of the problem. This theme is intertwined with the questions raised by liftings of wild covers of curves (from characteristic  $p$  to characteristic 0), see Oort's conjecture, and reduction of moduli spaces modulo  $p$ . See works of [OSS], [BM1], [Ra2], [GM2], [BW].

Furthermore, we saw already in the last section that some arguments used in order to tackle the problem in characteristic  $p$  use deformations to  $W(k)$ -algebras, and reduction. The objects that appeared in that context are the natural ones needed to extend the result to the case of mixed characteristic. Let us indicate precisely what is the right context to settle the problem.

Let us work over the base ring  $R = W(k)[\zeta + \zeta^{-1}]$  where  $\zeta$  is a primitive  $p$ -th root of unity (see 4.1). A  $p$ -Potts curve over a scheme  $S$  over  $R$  is defined as in definition 4.1.1. Then following the lines of the proof of theorem 4.1.2, one should prove that there is a morphism from the stack  $\mathcal{P}^m$  of  $p$ -Potts curves over  $R$ -schemes (the exponent « m » stands for « mixed »), to the scheme  $\mathbb{A}_*^1 \otimes R$ . One must then conclude that this is the coarse moduli space.

The details are almost unchanged ; one has to remind that the scheme of fixed points under a cyclic group (as  $E^\sigma$  used in the proof of 4.1.2) is flat over the base, see II. 2.2.3. One minor difference is that we must abandon the fact that  $\omega = \zeta - 1$  is nilpotent (which is not used in the course of the proof). The polynomial replacing the norm  $N(X)$  of 4.1.4 is formally the same :

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (X + (1 + \zeta + \dots + \zeta^{i-1})Y)$$

As is well-known,  $P$  has coefficients in  $R$  because of the  $p$ -divisibility of binomial coefficients. Observe that the norm used in 4.1.4 is indeed the reduction of  $P$ , for some choice of a morphism  $R \rightarrow k \rightarrow A$ .

# Bibliographie

- [ACV] D. ABRAMOVICH, A. CORTI, A. VISTOLI, *Twisted bundles and admissible covers*, electronic preprint arXiv:math.AG/0106211 (2001).
- [An] S. ANANTHARAMAN, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Bull. Soc. Math. Fr., Suppl., Mém. 33, 5-79 (1973).
- [AO] D. ABRAMOVICH, F. OORT, *Stable maps and Hurwitz schemes in mixed characteristics*, Previato (ed.), Proc. of the AMS special session on enumerative geometry in physics, University of Massachusetts, Lowell, MA, USA, April 1-2, 2000. Contemp. Math. 276, 89-100 (2001).
- [AV1] D. ABRAMOVICH, A. VISTOLI, *Complete moduli for families over semistable curves*, prépublication électronique arXiv:math.AG/9811059.
- [AV2] D. ABRAMOVICH, A. VISTOLI, *Complete moduli for fibered surfaces*, Ellingsrud et al. (ed), Recent progress in intersection theory. Int. conf. on intersection theory, Bologna, Italy, December 1997. Birkhäuser. Trends in Mathematics. 1-31 (2000).
- [AG] M. AUSLANDER, O. GOLDMAN, *The Brauer group of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. 97, 367-409 (1960).
- [Ar1] M. ARTIN, *Algebrization of formal moduli I*, Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, Spencer and Iyanaga Eds, Univ. Tokyo Press, 21-71 (1969).
- [Ar2] M. ARTIN, *Versal deformations and algebraic stacks*, Invent. Math. 27, 165-189 (1974).
- [BeMa] K. BEHREND, Y. MANIN, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*, Duke Math. J. 85, No.1, 1-60 (1996).
- [BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 21, Springer-Verlag (1990).
- [BM1] J. BERTIN, A. MÉZARD, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Invent. Math. 141, 195-238 (2000).
- [BM2] J. BERTIN, A. MÉZARD, *Induction and restriction in formal deformation of coverings*, prépublication électronique arXiv:math.AG/0205228.
- [BR] J. BERTIN, M. ROMAGNY, *Compactification des schémas de Hurwitz et applications*, prépublication de l'Institut Fourier (2002).
- [Bry] J.L. BRYLINSKI, *Propriétés de ramification à l'infini du groupe modulaire de Teichmüller*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 12, 295-330 ; 330-333 (1979).
- [BW] I. BOUW, S. WEWERS, *Reduction of covers and Hurwitz spaces*, electronic preprint AG/0005120 (2000).
- [CQ] G. CARDONA, J. QUER, *Curves of genus 2 with group of automorphisms isomorphic to  $D_8$  or  $D_{12}$* , electronic preprint arXiv:math.NT/0203165.

