

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Schémas en groupes et familles de courbes

Matthieu Romagny

Présenté le 18 novembre 2011 devant le jury composé de :

José BERTIN (Université Grenoble 1)
Antoine DUCROS (Université Paris 6)
Bas EDIXHOVEN (Universiteit Leiden)
Qing LIU (Université Bordeaux 1)
Angelo VISTOLI (Scuola Normale Superiore di Pisa)
Stefan WEWERS (Universität Hannover)

Après avis de :

Bas EDIXHOVEN (Universiteit Leiden)
Michel RAYNAUD (Université Paris 11)
Angelo VISTOLI (Scuola Normale Superiore di Pisa)

À ma mère, que j'imagine présente à cette soutenance, prenant des notes pittoresques de mon exposé dans son petit carnet.

À mon père et ma soeur, avec tout l'amour de leur fils et frère.

À Barbara, Chloé, Fanny, Juliette, les moteurs de ma vie.

Merci...

Je souhaite remercier chaleureusement Bas Edixhoven, Michel Raynaud et Angelo Vistoli qui m'ont fait le plaisir et l'honneur d'écrire des rapports sur ce mémoire. Je les remercie surtout pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux, pour leurs conseils et encouragements dans ces dix dernières années.

Je remercie José Bertin, Antoine Ducros, Qing Liu et Stefan Wewers, qui comme Bas et Angelo ont pu se libérer pour participer au jury, et dont la présence compte beaucoup pour moi. Eux aussi m'ont beaucoup apporté pendant la décennie écoulée, au cours de conversations de cantine, discussions au tableau et la craie à la main, ou courriels éclairants. J'espère avoir encore le plaisir de nombreuses telles conversations à l'avenir.

La thèse de doctorat est le moment de remercier ses professeurs ; ma gratitude pour eux n'a pas changé, et je veux en témoigner à José. L'habilitation à diriger des recherches est l'occasion de saluer d'autres collègues : collaborateurs et étudiants. J'adresse un grand merci à ceux avec qui j'ai travaillé ces derniers temps, Dan Abramovich, Pierre-Emmanuel Chaput, Pierre Lochak, Ariane Mézard, Dajano Tossici et Michel Vaquié. Un merci particulier revient à mes étudiants, qui sont ceux qui me font le plus grandir. J'ai perdu la trace de la plupart d'entre eux, mais Marion et Cédric, avec qui l'histoire n'est pas finie !, seront dépositaires de ma reconnaissance.

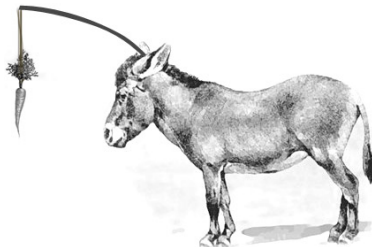
Je remercie ceux qui m'ont accueilli dans leurs locaux : l'équipe d'analyse algébrique d'abord, puis l'équipe de théorie des nombres depuis 2006. Grâce à tous ces collègues, c'est un plaisir d'arriver au bureau le matin. Certains — Laurent Charles et Pierre Charollois — m'ont même fait une place dans leur bureau : à ces drôles de zozos, merci pour la bonne humeur et les moments partagés !

Et comme il n'y a pas que les mathématiques, je remercie tous ceux qui embellissent ma vie : Barbara ; mes trois petits gribous Chloé, Fanny et Juliette ; mon père et ma soeur Delphine ; Françoise qui est arrivée sur la pointe des pieds ; marraine Isabelle et parrain Michel ; Elisabeth, Daniel et Bruno de ma jolie-famille ; et tous les copains.

Introduction	9
Première partie : Quotients	11
1 Quotient de l'action adjointe des groupes réductifs	12
2 Quotient par un groupoïde en champs algébriques	13
3 Quotients étales d'un champ et composantes connexes	18
Deuxième partie : Modèles de schémas en groupes	23
4 Schémas purs	23
5 Modèles effectifs de schémas en groupes finis et plats	25
6 Modèles et suites exactes de type Kummer	27
Troisième partie : Espaces de modules de revêtements	30
7 Groupe de Galois d'ordre inversible sur la base	31
8 Groupe de Galois d'ordre non inversible sur la base	33
Références	36
Liste de travaux	38

Introduction

Présentation d'une carotte. Ce qui fait avancer l'âne, c'est la carotte. Chacun connaît l'image de l'âne qui chemine avec, attachée à son dos par un bâton, une carotte pendue à distance fixe de son museau. Il ne l'attrapera sans doute jamais, et pourtant, il avance. La vérité est même plus dure que cela : il ne l'attrapera sans doute jamais, et c'est pour cela qu'il avance, encore et toujours. Ce qui fait avancer le mathématicien, c'est le rêve d'horizons – mathématiques – nouveaux. Les mathématiciens ne rattrapperont jamais leurs rêves, et pourtant ce sont eux qui les font avancer. Une petite différence entre les ânes et les mathématiciens est que les seconds ont souvent conscience du fait que leur effort est vain ; mais l'effet moteur est à peu près aussi puissant. Les rêves des mathématiciens sont variés. Le géomètre complexe court après la classification des variétés complexes projectives lisses à équivalence birationnelle près. L'arithméticien court après la structure intime du groupe de Galois absolu du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. S'il y a un Dieu des mathématiciens quelque part dans l'Univers, il pense sans doute : « Cours toujours ! ». Mais le mathématicien n'écoute pas.



Le modeste mathématicien – ou âne ? – auteur de ce mémoire voudrait vous présenter un rêve – une carotte ? – qui inspire ses efforts. Choisissons un entier naturel g , un groupe fini G , et un nombre premier p . Les revêtements galoisiens $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de la droite projective par une courbe algébrique projective, lisse, géométriquement connexe, de genre g , de groupe de Galois $\text{Gal}(C/\mathbb{P}^1) = G$, sont classifiés par une « variété » que nous notons $\mathcal{H}_{g,G}$, ou simplement $\mathcal{H}$, en l'honneur de Hurwitz pour son article [Hu]. Il en existe une compactification naturelle, obtenue à l'aide des courbes stables, que nous notons $\bar{\mathcal{H}}$. Si l'on interprète le mot « variété » comme « champ algébrique », alors $\bar{\mathcal{H}}$ est propre et lisse. C'est un objet merveilleux, mélange de deux sujets qui ont traversé les deux derniers siècles des mathématiques : la théorie de Galois et l'espace de modules des courbes $\mathcal{M}_g$. Le champ $\bar{\mathcal{H}}$ peut être défini – de multiples façons – par des équations à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et donc, en chassant les dénominateurs, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Une question qui inspire mes efforts est :

quelle est la réduction de $\bar{\mathcal{H}}$ en p ?

Cette question demande de chercher, parmi tous les jeux d'équations à coefficients entiers qui existent pour $\mathcal{H}$, lequel donnera par réduction modulo p la variété $\mathcal{H} \otimes \mathbb{F}_p$ la plus jolie possible. La situation est radicalement différente selon que p divise l'ordre de G ou non. Les problèmes qui se posent ne sont pas les mêmes, mais tous ont un grand intérêt.

Présentation du contenu du mémoire. La question générale précédente m'a amené à aborder divers sujets. Dans ce texte, j'ai choisi de les regrouper en trois thèmes qui forment les trois grandes parties de ce mémoire : le problème général de la construction de quotients en géométrie algébrique, qui se pose notamment pour fabriquer des espaces de modules ; la recherche de modèles entiers pour les schémas en groupes, à laquelle on est amené (dans le cas où p divise l'ordre de G) lorsqu'on veut réduire des revêtements galoisiens ; enfin la construction et l'étude des espaces de modules de revêtements de courbes. À quelques exceptions près, ce qui est exposé ici est contenu dans les six articles suivants :

- [4] *Champs de Hurwitz* (avec J. Bertin),
- [6] *On the adjoint quotient of Chevalley groups over arbitrary base schemes* (avec P.-E. Chaput),
- [7] *Effective models of group schemes*,
- [8] *Composantes connexes et irréductibles en familles*,
- [9] *Moduli of Galois p -covers in mixed characteristics* (avec D. Abramovich),
- [11] *Models of group schemes of roots of unity* (avec A. Mézard et D. Tossici).

Les numéros entre crochets renvoient à la liste complète de mes travaux, située en fin de mémoire. En ce qui concerne les « quelques exceptions près » mentionnées plus haut, un commentaire est nécessaire. Ce texte est un mémoire de synthèse de travaux antérieurs et il n'est supposé contenir ni résultat nouveau, ni démonstration. En fait, il contient deux démonstrations. La première est celle d'un résultat de représentabilité de quotient utilisé dans l'article [8] sans véritable preuve ; je saisis l'occasion pour aborder le problème dans un cadre un peu plus général qui l'éclaire mieux, et pour en donner une preuve complète. La seconde démonstration concerne un cas de représentabilité du foncteur des composantes connexes qui complète les résultats de l'article [8]. Ce cas m'a été signalé par Laurent Fargues, que j'ai plaisir à remercier ici. J'en profite pour remercier Dajano Tossici qui m'a indiqué l'exemple 8.5. Pour conclure ces remarques sur le contenu du mémoire, une dernière précision est essentielle : la longueur du texte consacré ici aux résultats de chacun des six articles ci-dessus est très loin de refléter leur importance ou leur intérêt relatif. Elle n'est que le résultat du choix de certains points particuliers que j'ai pensé utile de détailler, ou de la prédominance de mes sujets de réflexion du moment.

Notation. Dans tout le texte, on écrit $R = (R, K, k, \pi)$ pour désigner un anneau de valuation discrète R de corps de fractions K , de corps résiduel k , et une uniformisante π .

Première partie

Quotients

Dans cette première partie, nous présentons quelques problèmes de représentabilité de foncteurs covariants. Ces problèmes se ramènent en pratique à des questions de passage au quotient par l'action d'un groupe, par une relation d'équivalence, ou plus généralement par un groupoïde. Pour nous, l'importance de ces questions apparaît principalement dans deux situations : lorsque des groupes sont en jeu dans des situations géométriques naturelles, ou lorsqu'on souhaite fabriquer des espaces de modules. Nous présentons trois études de quotients. Celle de la section 1 est relativement indépendante des autres travaux évoqués dans ce mémoire, mais celles des sections 2 et 3 sont étroitement liées aux résultats des deuxième et troisième parties.