- [D] P. DELIGNE, *Le lemme de Gabber*, in Szpiro (ed.) Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : La conjecture de Mordell. Astérisque 127. Société Mathématique de France (1985).
- [DèDo] P. DÈBES, J-C. DOUAI, *Gerbés and covers*, Commun. Algebra 27, No.2, 577-594 (1999).
- [DèEm] P. DÈBES, M. EMSALEM, *On fields of moduli of curves*, J. Algebra 211, No.1, 42-56 (1999).
- [DG] M. DEMAZURE, P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, North-Holland Publishing Company. XXVI (1970).
- [DM] P. DELIGNE, D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHÉS 36, 75-109 (1969).
- [E] T. EKEDAHL, *Boundary behaviour of Hurwitz schemes*, in Resolution of singularities, Hauser et al. (ed.), research textbook in tribute to Oscar Zariski, Obergurgl, Austria, 1997. Birkhäuser, PM 181, 285-298 (2000).
- [EGA1] A. GROTHENDIECK, *Eléments de géométrie algébrique I*, Publ. Math. IHÉS 4 (1960).
- [EGA4] A. GROTHENDIECK, *Eléments de géométrie algébrique IV*, Publ. Math. IHÉS 24, 28 (1965,1966).
- [ELSV] T. EKEDAHL, S. LANDO, M. SHAPIRO, A. VAINSHTEIN, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. Math. 146 no. 2, 297-327 (2001).
- [FGA] A. GROTHENDIECK, *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962. Paris : Secrétariat mathématique (1962).
- [Fr] M. FRIED, *Fields of definition of function fields and Hurwitz families — groups as Galois groups*, Comm. Alg. 5, no. 1, 17-82 (1977).
- [Fu] W. FULTON, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. Math. (2) 90, 542-575 (1969).
- [Gi] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*, Grund. Math. Wiss. Band 179, Springer-Verlag (1971).
- [GIT] D. MUMFORD, J. FOGARTY, *Geometric invariant theory*, 2nd enlarged ed. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 34. Springer-Verlag (1982).
- [GM1] B. GREEN, M. MATIGNON, *Order  $p$  automorphisms of the open disc of a  $p$ -adic field*, J. Am. Math. Soc. 12, No.1, 269-303 (1999).
- [GM2] B. GREEN, M. MATIGNON, *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Compos. Math. 113, No.3, 237-272 (1998).
- [vGO] B. VAN GEEMEN, F. OORT, *A compactification of a fine moduli space of curves*, in Resolution of singularities, Hauser et al. (ed.), research textbook in tribute to Oscar Zariski, Obergurgl, Austria, 1997. Birkhäuser, PM 181, 285-298 (2000).
- [Gr] A. GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer I, II*, Séminaire Bourbaki n°290 and n°297 (1964/65/66).
- [Hak] M. HAKIM, *Topos annelés et schémas relatifs*, Ergeb. Math. Grenz. Band 64. Springer-Verlag (1972).
- [HaMo] J. HARRIS, I. MORRISON, *Moduli of curves*, GTM 187, Springer (1998).