En Géométrie Algébrique, la construction de quotients pose plusieurs questions :

- (1) Quelle est la définition du quotient dont on cherche l'existence ? En particulier, dans quelle catégorie doit-on le chercher ?
- (2) Ce quotient possède-t-il de bonnes propriétés ?
- (3) Sa formation commute-t-elle au changement de base ?

Lorsqu'ils existent, les quotients dans des catégories différentes sont en général différents. Le choix d'une catégorie dans laquelle on va chercher un quotient conditionne d'ailleurs ses propriétés. Ainsi, le quotient du plan affine privé de l'origine $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$ par l'action par homothéties du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$ est le point $\mathrm{Spec}(k)$ dans la catégorie des schémas quasi-affines sur k , mais c'est bien sûr la droite projective $\mathbb{P}_k^1$ dans la catégorie de tous les k -schémas. Il se trouve que dans des « catégories » encore plus grosses comme celle des champs algébriques, le quotient est encore $\mathbb{P}_k^1$. Par ailleurs, le morphisme $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ est un toreur sous $\mathbb{G}_{m,k}$. On peut interpréter ces faits comme des signes que $\mathbb{P}_k^1$ est le « bon » quotient. Ces phénomènes sont discutés dans les exemples de cette partie.

Selon la philosophie de Grothendieck, bien qu'un objet qui représente un foncteur covariant soit défini en termes des morphismes dont il est la *source*, il est essentiel pour le construire de décrire les morphismes dont il est le *but*, c'est-à-dire ses points. Ceci est fait avec soin, particulièrement dans les sections 2 et 3 où les quotients sont moins concrets.

1 Quotient de l'action adjointe des groupes réductifs

Nous commençons par revisiter un exemple célèbre dans lequel le choix de la catégorie où l'on recherche le quotient est imposé par le problème lui-même.

Soient S un schéma, G un S -schéma en groupes réductif déployé, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, T un tore maximal, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est munie de l'action adjointe de G , et l'algèbre $\mathfrak{t}$ est munie de l'action induite du groupe de Weyl W , quotient du normalisateur de T par son centralisateur. Le *quotient adjoint* de $\mathfrak{g}$ noté $\mathfrak{g}/G$ est l'objet qui représente le foncteur covariant défini sur la catégorie des schémas affines sur S par

$$F(X) = \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{g}, X),$$

où X est vu comme G -schéma avec l'action triviale. Il est facile de voir que $\mathfrak{g}/G$ est représentable par le spectre de la $\mathcal{O}_S$ -algèbre des fonctions G -invariantes de $\mathfrak{g}$. Le morphisme

$$\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G$$

est très important ; il joue un rôle crucial dans la construction de la fibration de Hitchin qui est à la base de l'approche de B. C. Ngô de la démonstration du lemme fondamental (voir [Ngô]). On définit de même le quotient $\mathfrak{t}/W$ qui est un S -schéma affine ; l'inclusion $\mathfrak{t} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ induit un morphisme $\pi : \mathfrak{t}/W \rightarrow \mathfrak{g}/G$. Le fait de savoir que π est isomorphisme, lorsque c'est le cas, a plusieurs conséquences importantes pour $\mathfrak{g}/G$: d'abord cela ramène son calcul à un calcul de quotient par un groupe fini, et ensuite cela permet de l'interpréter comme l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $\mathfrak{g}$ (puisque les points de $\mathfrak{t}/W$ sont en bijection avec cet ensemble). Lorsque la base est le spectre d'un corps de caractéristique différente de 2, la question a été étudiée dans le travail classique de Springer et Steinberg [SpSt] et plus récemment par Levy [Le]. Lorsque G est simple (la réponse dans le cas semi-simple s'en déduit facilement), nous apportons une réponse sans hypothèse sur la base, dans l'article *On the adjoint quotient of Chevalley groups over arbitrary base schemes* en collaboration avec P.-E. Chaput.

Théorème. *Supposons que G est simple déployé sur un schéma S arbitraire. Alors le morphisme $\pi : \mathfrak{t}/W \rightarrow \mathfrak{g}/G$ est un isomorphisme, sauf dans le cas suivant : $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ et le faisceau structural $\mathcal{O}_S$ du schéma de base possède des éléments de 2-torsion.*

De plus, nous étudions en détail le cas exceptionnel, en calculant les schémas $\mathfrak{t}/W$, $\mathfrak{g}/G$ et le morphisme π . On trouvera ces résultats dans [6], 3.11 et 6.6.

La question de savoir si la formation du quotient $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G$ commute au changement de base relève plus du cas par cas. Nous y répondons pour les quatre groupes classiques en types A, B, C, D. Notons $S[2]$ le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal des fonctions annulées par 2. Alors :

- (i) si $G = \mathrm{SL}_n$ ou $G = \mathrm{Sp}_{2n}$, la formation du quotient commute au changement de base ;
- (ii) si $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ ou $G = \mathrm{SO}_{2n}$, la formation du quotient commute au changement de base $f : S' \rightarrow S$ si et seulement si $f^*S[2] = S'[2]$.

On trouvera ces résultats dans [6], 4.8, 4.9, 5.3, 6.6.

2 Quotient par un groupoïde en champs algébriques

Nous présentons maintenant un résultat utilisé dans la preuve du théorème 2.5.2 de l'article *Composantes connexes et irréductibles en familles* [8] qui est le sujet de la section 3 ci-dessous. Dans *loc. cit.*, on n'a donné qu'une maigre esquisse de preuve (voir [8] 2.5.1). Le champ quotient d'un groupoïde n'y est décrit que comme le champ associé à un certain préchamp, ce qui ne permet pas aisément de montrer qu'il est algébrique. Nous profitons de cette présentation pour donner un énoncé plus complet et pour le démontrer entièrement. En particulier, nous donnons une description directe des sections du champ quotient.

Contrairement à la situation de la section 1, on peut dire que le problème de quotient présent est posé dans une catégorie choisie pour que le quotient existe et soit le plus sympathique possible. Il s'agit en fait d'une 2-catégorie : la 2-catégorie des (1-)champs algébriques. En effet, on peut considérer que les champs algébriques ont été introduits pour obtenir des quotients possédant les meilleures propriétés possibles.

Dans la suite, nous écrivons toujours *champ algébrique* pour désigner un champ algébrique d'Artin. Nous fixons un espace algébrique S et tous les morphismes sont des S -morphisms.

2.1 Rappels sur les groupoïdes. Nous rappelons brièvement quelques définitions pour fixer les notations et assurer la cohérence du texte. Un *groupoïde en S -espaces algébriques* est la donnée de deux S -espaces algébriques R, X et de cinq morphismes $s, t : R \rightarrow X$, $e : X \rightarrow R$, $c : R \times_{s, X, t} R \rightarrow R$, $i : R \rightarrow R$ satisfaisant les axiomes bien connus qui expriment le fait que X est l'ensemble des objets et R l'ensemble des morphismes d'une petite catégorie. Ce groupoïde est souvent noté $s, t : R \rightrightarrows X$ ou simplement $R \rightrightarrows X$. On dit que le groupoïde est *fppf* si s , ou de manière équivalente t , est un morphisme fppf. On dit qu'un morphisme $g : X \rightarrow Z$ est *invariant* sous le groupoïde si $g \circ s = g \circ t$; on peut alors voir le groupoïde comme un groupoïde en Z -espaces. Un *quotient* pour $R \rightrightarrows X$ est un morphisme $f : X \rightarrow Y$ universel parmi les morphismes invariants. S'il existe, on dit que le quotient est *effectif* si le morphisme $R \rightarrow X \times_Y X$ est un isomorphisme. Un *morphisme de groupoïdes* $(R \rightrightarrows X) \rightarrow (R' \rightrightarrows X')$ est une paire de morphismes $R \rightarrow R'$, $X \rightarrow X'$ compatibles aux morphismes de structure des deux groupoïdes en un sens évident. Un groupoïde tel que $j = (t, s) : R \rightarrow X \times_S X$ est un monomorphisme, resp. un épimorphisme strict, est dit *libre*, resp. *transitif*. En particulier, un groupoïde qui possède un quotient effectif $f : X \rightarrow Y$ définit un groupoïde libre et transitif de Y -espaces. Un groupoïde libre est aussi appelé une *relation d'équivalence*. Si un groupoïde est libre et transitif, alors j est un monomorphisme et un épimorphisme strict, donc un isomorphisme. Le *stabilisateur* du groupoïde est le produit fibré $j^{-1}(\Delta_{X/S})$, vu comme X -espace, défini par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} j^{-1}(\Delta_{X/S}) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \Delta_X \\ R & \xrightarrow{j} & X \times X. \end{array}$$

L'action est libre si et seulement si le stabilisateur est trivial, i.e. $j^{-1}(\Delta_{X/S}) \rightarrow X$ est un isomorphisme. Un exemple fondamental est fourni par l'action d'un S -espace algébrique en groupes G sur un S -espace algébrique X : on dispose alors d'un groupoïde $G \times_S X \rightrightarrows X$ avec pour s la seconde projection, t le morphisme d'action, et e, c, i induits par l'unité du

groupe, la composition et l'inversion dans le groupe. Ce groupoïde est libre et transitif si et seulement si X est un pseudo G -torseur (un espace formellement principal homogène).

Un *groupoïde en S -champs algébriques* est un groupoïde $\mathcal{R} \rightrightarrows \mathcal{X}$ dans lequel $\mathcal{X}$ et $\mathcal{R}$ sont des S -champs algébriques, les morphismes de structure s, t, e, c, i sont des morphismes de S -champs algébriques, et tous les diagrammes qui expriment les axiomes de groupoïde sont 2-commutatifs. Les 2-isomorphismes de commutativité font partie de la structure, ce qui complique un peu la donnée. Pour des détails sur ce point, dans le cas des groupoïdes définis par des actions de groupes, nous renvoyons à [2], Section 1. Les notions définies précédemment pour les groupoïdes de S -espaces s'étendent sans modification. Signalons simplement que dans ce nouveau contexte, un *morphisme invariant* est une paire composée d'un morphisme $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et d'un 2-isomorphisme $\beta : g \circ s \Rightarrow g \circ t$. Un *quotient* est donc une paire $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\alpha : f \circ s \Rightarrow f \circ t$ telle que pour tout morphisme invariant (g, β) il existe une unique paire $h : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, $\gamma : h \circ f \Rightarrow g$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} h \circ f \circ s & \xrightarrow{\gamma \circ s} & g \circ s \\ h \circ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ h \circ f \circ t & \xrightarrow{\gamma \circ t} & g \circ t. \end{array}$$

2.2 Énoncé du théorème. Le résultat dont nous voulons expliquer la preuve est le suivant.