- [Harb] D. HARBATER, *Moduli of  $p$ -covers of curves*, Commun. Algebra 8, 1095-1125 (1980).
- [Hart] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).
- [He] Y. HENRIO, *Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre  $p$  des disques et des couronnes  $p$ -adiques formels*, Thèse, Université de Bordeaux I (1999).
- [dJP] J. DE JONG, M. PIKAART, *Moduli of curves with non-abelian level structure*, Dijkgraaf et al. (ed.), The moduli space of curves. Proc. Conf. Texel Island, Netherlands, April 1994. Birkhäuser. Prog. Math. 129, 335-368 (1995).
- [KaMa] N. KATZ, B. MAZUR, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Ann. of Math. Stud. 108, Princeton University Press (1985).
- [KeMo] S. KEEL, S. MORI, *Quotients by groupoids*, Ann. Math. (2) 145, No.1, 193-213 (1997).
- [KL] S.L. KLEIMAN, K. LØNSTED, *Basics on families of hyperelliptic curves*, Københavns Univ. Mat. Inst. Preprint Ser. 1977 no. 7, March 1977.
- [Kn1] F. KNUDSEN, D. MUMFORD, *The projectivity of the moduli space of stable curves. I : Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. 39, 19-55 (1976).
- [Kn2] F. KNUDSEN, *The projectivity of the moduli space of stable curves. II : The stacks  $M_{g,n}$* , Math. Scand. 52, 161-199 (1983).
- [Knut] D. KNUTSON, *Algebraic spaces*, LNM 203. Springer-Verlag (1971).
- [Kol] J. KOLLÁR, *Quotient spaces modulo algebraic groups*, Ann. Math. (2) 145, No.1, 33-79 (1997).
- [Ktg] A. KONTOGEORGIS, *The group of automorphisms of cyclic extensions of rational function fields*, J. Algebra 216, No.2, 665-706 (1999).
- [Kont] M. KONTSEVITCH, *Enumeration of rational curves via torus actions*, Dijkgraaf et al. (ed.), The moduli space of curves. Proc. Conf. Texel Island, Netherlands, April 1994. Birkhäuser. Prog. Math. 129, 335-368 (1995).
- [L-MB] G. LAUMON, L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 39. Springer (2000).
- [Ma] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. CUP (1986).
- [MB] L. MORET-BAILLY, *Construction de revêtements de courbes pointées*, J. Algebra 240, No.2, 505-534 (2001).
- [Mi] J.S. MILNE, *Jacobian varieties*, Arithmetic geometry, Pap. Conf., Storrs/Conn. 1984, 167-212 (1986).
- [MS] D. MUMFORD, K. SUOMINEN, *Introduction to the theory of moduli*, Algebraic Geometry, Oslo 1970, F. Oort, ed., Woltes-Noordhoff, Groningen (1972).
- [Mu] D. MUMFORD, *Picard Groups of Moduli Problems*, Proc. Conf. on Arith. Alg. Geom. at Purdue (1963).
- [OS] M. OLSSON, J. STARR, *Quot Functors for Deligne-Mumford Stacks*, prépublication électronique arXiv:math.AG/0204307.
- [OSS] F. OORT, T. SEKIGUCHI, N. SUWA, *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 22, 4ème serie, 345-375 (1989).

- [OT] F. OORT, J. TATE, *Group schemes of prime order*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 3, 4ème série, 1-21 (1970).
- [Ra1] M. RAYNAUD, *Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* , Bull. SMF 102, 241-280 (1974).
- [Ra2] M. RAYNAUD, *Spécialisation des revêtements en caractéristique  $p > 0$* , Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 32, 4ème série, 87-126 (1999).
- [Ra3] M. RAYNAUD, *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHÉS 38 (1970).
- [Ra4] M. RAYNAUD,  *$p$ -groupes et réduction semi-stable des courbes*, The Grothendieck Festschrift, vol. III, Prog. Math. 88, 179-197 (1990).
- [Ro] S-S. ROAN, *A characterization of “rapidity” curve in the Chiral Potts Model*, Comm. Math. Phys. 145, 605-634 (1992).
- [Rom] M. ROMAGNY, *Un espace de modules pour les revêtements en caractéristique mixte*, prépublication no. 535 de l’Institut Fourier, Grenoble (2001).
- [Se1] J.-P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes*, 2ème éd., Hermann (1975).
- [Se2] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, 3ème éd., Hermann (1980).
- [SGA1] A. GROTHENDIECK ET AL., *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, LNM 224. Springer-Verlag (1971).
- [SGA4] A. GROTHENDIECK ET AL., *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, LNM 305. Springer-Verlag (1973).
- [Su] M. SUZUKI, *Group Theory I*, Springer-Verlag (1980).
- [Ta] J. TATE, *Finite flat group schemes*, Cornell et al. (ed.), Modular forms and Fermat’s last theorem. Conference in Boston, MA, USA, Aug. 9–18, 1995. Springer (1997).
- [To] B. TOEN, *Théorèmes de Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford*, K-Theory 18, No.1, 33-76 (1999).
- [Vi] A. VISTOLI, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. Math. 97, No.3, 613-670 (1989).
- [WaWe] W. WATERHOUSE, B. WEISFEILER, *One-dimensional affine group schemes*, J. Algebra 66, 550-568 (1980).
- [We] S. WEWERS, *Construction of Hurwitz spaces*, thèse, Universität GH Essen, preprint 21 (1998).