Théorème. *Soit S un espace algébrique.*

(1) *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme fppf de S -champs algébriques. Alors, le groupoïde*

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

est un groupoïde fppf à stabilisateur représentable, avec un quotient qui est $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

(2) *Soit $s, t : \mathcal{R} \rightrightarrows \mathcal{X}$ un groupoïde fppf en S -champs algébriques dont le stabilisateur est représentable. Alors, il existe un quotient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\alpha : f \circ s \Rightarrow f \circ t$ qui est un morphisme fppf de S -champs algébriques. Ce quotient est effectif et sa formation commute au changement de base.*

En résumé, ce théorème dit que dans la 2-catégorie des S -champs algébriques, les groupoïdes fppf à stabilisateur représentable sont exactement les groupoïdes définis par les fibres d'un morphisme fppf. Accompagnons-le de quelques remarques.

(i) La première partie est un énoncé de descente : elle signifie que f est un épimorphisme strict. La deuxième partie est un énoncé d'existence de quotient.

(ii) On peut remplacer partout *fppf* par *lisse* ou *étale* dans l'énoncé.

(iii) Ce théorème généralise les énoncés de l'article *Group actions on stacks and applications* [2] sur le passage au quotient par une action de groupe.

(iv) Il est intéressant de noter que, comme on le verra, la preuve de (2) utilise (1).

2.3 Commentaires sur le contexte homotopique. Avant de passer à la preuve, il est utile de replacer le résultat ci-dessus dans un cadre plus général. Dans [TV], Toën et Vezzosi construisent une $(n+1)$ -catégorie des n -champs d'Artin, que nous notons C_{n+1} . Pour les petites valeurs de n , on obtient l'ensemble $C_0 = \{S\}$, la catégorie C_1 des S -espaces algébriques, et la 2-catégorie C_2 des champs algébriques au sens où nous les entendons. Pour tout $n \geq 0$, le foncteur de Yoneda $C_n \hookrightarrow C_{n+1}$ permet de parler des n -champs qui sont (représentables par) des $(n-1)$ -champs. Il semble qu'on peut avancer les affirmations suivantes, et peut-être en trouver dans [TV] une preuve complète ou partielle :

(1) Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme fppf de n -champs d'Artin. Alors, le groupoïde

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

est un groupoïde fppf à stabilisateur un $(n-1)$ -champ d'Artin, avec pour quotient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

(2) Soit $s, t : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ un groupoïde fppf en n -champs d'Artin dont le stabilisateur est un $(n-1)$ -champ d'Artin. Alors, il existe un quotient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\alpha : f \circ s \Rightarrow f \circ t$ qui est un morphisme fppf de n -champs. Ce quotient est effectif et sa formation commute au changement de base. C'est aussi un quotient parmi les m -champs d'Artin, pour tout $m \geq n$.

Pour $n = 0$, le point (1) est un énoncé classique de théorie de la descente fppf et le point (2) est le théorème d'Artin sur le quotient des espaces algébriques par une relation d'équivalence plate. Pour $n = 1$, les points (1) et (2) constituent le théorème 2.2. Bien sûr, les énoncés de Toën et Vezzosi sont formulés dans le cadre de la géométrie algébrique homotopique duquel, comme un certain nombre de géomètres, je suis peu familier. Le simple fait de reconnaître dans les travaux homotopiques les objets dont on a besoin en géométrie algébrique n'est pas toujours facile, ce qui entrave un peu leur compréhension et leur utilisation : la lectrice (le lecteur) pourra juger par elle-même (par lui-même) en lisant les sections 1.3.4 et 1.3.5 de [TV]. Il est donc utile de formuler et démontrer ces résultats dans nos propres termes, ce qui est l'objet de la suite, pour $n = 1$.

2.4 Preuve du point (1) du théorème. On se donne un morphisme fppf de S -champs algébriques $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Le fait que le stabilisateur du groupoïde $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ est représentable est une conséquence du fait que la diagonale $\Delta_{\mathcal{X}/S}$ est représentable et qu'on a les carrés 2-cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} j^{-1}(\Delta_{\mathcal{X}/S}) & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \Delta_{\mathcal{X}/S} \\ \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{Y}/S}} & \mathcal{Y} \times_S \mathcal{Y}. \end{array}$$

Montrons maintenant que $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est le quotient du groupoïde qu'il définit, i.e. que c'est un épimorphisme strict. Notons que par définition du produit fibré, on dispose d'un 2-isomorphisme canonique $\alpha : f \circ \mathrm{pr}_1 \Rightarrow f \circ \mathrm{pr}_2$. Soient $\mathcal{Z}$ un S -champ algébrique,

$g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme et $\beta : g \circ \text{pr}_1 \Rightarrow g \circ \text{pr}_2$ un 2-isomorphisme. Soient $U \rightarrow \mathcal{Y}$ et $U' \rightarrow U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ des présentations lisses par des espaces algébriques ; soient $V = U \times_{\mathcal{Y}} U$ et $V' = U' \times_{\mathcal{X}} U'$. On a un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 V' \times_V V' & \rightrightarrows & V' & \longrightarrow & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U' \times_U U' & \rightrightarrows & U' & \xrightarrow{\varphi} & U \\
 \downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u \\
 \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} & \rightrightarrows & \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \xrightarrow{h} \mathcal{Z} \\
 & & & \searrow g & \\
 & & & & \mathcal{Z}
 \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the complex commutative diagram in the image, showing the relationships between the various spaces and morphisms.)

En composant le 2-isomorphisme $\beta : g \circ \text{pr}_1 \Rightarrow g \circ \text{pr}_2$ avec w et en utilisant les 2-isomorphismes $\text{pr}_i \circ w \Rightarrow v \circ \text{pr}_i$ avec $i = 1, 2$, on obtient un 2-isomorphisme $\beta * w : g \circ v \circ \text{pr}_1 \Rightarrow g \circ v \circ \text{pr}_2$. On a donc un diagramme 2-commutatif

$$U' \times_U U' \rightrightarrows U' \xrightarrow{g \circ v} \mathcal{Z}.$$

Comme $\mathcal{Z}$ est un champ, le morphisme $g \circ v$ se factorise par U i.e. il existe une unique paire (h_1, β_1) avec $h_1 : U \rightarrow \mathcal{Z}$ et $\beta_1 : h_1 \circ \varphi \Rightarrow g \circ v$. En faisant le même raisonnement avec la première ligne du diagramme au lieu de la seconde, l'assertion d'unicité fournit une donnée de descente pour h_1 relativement à u . Il s'ensuit que h_1 se factorise par $\mathcal{Y}$ i.e. il existe une unique paire (h, β_2) avec $h : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $\beta_2 : h \circ u \Rightarrow h_1$. En composant β_2 et β_1 on obtient un 2-isomorphisme $h \circ f \circ v \Rightarrow g \circ v$. Enfin en regardant les préimages par $V' \rightrightarrows U'$ et en utilisant les propriétés de champ de $\mathcal{X}$, on voit que ce 2-isomorphisme se descend en un unique 2-isomorphisme $\beta : h \circ f \Rightarrow g$. Ceci termine la preuve de (1).

2.5 Preuve du point (2) du théorème. On se donne un groupoïde fppf $s, t : \mathcal{R} \rightrightarrows \mathcal{X}$. Nous nous concentrerons sur la difficulté principale de la preuve, qui est de construire le champ quotient $\mathcal{Y}$. Pour ceci, raisonnons par condition nécessaire. Si $\mathcal{Y}$ possède les propriétés requises dans (2), le morphisme $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ est un isomorphisme, i.e. le groupoïde $\mathcal{R} \rightrightarrows \mathcal{X}$ vu comme groupoïde en champs algébriques sur $\mathcal{Y}$ est libre et transitif. Pour tout schéma S'/S , on a donc par changement de base un S' -groupoïde fppf libre et transitif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{R}' & \xrightarrow{s'} \rightrightarrows & \mathcal{X}' & \xrightarrow{\pi'} & S' \\
 \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\
 \mathcal{R} & \xrightarrow{s} \rightrightarrows & \mathcal{X} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Y}
 \end{array}$$

Notons maintenant $\mathcal{R}_s$, resp. $\mathcal{R}_t$, le champ $\mathcal{R}$ lorsqu'il est vu comme un $\mathcal{X}$ -champ via s , resp. via t . De même, notons $\mathcal{R}_s^2$, resp. $\mathcal{R}_t^2$, le champ $\mathcal{R} \times_{s, \mathcal{X}, t} \mathcal{R}$ lorsqu'il est vu comme $\mathcal{X}$ -champ via $s \circ \text{pr}_2$, resp. via $t \circ \text{pr}_1$. La composition dans le groupoïde donne lieu à deux $\mathcal{X}$ -morphisms $c_s = c : \mathcal{R}_s^2 \rightarrow \mathcal{R}_s$ et $c_t = c : \mathcal{R}_t^2 \rightarrow \mathcal{R}_t$. Nous notons avec un « ' » les mêmes objets relatifs au groupoïde obtenu après changement de base. Pour $a \in \{s, t\}$, la transitivité du produit fibré fournit des isomorphismes canoniques $\varphi_a : \mathcal{R}'_a \rightarrow \beta^* \mathcal{R}_a$ et $\psi_a : \mathcal{R}_a'^2 \rightarrow \beta^* \mathcal{R}_a^2$ qui vérifient

$$\varphi_a \circ c'_a = \beta^* c_a \circ \psi_a.$$

Comme un groupoïde est entièrement déterminé par ses applications s, t, c , ces égalités déterminent exactement l'information dans $\mathcal{R}'$ qui provient de $\mathcal{R}$ par le changement de base $\beta : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$. On change maintenant de point de vue et on *définit* $\mathcal{Y}$ comme le champ dont les sections sur S' sont les objets $\mathcal{T}'$ composés d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}' & \rightrightarrows & \mathcal{X}' \longrightarrow S' \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathcal{R} & \rightrightarrows & \mathcal{X} \end{array}$$

et d'isomorphismes $\varphi_a : \mathcal{R}'_a \rightarrow \beta^* \mathcal{R}_a$ et $\psi_a : \mathcal{R}'_a \rightarrow \beta^* \mathcal{R}_a$ pour $a \in \{s, t\}$, tels que :

- (a) $\mathcal{X}'$ est un S' -champ algébrique fppf arbitraire,
- (b) $\mathcal{R}' \rightrightarrows \mathcal{X}'$ est un S' -groupoïde fppf libre et transitif,
- (c) $\varphi_a \circ c'_a = \beta^* c_a \circ \psi_a$ pour $a \in \{s, t\}$.

Les morphismes entre deux objets $\mathcal{T}'_1$ et $\mathcal{T}'_2$ sont les diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}'_1 & \rightrightarrows & \mathcal{X}'_1 & & \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & \searrow \beta_1 & \\ & & & & \mathcal{X} \\ \mathcal{R}'_2 & \rightrightarrows & \mathcal{X}'_2 & \nearrow \beta_2 & \end{array}$$

satisfaisant les conditions de compatibilité évidente aux morphismes de structure des groupoïdes et aux autres données $\varphi_{a,i}, \psi_{a,i}$ pour $a \in \{s, t\}$ et $i \in \{1, 2\}$.

Nous devons montrer que $\mathcal{Y}$ est algébrique. D'après la définition d'un morphisme de groupoïdes, dans le diagramme ci-dessus le morphisme μ est déterminé par λ . On voit ainsi que la fibre de $\Delta_{\mathcal{Y}/S}$ au point $(\mathcal{T}'_1, \mathcal{T}'_2)$ considéré, i.e. le S' -champ $\text{Isom}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{T}'_1, \mathcal{T}'_2)$, est une sous-catégorie du S' -champ $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$. Utilisant l'hypothèse que le stabilisateur du groupoïde $\mathcal{R} \rightrightarrows \mathcal{X}$ est représentable, on voit que $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$ est représentable par un S' -espace algébrique, et la fibre de $\Delta_{\mathcal{Y}/S}$ au point considéré en est un sous-espace ; ici, nous omettons certains calculs un peu pénibles mais qui ne présentent pas de difficulté. Ainsi $\Delta_{\mathcal{Y}/S}$ est représentable. L'algébricité de $\mathcal{Y}$ sera acquise une fois que l'on aura construit le morphisme de quotient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et montré qu'il est fppf. Pour construire f , pour tout point $v : S' \rightarrow \mathcal{X}$ nous devons construire un point $f(v) : S' \rightarrow \mathcal{Y}$. Considérons le produit fibré $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \times_{s, \mathcal{X}, v} S'$, qui est l'orbite du point v sous le groupoïde, et notons $w : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ la projection. Le groupoïde trivial $\mathcal{R}' \times_{S'} \mathcal{R}' \rightrightarrows \mathcal{R}'$ s'insère dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}' \times_{S'} \mathcal{R}' & \rightrightarrows & \mathcal{R}' \longrightarrow S' \\ w \circ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R} & \rightrightarrows & \mathcal{X} \end{array}$$

qui définit le point $f(v) \in \mathcal{Y}(S')$ désiré. Il est clair que le morphisme f est fppf, car sa fibre en un objet $\mathcal{T}'$ comme ci-dessus est représentable par le S' -champ $\mathcal{X}'$ qui est fppf par construction.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}' & \xrightleftharpoons[t']{s'} & \mathcal{X}' & \xrightarrow{\varphi} & S' \\
\downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u \\
\mathcal{R} & \xrightleftharpoons[t]{s} & \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\
& & & \searrow q & \\
& & & & \mathcal{Z}
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \text{---} h \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

3 Quotients étales d'un champ et composantes connexes

3.1 Composantes connexes ouvertes. Soit S un schéma ou un espace algébrique, et $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique plat et de présentation finie. On appelle *composante connexe ouverte* de $\mathcal{X}/S$ (en abrégé c.c.o.) un sous-champ ouvert $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$, plat et de présentation finie sur S , tel que pour tout point géométrique $\bar{s} \in S$, la fibre $\mathcal{C}_{\bar{s}} \subset \mathcal{X}_{\bar{s}}$ est une composante connexe. On note $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ le foncteur sur la catégorie des S -schémas défini par :

On peut définir d'une manière analogue la notion de *composante irréductible ouverte* (en abrégé c.i.o.) et le foncteur associé $\text{Irr}(\mathcal{X}/S)$. La définition même de $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ et $\text{Irr}(\mathcal{X}/S)$ en fait des faisceaux fppf sur S , à diagonale ouverte quasi-compacte, et qui en tant que foncteurs sont formellement étales, c'est-à-dire avec une théorie de déformations

nulle. On montre par ailleurs que $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est toujours représentable par un espace algébrique étale quasi-compact *quitte* à se restreindre à une stratification finie S^* de S par des parties localement fermées (voir [8], lemmes 2.1.2, 2.1.3).

Pour montrer que $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est représentable, on a besoin de construire des c.c.o. Le cas le plus simple où ceci est possible est le cas de $\mathcal{X} \rightarrow S$ à fibres géométriquement réduites : la construction schématique classique de la composante connexe ouverte le long d'une section se généralise alors (voir [8] 2.2.1). On a d'ailleurs un résultat similaire pour les composantes irréductibles : on montre qu'il existe un plus grand sous-champ ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ dont les points géométriques n'appartiennent qu'à une composante irréductible de leur fibre, appelé le *lieu unicomposante*, et on construit la composante irréductible ouverte le long d'une section incluse dans le lieu unicomposante (voir [8] 2.2.4). En utilisant les critères de représentabilité d'Artin et le théorème de quotient 2.2, on obtient :

Théorème. *Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique plat, de présentation finie, à fibres géométriquement réduites.*

- (1) *Les foncteurs $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ et $\text{Irr}(\mathcal{X}/S)$ sont représentables par des espaces algébriques étales et quasi-compact sur S .*
- (2) *Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ la relation d'équivalence définie comme sous-catégorie pleine telle que deux points $u, v : T \rightarrow \mathcal{X}$ sont équivalents si et seulement si pour tout point géométrique $t : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow T$, les points $u(t)$ et $v(t)$ sont dans la même composante connexe de $\mathcal{X}_\Omega$. Cette relation est représentable par la c.c.o. de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ le long de la section diagonale. De plus, il existe un morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}/S)$ grâce auquel $\mathcal{X}$ s'identifie à la c.c.o. universelle et $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ au quotient $\mathcal{X}/\mathcal{R}$.*
- (3) *Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ la relation d'équivalence sur le lieu unicomposante, sous-catégorie pleine telle que deux points $u, v : T \rightarrow \mathcal{U}$ sont équivalents si et seulement si pour tout point géométrique $t : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow T$, les points $u(t)$ et $v(t)$ sont dans la même composante irréductible ouverte de $\mathcal{U}_\Omega$. Cette relation est représentable par la c.i.o. de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ le long de la section diagonale. De plus, il existe un morphisme $\mathcal{U} \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{X}/S)$ grâce auquel $\mathcal{U}$ s'identifie à la c.i.o. universelle et $\text{Irr}(\mathcal{X}/S)$ au quotient $\mathcal{U}/\mathcal{S}$.*

Il s'agit de [8] 2.5.2. La description $\pi_0(\mathcal{X}/S) = \mathcal{X}/\mathcal{R}$ permet de montrer que $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est fonctoriel en un sens très fort : toute application S -rationnelle (resp. S -birationnelle) $f : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{Y}$ induit un morphisme (resp. un isomorphisme) $\pi_0(f) : \pi_0(\mathcal{X}/S) \rightarrow \pi_0(\mathcal{Y}/S)$.

3.2 Composantes connexes ouvertes dans le cas propre. Lorsque $\mathcal{X} \rightarrow S$ est propre, plat et de présentation finie, on peut dire un peu plus sur $\pi_0(\mathcal{X}/S)$. Pour tout S -champ algébrique $\mathcal{X}$ et tout point $s \in S$, on note $n_{\mathcal{X}}(s)$ le nombre de composantes connexes de la fibre géométrique $\mathcal{X}_{\bar{s}}$. Le cas (ii) de l'énoncé ci-dessous m'a été signalé par Laurent Fargues ; il donne un autre cas utile de représentabilité qui complète les résultats de [8].

Théorème. *Soient S un schéma et $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique propre, plat et de présentation finie. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : (i) $\mathcal{X} \rightarrow S$ est à fibres géométriquement réduites, ou (ii) la fonction $n_{\mathcal{X}}$ est semi-continue supérieure. Alors, on a :*

- (1) Le foncteur $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est représentable par un S -schéma fini étale.
- (2) La description de $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ comme quotient $\mathcal{X}/\mathcal{R}$ donnée dans le théorème de 3.1 est valable sans modification.
- (3) Notons $\mathcal{X} \rightarrow \mathrm{St}(\mathcal{X}/S) \rightarrow S$ la factorisation de Stein. Alors on a une factorisation $\mathrm{St}(\mathcal{X}/S) \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}/S) \rightarrow S$, où $\mathrm{St}(\mathcal{X}/S) \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}/S)$ est un homéomorphisme universel qui est un isomorphisme dans le cas (i).

Preuve : Dans le cas (i), tout est démontré dans [8] 2.5.2 et 3.2.5. Nous ne considérons donc que le cas (ii).

(1) On reprend la preuve du point (i) du théorème 2.5.2 de [8], utilisant les critères d'Artin. Posons $F = \pi_0(\mathcal{X}/S)$. On est ramené comme dans *loc. cit.* à vérifier que pour tout anneau local noethérien complet (R, m, k) , l'application $F(R) \rightarrow F(k)$ est bijective. Soit (R', m', k') une extension locale finie étale de R telle que toutes les c.c.o. de $\mathcal{X}_k$ sont définies sur k' . Soient $\mathcal{X}_{1,k'}, \dots, \mathcal{X}_{n,k'}$ les c.c.o. de $\mathcal{X}_{k'}$. D'après [EGA] III, prop. 5.5.1, il existe des sous-champs ouverts et fermés $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ de $\mathcal{X}_{R'}$ tels que $\mathcal{X}_i \otimes k' = \mathcal{X}_{i,k'}$ pour tout i . (La preuve de ce résultat de [EGA] utilise le théorème d'existence des faisceaux, établi pour les champs algébriques dans [Ol], thm. 1.4.) Comme $n_{\mathcal{X}}$ est semi-continue supérieure, on en déduit que c'est une fonction constante sur $\mathrm{Spec}(R')$. Ainsi $F(R') \rightarrow F(k')$ est une bijection, qui se restreint en une bijection $F(R) \rightarrow F(k)$ pour les composantes connexes ouvertes définies sur R . Ceci achève la preuve du fait que $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est représentable par un espace algébrique. De plus, on voit par le lemme 3.2.2 de [8] que les c.c.o. de $\mathcal{X}$ sont propres sur la base donc fermées dans $\mathcal{X}$. Il s'ensuit que $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est séparé, c'est donc un schéma par [Kn] II.6.17, et comme $n_{\mathcal{X}}$ est localement constante, il est fini.

(2) La preuve du point (ii) du théorème 2.5.2 de [8] s'applique mot pour mot.

(3) Comme $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ est affine sur S , le morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}/S)$ se factorise à travers l'enveloppe affine de $\mathcal{X} \rightarrow S$ qui n'est rien d'autre que $\mathrm{St}(\mathcal{X}/S)$. Il est clair que le morphisme $\mathrm{St}(\mathcal{X}/S) \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}/S)$ est fini, surjectif et radiciel, donc un homéomorphisme universel. $\square$

3.3 Composantes connexes fermées. On conserve un S -champ algébrique plat (cette hypothèse ne sera pas cruciale ici) et de présentation finie $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X} \rightarrow S$ n'est ni à fibres géométriquement réduites, ni propre avec $n_{\mathcal{X}}$ localement constante, le faisceau $\pi_0(\mathcal{X}/S)$ n'est pas représentable en général. Une alternative pertinente lorsque $\mathcal{X} \rightarrow S$ est propre est de considérer des *composantes connexes fermées* (en abrégé c.c.f.), qui sont par définition les sous-champs fermés $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$, plats et de présentation finie sur S , tels que pour tout point géométrique $\bar{s} \in S$, la fibre $\mathcal{C}_{\bar{s}} \subset \mathcal{X}_{\bar{s}}$ est supportée par une composante connexe. On dit qu'une c.c.f. est *réduite* si ses fibres sont géométriquement réduites. On note $\pi_0(\mathcal{X}/S)^{\mathrm{f}}$ le foncteur des c.c.f. et $\pi_0(\mathcal{X}/S)^{\mathrm{r}}$ le sous-foncteur des c.c.f. réduites. On montre :

Théorème. Soit $\mathcal{X}$ un S -champ algébrique propre et de présentation finie. Alors, le foncteur $\pi_0(\mathcal{X}/S)^{\mathrm{f}}$ est représentable par un S -espace algébrique formel localement de présentation finie et séparé. Le foncteur $\pi_0(\mathcal{X}/S)^{\mathrm{r}}$ est représentable par un S -schéma formel quasi-fini et séparé.

Ce résultat est [8] 3.2.1. Pour la preuve, on s'appuie sur le « schéma de Hilbert » de $\mathcal{X}/S$ – qui est en fait un espace algébrique. Hors du cas propre, il est moins évident d'obtenir la représentabilité de ces foncteurs. Voici un cas favorable : si $\mathcal{X}$ est un S -espace algébrique quasi-fini, on a un isomorphisme canonique $\pi_0(\mathcal{X}/S)^\tau = \mathcal{X}$. En effet, si $\mathcal{C}$ est une c.c.f. réduite de $\mathcal{X}/S$, alors ses fibres géométriques sont des points réduits et il s'ensuit que $\mathcal{C} \rightarrow S$ est étale de degré 1, donc une section de $\mathcal{X}/S$. Ce cas est mentionné dans 3.4 ci-dessous.

3.4 Application à la suite connexe-étale des schémas en groupes. Soit $\mathcal{E}t/S$ la catégorie des S -espaces algébriques en groupes étales. Pour tout S -schéma (ou S -espace) en groupes plat et de présentation finie G , définissons un foncteur covariant $F : \mathcal{E}t/S \rightarrow \mathbf{Ens}$ par la formule :

$$F(H) = \mathrm{Hom}_{S\text{-Gr}}(G, H).$$

Si ce foncteur est représentable, on note $G^{\mathrm{ét}}$ l'espace algébrique qui le représente et on l'appelle le *plus grand quotient étale* de G . C'est un fait classique que si S est spectre d'un anneau local hensélien et G est propre ou affine, alors il existe un plus grand quotient étale : c'est le spectre de la plus grande sous-algèbre étale de l'anneau des fonctions globales de G . Le noyau $G^0 = \ker(G \rightarrow G^{\mathrm{ét}})$ est la composante connexe de l'unité de la fibre spéciale, ouverte et fermée dans G , et l'on dispose de la *suite exacte connexe-étale*

$$1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow G^{\mathrm{ét}} \longrightarrow 1.$$

En pensant à l'exemple du schéma en groupes μ_p sur l'anneau des entiers p -adiques $\mathbb{Z}_p$, pour lequel $\mu_p^{\mathrm{ét}} = 1$, on notera que la formation de ces objets ne commute pas au changement d'anneau hensélien de base (même fini plat), et que G^0 n'est pas nécessairement égal à la composante connexe de G le long de la section unité (i.e. la réunion des composantes connexes des unités des fibres).

Nos résultats ci-dessus permettent d'obtenir une telle suite exacte sur une base S quelconque. On doit ajouter quelques hypothèses, mais en contrepartie les propriétés de la suite exacte sont meilleures. Précisément, soit G un S -schéma (ou S -espace) en groupes plat et de présentation finie, et supposons l'une des deux hypothèses suivantes vérifiée :

- (i) G est lisse sur S ,
- (ii) G est propre sur S , et la fonction n_G est semi-continue supérieurement.

Alors nos résultats précédents montrent que la composante connexe de G le long de la section neutre est un sous-espace en groupes ouvert distingué G^0 de G et que le foncteur $G^{\mathrm{ét}} := \pi_0(G/S)$ est représentable. De plus $G^{\mathrm{ét}}$ est un S -espace en groupes, car π_0 commute au produit. On obtient la suite connexe-étale $1 \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow G^{\mathrm{ét}} \rightarrow 1$ dans laquelle la formation de tous les termes commute au changement de base arbitraire sur S .

On notera que sur la base $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, le schéma en groupes $G = \mu_{p,S}$ ne vérifie aucune des hypothèses (i) et (ii). Pour ce groupe, le schéma des c.c.f. réduites est $\pi_0(G/S)^\tau = G$. Il s'insère dans une suite exacte naturelle $1 \rightarrow \ker \rightarrow G \rightarrow \pi_0(G/S)^\tau \rightarrow 1$, mais pas du bon côté, si l'on compare avec la suite connexe-étale définie auparavant dans le cas d'une base hensélienne...

3.5 Application aux espaces de modules de courbes. La motivation principale de mon travail sur les familles de composantes était de répondre aux questions suivantes posées par Pierre Lochak sur un exemple concret. Soit $\mathcal{M}_g(G) \subset \mathcal{M}_g$ le lieu de l'espace des modules des courbes de genre g composé des courbes qui admettent une action du groupe fini fixé G : comment varient les composantes irréductibles des fibres de $\mathcal{M}_g(G)$ en les différents nombres premiers ? Leur nombre varie-t-il ? Une composante donnée possède-t-elle un « anneau de définition » qui est une extension finie de $\mathbb{Z}$?

Au-dessus de l'ouvert $S = D(30|G|) \subset \text{Spec}(\mathbb{Z})$, on peut répondre assez facilement à ces questions en utilisant la fonctorialité de π_0 et la compactification stable du champ de Hurwitz des courbes avec action de G présentée dans la section 7. La présence du facteur 30 est due à l'existence de courbes avec un excès d'automorphismes : par exemple le facteur 2 est dû aux courbes hyperelliptiques (on renvoie à la preuve de [8], prop. 3.4.1 pour des détails sur ce point). Précisément, notons $\mathcal{H}_{g,G}$ (resp. $\bar{\mathcal{H}}_{g,G}$) le champ classifiant les courbes projectives lisses (resp. stables) $C \rightarrow T$ de genre g munies d'une action fidèle (stable) $\rho : G_T \hookrightarrow \text{Aut}_T(C)$. Le champ $\bar{\mathcal{H}}_{g,G}$ est une S -compactification lisse de $\mathcal{H}_{g,G}$. Le groupe $\text{Aut}(G)$ agit sur ces champs par précomposition sur ρ , et on notera

$$\mathcal{H}'_{g,G} = \mathcal{H}_{g,G} / \text{Aut}(G), \quad \bar{\mathcal{H}}'_{g,G} = \bar{\mathcal{H}}_{g,G} / \text{Aut}(G)$$

les champs quotients. À cause des propriétés du quotient par un groupe fini étale, ces S -champs sont lisses (voir le théorème 2.2 et la remarque (ii) qui le suit) et $\bar{\mathcal{H}}'_{g,G}$ est propre. Pour une courbe générique C de $\mathcal{M}_g(G)$, on a $\text{Aut}(C) = G$ (modulo le petit problème d'excès d'automorphismes évoqué ci-dessus, qui est facilement surmonté) si bien que deux actions de G diffèrent exactement par un élément de $\text{Aut}(G)$. On montre ainsi que $\mathcal{H}'_{g,G} \rightarrow \mathcal{M}_g(G)$ est birationnel. Utilisant la lissité de $\mathcal{H}'_{g,G}$ et la fonctorialité pour les morphismes S -birationnels

$$\mathcal{M}_g(G) \xleftarrow{\alpha} \mathcal{H}'_{g,G} \xrightarrow{\beta} \bar{\mathcal{H}}'_{g,G},$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned} \text{Irr}(\mathcal{M}_g(G)/S) &= \text{Irr}(\mathcal{H}'_{g,G}/S) \quad \text{par fonctorialité pour } \alpha, \\ &= \pi_0(\mathcal{H}'_{g,G}/S) \quad \text{par lissité,} \\ &= \pi_0(\bar{\mathcal{H}}'_{g,G}/S) \quad \text{par fonctorialité pour } \beta. \end{aligned}$$

Le théorème 3.2 montre que ce dernier foncteur est un schéma fini étale.

Une composante irréductible $\mathcal{C}_\Omega$ de $\mathcal{M}_g(G)_\Omega$ sur un corps algébriquement clos Ω détermine un point géométrique $\text{Spec}(\Omega) \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{M}_g(G)/S)$. La composante connexe de ce point est un S -schéma connexe fini étale, spectre d'une extension finie de $\mathbb{Z}[1/(30|G|)]$ qui mérite le nom d'« anneau de définition » de $\mathcal{C}_\Omega$.

Deuxième partie

Modèles de schémas en groupes

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats sur les modèles entiers des schémas en groupes finis sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète $R = (R, K, k, \pi)$. La situation qui présente un intérêt est celle où l'ordre du groupe est divisible par la caractéristique résiduelle $p = \text{car}(k)$. Lorsqu'un tel groupe est donné avec une action sur la fibre générique d'un R -schéma X , on recherche des modèles agissant sur X .

Par exemple, si R contient une racine primitive p -ième de l'unité ζ , considérons l'action du groupe $G_K = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_K$ sur la fibre générique de la droite affine $X = \mathbb{A}_R^1$ donnée par les homothéties ζ^i . Cette action s'étend à X de deux manières naturelles : en une action de $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R$ et en une action de $G' = \mu_{p,R}$. Sur la fibre spéciale, l'action de G_k est triviale alors que l'action de G'_k est fidèle : c'est entre deux tels candidats que l'on doit choisir un modèle, et c'est ici le modèle G' que l'on préfère.

Pour pouvoir considérer des situations où l'on ne dispose pas d'hypothèse de propreté, nous avons introduit l'utilisation de la notion de *pureté*. Il semble que ce soit la condition optimale à imposer aux schémas qui reçoivent une action pour obtenir l'existence de modèles finis et plats agissant fidèlement, comme le groupe G' ci-dessus. Ceci est discuté dans la section 5. En préliminaire, la définition et quelques propriétés des schémas purs sont présentées dans la section 4. Enfin, pour disposer d'exemples intéressants et car il s'agit d'un groupe parmi les plus importants en arithmétique et en géométrie, nous nous penchons sur l'étude particulière des modèles du schéma en groupes des racines p^n -ièmes de l'unité, dans la section 6.

4 Schémas purs

La notion de *pureté* des morphismes de schémas a été introduite par M. Raynaud dans sa thèse, dans le but d'obtenir des critères de platitude cohomologique sous des hypothèses plus faibles que la propreté (voir [R], notamment II.2.11 et III.1.4). Par définition, un morphisme localement de type fini $f : X \rightarrow S$ est *pur* si et seulement s'il l'est en les hensélisés de tous les points de S , de sorte qu'il ne nous reste qu'à formuler :

Définition. Soit S un schéma local hensélien. On dit qu'un morphisme localement de type fini $f : X \rightarrow S$ est *pur* si l'adhérence de tout point $x \in X$ associé dans sa fibre X_s ($s = f(x)$) rencontre la fibre fermée.

La définition s'étend aux champs algébriques ([8], Annexe B). Un morphisme propre, ou un morphisme fppf à fibres géométriquement irréductibles sans composantes immergées, sont purs. La pureté a été exploitée ensuite par Raynaud et Gruson pour décrire en termes géométriques le lien entre platitude et projectivité : une algèbre de présentation finie, plate et pure est projective comme module (voir [RG], 3.3.5). Ce résultat est crucial pour obtenir l'existence de certaines adhérences schématiques au-dessus d'un anneau de valuation discrète dans le travail *Effective models of group schemes* [7] que nous décrirons dans la section 5.

Nous avons eu diverses occasions de démontrer que certaines propriétés classiques des morphismes propres s'étendent aux morphismes purs. Voici trois exemples. Le premier exemple est la fidélité du foncteur de complétion formelle.

Proposition. *Soit A un anneau adique noethérien, I un idéal de définition, $S = \operatorname{Spec}(A)$, $S_0 = \operatorname{Spec}(A/I)$. Soient $X \rightarrow S$ un morphisme de type fini pur, $Y \rightarrow S$ un morphisme de type fini séparé, et soient $\widehat{S}$, $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ les complétés de S, X, Y le long de S_0 , $X_0 = X \times_S S_0$, $Y_0 = Y \times_S S_0$ respectivement. Alors, l'application de complétion formelle*

$$\operatorname{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\widehat{S}}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \quad , \quad f \mapsto \widehat{f}$$

est injective.

Dans le cas propre, c'est démontré dans [EGA], III₁, 5.4.1. Dans le cas pur, c'est démontré dans [7], 2.1.9 (le résultat est énoncé dans le cas où A est un anneau de valuation discrète, mais cette hypothèse restrictive n'est pas utile dans la preuve). Bien sûr, dans le cas propre, la partie difficile, utilisant le théorème d'existence des faisceaux, est la surjection. On n'en a pas d'analogue dans le cas pur. Le second exemple concerne certaines propriétés des fibres des morphismes :

Théorème. *Soit $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme de champs algébriques de présentation finie, plat et pur. Soit $n \geq 1$ un entier. Alors, les ensembles suivants sont ouverts dans $|\mathcal{S}|$:*

- (i) *l'ensemble des $s \in |\mathcal{S}|$ tels que $\mathcal{X}_s$ est géométriquement réduit,*
- (ii) *l'ensemble des $s \in |\mathcal{S}|$ tels que la fibre géométrique $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ est réduite avec au plus n composantes connexes,*
- (iii) *l'ensemble des $s \in |\mathcal{S}|$ tels que la fibre géométrique $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ est réduite avec au plus n composantes irréductibles.*

On se reportera à l'annexe A.1 de [8] pour quelques conventions à propos des fibres des morphismes de champs algébriques. Dans le cas propre, cet énoncé se trouve dans [EGA] IV₃ 12.2 et dans le cas pur, dans [7], th. 2.2.1 et [8], th. B.4. Le troisième exemple concerne la représentabilité de la restriction de Weil de sous-schémas fermés :

Théorème. *Soient $h : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, plat et pur (de schémas) et $Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée. Alors, la restriction de Weil h_*Z est représentable par un sous-schéma fermé de S .*

Dans le cas propre, c'est une conséquence des théorèmes de Grothendieck et Artin sur la représentabilité du foncteur de Hilbert (voir par exemple [Ar], § 6). Dans le cas pur, c'est démontré dans l'annexe B.3 de l'article *Moduli of Galois p -covers in mixed characteristics* [9]. Ce résultat possède un grand nombre de corollaires classiques concernant la représentabilité de divers égaliseurs, noyaux, centralisateurs, normalisateurs, etc.

5 Modèles effectifs de schémas en groupes finis et plats

Soit $R = (R, K, k, \pi)$ un anneau de valuation discrète de caractéristique résiduelle p . On sait que tout revêtement $f_K : Y_K \rightarrow X_K$ entre K -courbes projectives, lisses et géométriquement connexes, s'étend après une extension finie éventuelle de K en un morphisme entre courbes semi-stables $f : X \rightarrow Y$. Si f_K est galoisien de groupe G , on peut prendre X stable, munie d'une action de G , et $Y = X/G$. Lorsque p divise l'ordre de G , de l'inséparabilité apparaît inévitablement dans certaines composantes de la fibre spéciale de f , et l'on voudrait avoir un contrôle dessus. Lorsque G est cyclique d'ordre p , un calcul local facile permet de voir qu'au-dessus des composantes où il est inséparable, le morphisme f_k est génériquement un torseur sous l'un des groupes μ_p ou α_p . Dans sa thèse [He], Henrio a caractérisé les fibres spéciales $f_k : X_k \rightarrow Y_k$ ainsi obtenues en termes de la donnée essentiellement combinatoire de ces torseurs (représentés par des formes différentielles logarithmiques ou exactes sur les composantes), donnée appelée *arbre de Hurwitz*.

Lorsque la valuation p -adique de $|G|$ est au moins égale à 2, la situation est beaucoup moins simple. Considérons le point générique ξ d'une composante irréductible de X_k . Il n'est pas clair a priori qu'il existe un schéma en groupes naturel G' agissant fidèlement au voisinage de ξ (mais on va montrer que c'est vrai), et que le morphisme f_k devient localement un torseur sous ce groupe (ceci, en revanche, n'est pas toujours vrai). Si l'on enlève de X les composantes irréductibles de X_k dont les points génériques ne sont pas dans la G -orbite de ξ , on obtient un ouvert X' qui n'est pas propre, mais est *pur* sur R . Pour montrer l'existence du groupe G' agissant fidèlement sur X' , appelé *modèle effectif*, nous avons établi le résultat général suivant, voir l'article *Effective models of group schemes* [7], th. A ou th. 4.3.5.

Théorème. *Soit X un R -schéma localement de type fini, séparé, plat et pur. Soit G un schéma en groupes fini plat agissant sur X , fidèlement sur la fibre générique. Alors, l'image schématique de G dans $\text{Aut}_R(X)$ est représentable par un schéma en groupes fini plat G' .*

La force de ce résultat réside dans le fait qu'en l'absence de propreté, le faisceau $\text{Aut}_R(X)$ n'est pas représentable par un schéma ou un espace algébrique a priori. On sait néanmoins prendre des adhérences et des images schématiques dedans, ce qui donne sens à l'énoncé. Notons aussi qu'on établit dans [7] des généralisations (par exemple au cas d'un groupe G de type fini plus général, dans le cas X affine) et des variantes (cas des schémas formels) dont nous ne parlerons pas ici.

L'un des arguments principaux de la preuve est une propriété d'amalgame des sous-schémas finis plats d'un schéma pur (voir [7], 3.2.5 et 3.2.6).

(3) Une construction d'arbres de Hurwitz pour un groupe fini G quelconque a été proposée par L. H. Brewis et S. Wewers dans [BW]. Elle leur permet de trouver de nouvelles obstructions au relèvement des actions de caractéristique p en caractéristique 0. Cependant, ces arbres ne contiennent pas de donnée différentielle analogue aux formes exactes ou logarithmiques de Henrio, c'est-à-dire d'information qui renseigne sur la dégénérescence du groupe. Il serait intéressant d'enrichir leurs arbres par la donnée d'information sur les modèles effectifs locaux du groupe, et de les utiliser pour étudier le problème de relèvement des actions.

6 Modèles et suites exactes de type Kummer

L'étude des dégénérescences de revêtements galoisiens, comme dans la section précédente, met sur le devant de la scène les modèles entiers du groupe de Galois. Dans cette section, notre objectif principal est d'expliquer notre approche pour étudier les modèles finis plats du groupe μ_{p^n} des racines p^n -ièmes de l'unité, sur un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$.

Auparavant, insistons sur notre point de vue. Notre intérêt pour un schéma en groupes fini plat $G \rightarrow S$ vient largement de l'intérêt pour les revêtements dont il est le groupe de structure. Lorsque c'est possible, on souhaite donc accompagner la connaissance du groupe d'une description « explicite » des revêtements, les exemples types d'inspiration étant fournis par la théorie de Kummer pour le groupe μ_n et la théorie d'Artin-Schreier-Witt pour le groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ en caractéristique p . Étant donné un schéma en groupes fini et plat $G \rightarrow S$, on cherche donc à le réaliser comme noyau d'une isogénie entre groupes affines lisses. À ce propos, on notera que dans le cas commutatif, la résolution par des schémas abéliens fournie par le résultat de plongement de Raynaud [BBM] 3.1.1, ou la « résolution lisse standard » par des groupes affines lisses de Bégueri [Be] 2.2.1, ne semblent pas se prêter aisément aux calculs que nous avons en vue.

6.1 Suites de type Kummer pour les schémas en groupes d'ordre p . Soient S un schéma et $G \rightarrow S$ un schéma en groupes fini localement libre de degré p . Sous une hypothèse assez faible, on parvient à mettre G dans une suite exacte du type de celles décrites précédemment. Pour énoncer plus précisément ce résultat, nous utilisons la notion d'*ensemble complet de sections* (*full set of sections*) pour laquelle nous renvoyons à Katz-Mazur [KM] 1.8 ou à [9] 1.1. Disons qu'un morphisme de schémas en groupes $\gamma : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S \rightarrow G$ est un *générateur* si les $\gamma(i)$, $0 \leq i \leq p-1$, forment un ensemble complet de sections. Par exemple, le morphisme trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S \rightarrow \mu_{p,S}$ est un générateur si S est de caractéristique p . Disons qu'un morphisme $\kappa : G \rightarrow \mu_{p,S}$ est un *cogénérateur* si le morphisme dual de Cartier $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S \rightarrow G^\vee$ est un générateur.

Théorème. *Soit S un schéma et $G \rightarrow S$ un schéma en groupes fini localement libre de degré p . Soit $\kappa : G \rightarrow \mu_{p,S}$ un cogénérateur. Alors κ s'insère canoniquement dans un diagramme commutatif à lignes exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\varphi_\kappa} & \mathcal{G}' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mu_{p,S} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,S} & \xrightarrow{p} & \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $\varphi_\kappa : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ est une isogénie entre S -schémas en groupes affines lisses de dimension 1 à fibres géométriquement connexes.

Ce résultat est l'objet de l'annexe A de l'article *Moduli of Galois p -covers in mixed characteristics* [9]. La preuve consiste à construire certains groupes d'ordre p notés $H_{\lambda,\mu}^M$ qui sont par définition noyaux de certaines isogénies, et à établir une correspondance entre les triplets de paramètres (M, λ, μ) et les triplets (L, a, b) de la classification de Tate-Oort, où $G = G_{a,b}^L$. Les groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont en fait très explicites : ce sont des variantes globales des groupes $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ de Sekiguchi, Oort et Suwa [SOS]. Enfin notons que l'hypothèse d'existence d'un cogénérateur est faible (elle est toujours satisfaite après une extension finie localement libre de degré $p - 1$ de la base), mais nécessaire : par exemple, si $p > 3$ et S est le spectre du corps $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ des racines $(p - 1)$ -ièmes de l'unité, alors le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lui-même ne se plonge pas dans un groupe affine lisse de dimension 1. (Noter que $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ n'est rien d'autre que $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ où Λ est l'anneau de Tate-Oort, voir [TO].)

6.2 Suites de type Kummer pour les modèles de μ_{p^n} . Soit R un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, de corps de fractions K . Dans l'article *Models of group schemes of roots of unity* [11] en collaboration avec A. Mézard et D. Tossici, nous construisons pour tout entier $n \geq 1$ une famille de R -modèles du schéma en groupes $\mu_{p^n, K}$ des racines p^n -ièmes de l'unité, appelés *groupes de Kummer*. Ceux-ci sont définis comme noyaux de certaines isogénies entre des groupes affines lisses de dimension n . Nous pensons que tous les modèles de $\mu_{p^n, K}$ sont de Kummer, au moins si R est complet à corps résiduel parfait. Il n'est pas facile d'extraire de ce travail un énoncé qui résume le tout ; nous préférons décrire brièvement les trois étapes principales de notre travail.

Première étape. Tout d'abord, nous donnons la traduction concrète, dans le cas des modèles de $\mu_{p^n, K}$, de la classification de Breuil et Kisin (issue de [Br] et [Ki]) des p -groupes commutatifs finis plats sur R en termes de modules semi-linéaires. Cette classification s'énonce avec k parfait et R extension complète totalement ramifiée de l'anneau de vecteurs de Witt $W(k)$. Le résultat est une classification des modèles en termes de certaines matrices à coefficients dans l'anneau de polynômes $k[u]$, qui doit être vu comme sous-anneau de l'anneau de valuation discrète $k[[u]]$. Il s'agit du théorème 4.2.2 de [11].

Deuxième étape. Ensuite, nous construisons les groupes de Kummer. Pour cela, nous rappelons la construction due à Sekiguchi et Suwa des *groupes filtrés*, qui sont des groupes affines lisses extensions successives des groupes

$$\mathcal{G}^\lambda = \operatorname{Spec}(R[x, (1 + \lambda x)^{-1}]) = \ker(\mathbb{G}_{m, R} \rightarrow i_* \mathbb{G}_{m, R/\lambda}),$$

où i désigne l'immersion fermée $\operatorname{Spec}(R/\lambda) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ et le noyau est pris dans la catégorie des faisceaux fppf sur le petit site de $\operatorname{Spec}(R)$. (Les groupes $\mathcal{G}^\lambda$ sont naturels car ce sont exactement les modèles lisses à fibres connexes de $\mathbb{G}_{m, K}$.) Après avoir décrit dans les parties 4 et 5 de [SeSu] la construction des extensions en question en termes de certaines exponentielles de Artin-Hasse généralisées, Sekiguchi et Suwa ont spécialisé dans les parties 8 et 9 de [SeSu] les paramètres de leur construction pour atteindre leur but :

l'unification des suites exactes de Kummer et d'Artin-Schreier-Witt. Pour construire les groupes de Kummer, au contraire, nous *ne* spécialisons *pas* les paramètres ; il nous faut donc donner les conditions de congruences sur ces paramètres assurant que les morphismes construits sont des isogénies, i.e. que leur noyau est *fini plat*. On obtient ainsi certains modèles finis plats de $\mu_{p^n, K}$, que nous appelons *groupes de Kummer*, en termes de matrices à coefficients dans l'anneau $W(R)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans R . Il s'agit du théorème 7.2.1 de [11]. Signalons que la construction des groupes de Kummer ne nécessite pas que l'anneau de valuation discrète R soit complet à corps résiduel parfait ; on peut en fait l'effectuer sur une base presque quelconque, comme c'est expliqué dans l'article *Sekiguchi-Suwa Theory revisited* [10] (voir notamment le th. 5.2.7).

Troisième étape. Enfin, nous comparons modules de Breuil-Kisin et modèles de Kummer. La comparaison se fait par l'intermédiaire des matrices correspondantes, de part et d'autre. La difficulté principale vient du fait que les matrices du côté des modules de Breuil-Kisin sont à coefficients dans un anneau de caractéristique p alors que les matrices du côté des groupes de Kummer sont à coefficients dans un anneau de caractéristique 0. Une difficulté secondaire est que les matrices du côté de Breuil-Kisin sont en *bijection* avec les modèles de $\mu_{p^n, K}$ alors que les matrices de l'autre côté sont seulement en *surjection* vers les groupes de Kummer. Dit autrement, nous ne savons pas construire une matrice distinguée commode pour définir un groupe de Kummer. Néanmoins, nous proposons une application qui est candidate à mettre en correspondance les ensembles de matrices de part et d'autre. Plus précisément, nous exhibons une application $k[[u]] \rightarrow R$, $c \mapsto c^*$ (non-additive, non-multiplicative) et à toute matrice $A = (a_{ij})$ à coefficients dans $k[[u]]$, nous associons la matrice $A^* = ([a_{ij}^*])$ à coefficients dans $W(R)$ obtenue en prenant les représentants de Teichmüller des a_{ij}^* . L'objectif souhaité est de voir que *A est la matrice d'un module de Breuil-Kisin si et seulement si A^* est la matrice d'un groupe de Kummer*. Nous vérifions ceci pour $n = 2$ (voir [11] 8.2.6), ainsi que pour $n = 3$ (voir [11] 8.3.5) sous une hypothèse portant sur les valuations de certaines différentielles, qui revient à se restreindre à certaines composantes de la k -variété qui tient lieu d'espace de modules pour les modèles de $\mu_{p^n, K}$.

Nous conjecturons que tout modèle de $\mu_{p^n, K}$ est un groupe de Kummer. Initialement, nous pensions pouvoir utiliser les modules de Breuil-Kisin pour obtenir ce résultat. À présent, nous pensons plutôt que nos idées pourraient nous permettre de démontrer la conjecture indépendamment, et de calculer *a posteriori* le module de Breuil-Kisin d'un modèle de $\mu_{p^n, K}$ donné sous forme d'un groupe de Kummer. Ce serait l'un des premiers exemples non triviaux de calcul de modules de Breuil-Kisin.

Troisième partie

Espaces de modules de revêtements

Rappelons la question posée dans l'introduction du mémoire, qui nous motive autant que la carotte motive l'âne : on voudrait comprendre la réduction en p des espaces de modules propres $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{g,G}$ de revêtements galoisiens de courbes. Il est intéressant aussi d'élargir un peu cette question en rappelant pourquoi il est très souhaitable de disposer d'espaces de modules *propres*, c'est-à-dire de *compactifications* pour le champ algébrique $\mathcal{H}_{g,G}$ classifiant les revêtements entre courbes lisses. Sur un corps de base, avoir entre les mains une variété (ou un champ) propre permet de faire de la théorie d'intersection. Sur l'anneau d'entiers d'un corps local, cela permet de se poser la question de la réduction de la variété, supposée lisse : en effet, en l'absence d'autres particularités de la situation comme une loi de groupe, la contrainte de propreté garantit l'unicité de certains modèles de réduction, et donc leur caractère non arbitraire et *in fine* leur utilité. Enfin, sur une base plus générale, compactifier permet d'étudier certains invariants globaux ou locaux des fibres, comme dans la preuve de l'irréductibilité de l'espace de modules des courbes par Deligne et Mumford. Ces trois utilisations de la propreté sont envisagées dans cette partie, et l'ont déjà été un peu dans 3.5.

Il est primordial de remarquer que dans l'étude des revêtements et de leurs espaces de modules, les représentations du groupe G sont omniprésentes :

- via des objets de géométrie différentielle comme les espaces tangents, espaces de formes différentielles, espaces de jets et théorie de la ramification,
- via des objets de topologie algébrique, notamment de cohomologie des faisceaux car celle du complexe cotangent contrôle la structure locale des espaces de modules.

Ceci explique l'importance de la théorie de représentations de G . En toutes les caractéristiques premières à son ordre, le groupe G est semi-simple et sa théorie de représentations est essentiellement la même (voir Serre [Se], 15.5). Il s'ensuit qu'au-dessus de l'anneau $\mathbb{Z}[1/|G|]$, la géométrie des espaces de Hurwitz est essentiellement la même en toutes les caractéristiques résiduelles, ce qui d'ailleurs ne signifie pas qu'il soit toujours facile de le vérifier. On dispose alors d'une compactification par les revêtements de courbes stables. Nos résultats dans ce cas sont résumés dans la section 7. En revanche, en caractéristique $p > 0$ qui divise l'ordre de G , l'existence de bonnes compactifications reste un problème ouvert ; si on parvient à en construire, leur géométrie et leur arithmétique seront nécessairement très différentes de ce qu'il se passe en caractéristique 0. Nos résultats concernant ce cas sont présentés dans la section 8.

7 Groupe de Galois d'ordre inversible sur la base

Dans le texte *Champs de Hurwitz* [4], en collaboration avec J. Bertin, nous présentons une étude complète des champs de Hurwitz classifiant les revêtements de courbes algébriques sous l'hypothèse suivante : l'ordre des groupes de Galois des revêtements ou de leurs clôtures galoisiennes est toujours *inversible* dans le corps de base. Ce sujet a été abordé par d'autres auteurs dont Ekedahl [Ek] ou Abramovich, Corti et Vistoli [ACV] qui le voient comme un cas particulier d'espaces d'applications stables. Notre travail inclut la construction de ces champs, leur compactification, la description combinatoire de leur bord, quelques exemples significatifs dont celui des courbes avec structure de niveau, et quelques calculs d'intersection. Nous ne pouvons ici que donner une vue d'ensemble de ce texte, et une sélection de quelques-uns des résultats principaux. Pour la clarté de la présentation, distinguons trois phases dans le texte [4] : les définitions sur les familles de revêtements ; la construction des champs de Hurwitz et divers exemples ; la géométrie énumérative des champs de Hurwitz.

7.1 Définitions sur les familles de revêtements. Dans les parties 1 à 5, nous présentons des définitions et résultats se base sur les revêtements de courbes lisses ou nodales, leur ramification, leurs familles, leurs déformations. Sur un corps k , l'objet d'étude typique est une courbe algébrique *stable* C au sens de Deligne et Mumford [DeMu], munie de l'action *admissible* d'un groupe fini G , ce qui veut dire que tout élément $g \in G$ qui fixe un point double sans échanger ses deux branches agit sur leurs espaces tangents par des caractères inverses l'un de l'autre. Pour l'essentiel, ces parties rassemblent des choses connues, sauf peut-être pour ce qui concerne deux résultats :

- (1) le fait qu'un nombre fini suffisamment grand des G -représentations m -canoniques $H^0(C, \omega_{C/k}^{\otimes m})$ détermine la ramification de l'action : c'est l'« inversion » de la formule de Chevalley-Weil ([4], th. 3.2.2 et prop. 4.2.5),
- (2) l'étude précise de la collision des points de ramification dans une famille et le rôle des automorphismes qui échangent les branches ([4], th. 4.2.2).

7.2 Construction de champs de Hurwitz et exemples. Dans les parties 6 à 9, nous construisons divers champs de Hurwitz. Il s'agit du cœur de notre travail. Fixons un entier g , un groupe fini G et une donnée de ramification ξ (notion définie dans [4] 2.2.1). Nous montrons que le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ dont les objets sont les familles de courbes stables de genre g munies d'une action fidèle admissible de G avec ramification ξ est un champ algébrique de Deligne-Mumford propre et lisse sur $\mathbb{Z}[1/|G|]$, contenant le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ des courbes lisses comme sous-champ ouvert relativement dense ([4], th. 6.3.1). Il possède un espace modulaire grossier projectif et normal. Si on le souhaite, on peut aussi marquer le diviseur de ramification pour assurer qu'il reste dans le lieu lisse. On ramène un grand nombre de constructions connues à celle de $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$:

- (1) *revêtements non galoisiens* : pour tout revêtement de courbes lisses $C \rightarrow D$, le triplet $m = (G, H, \xi)$ composé des groupes de Galois $G = \text{Gal}(Z/D)$, $H = \text{Gal}(Z/C)$ et de la

donnée de ramification de G sur Z , est indépendant du choix de la clôture galoisienne $Z \rightarrow C$; on l'appelle le *type de monodromie*. On pose

$$\text{Aut}(m) = \{\theta \in \text{Aut}(G), \theta(H) = H \text{ et } \theta(\xi) = \xi\}$$

et $\Delta(m) = \text{Aut}(m)/H$, où la donnée de ramification $\theta(\xi)$ possède une définition évidente que l'on trouvera après la proposition 2.2.3 de [4]. On montre que le champ $\mathcal{H}_{g,g',m}$ classifiant les revêtements de monodromie fixée égale à m entre courbes lisses de genres g et g' est isomorphe au champ quotient $\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\Delta(m)$ ([4], th. 6.6.6). Il possède donc une compactification lisse naturelle $\bar{\mathcal{H}}_{g,g',m} := \bar{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}/\Delta(m)$.

(2) *structures de niveau* : on montre que le champ ${}_G\mathcal{M}_g^0$ classifiant les courbes lisses munies d'une structure de Teichmüller de niveau G (défini dans Deligne et Mumford [DeMu], 5.7, 5.8) est isomorphe au champ rigidifié $\mathcal{H}_{h,G,0} // Z(G)$, où h est défini par l'égalité $h - 1 = |G|(g - 1)$ et $Z(G)$ désigne le centre de G . (Le procédé de rigidification désigné par le symbole « $//$ » est décrit dans [ACV], 5.1.1). Il possède donc une compactification lisse naturelle ${}_G\bar{\mathcal{M}}_g := \bar{\mathcal{H}}_{h,G,0} // Z(G)$ ([4], th. 8.2.2 et rem. 8.2.3). Cette compactification possède un morphisme propre birationnel (non représentable en général) vers la normalisation ${}_G\mathcal{M}_g$ (non lisse en général) définie par Deligne et Mumford.

(3) *courbes avec symétries* : le sous-champ $\mathcal{M}_g(G) \subset \mathcal{M}_g$ composé des courbes qui admettent une action du groupe G (étudié entre autres par González-Díez et Harvey [GDH]) est un fermé en général singulier et réductible. On montre que sa normalisation est isomorphe à une somme disjointe de champs de la forme $\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\text{Aut}(G)$, de sorte qu'elle est lisse (voir une description plus précise dans [8] 3.4.1). L'adhérence $\bar{\mathcal{M}}_g(G)$ de $\mathcal{M}_g(G)$ dans $\bar{\mathcal{M}}_g$ possède donc une désingularisation propre naturelle, somme disjointe de champs de la forme $\bar{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}/\text{Aut}(G)$. Le foncteur des composantes irréductibles de $\mathcal{M}_g(G)$ est un schéma fini étale sur $\mathbb{Z}[1/(30|G|)]$, comme nous l'avons rappelé dans 3.5.

7.3 Géométrie énumérative des champs de Hurwitz. Dans la partie 10, suivant la stratégie initiée par Mumford [Mu], nous étudions les classes tautologiques dans l'anneau de Chow du champ de Hurwitz $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ et les relations tautologiques entre elles. Ici, un rôle crucial est joué par la correspondance

$$\bar{\mathcal{M}}_{g',b} \longleftarrow \bar{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,r}$$

où la flèche de gauche envoie une courbe avec action (C, G) sur la courbe quotient C/G marquée par les points de branchement, et la flèche de droite envoie (C, G) sur la courbe C marquée par les points de ramification. À cause de l'action du groupe G , on obtient de très nombreuses classes tautologiques en considérant les composantes isotypiques des préimages des fibrés tautologiques vivant sur $\bar{\mathcal{M}}_{g,r}$. Citons simplement deux résultats.

(1) Dans le groupe de Picard, la relation de Riemann-Hurwitz donne une expression du faisceau canonique de la courbe universelle $\bar{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ en termes de la préimage du faisceau canonique de la courbe universelle $\bar{\mathcal{C}}_{g',b}$ et de certaines classes provenant de la ramification. En prenant des puissances de cette relation dans l'anneau de Chow, on obtient des formules de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur qui donnent des expressions des classes κ (images

directes des classes de Chern du fibré de Hodge sur la courbe universelle) provenant de $\bar{\mathcal{M}}_{g,r}$ en termes de celles provenant de $\bar{\mathcal{M}}_{g',b}$ et de classes provenant du faisceau normal le long de la ramification ([4], th. 10.3.4).

(2) En appliquant le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, on calcule le caractère de Chern du fibré défini par le lieu de branchement des revêtements sur la courbe universelle de genre g' (ou plutôt sur une modification de celle-ci où le diviseur de branchement devient de Cartier). Le résultat exprime ce caractère en fonction des classes ψ (définies par les morphismes d'évaluation en les sections marquées) et des classes κ . Nous renvoyons à [4], th. 10.4.1 pour un énoncé précis.

8 Groupe de Galois d'ordre non inversible sur la base

8.1 Un exemple : les courbes de Potts. En genre $g \geq 2$, on dispose de peu d'exemples de champs de revêtements galoisiens de courbes dont l'étude soit faite avec soin en les caractéristiques qui divisent l'ordre du groupe de Galois. Il n'est donc pas inutile de rappeler que dans ma thèse, j'avais regardé l'exemple de certains revêtements lisses de genre $p - 1$ de la droite projective, galoisiens de groupe diédral $G = \mathbb{D}_p$, appelés *courbes de Potts*. Il est démontré dans [1] que :

- (1) le champ des courbes de Potts est un champ de Deligne-Mumford de dimension 1,
- (2) la formation de son espace de modules commute au passage à la fibre en p ,
- (3) la fibre en p est une gerbe étale sur son espace de modules.

8.2 Le champ des p -torseurs stables. Soit $R = (R, K, k, \pi)$ un anneau de valuation discrète. Nous avons mentionné dans la section 5 le fait que tout torseur $Y_K \rightarrow X_K$ sous le groupe $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, disons en caractéristique 0 pour fixer les idées, peut être étendu sur un ouvert non vide au-dessus de R en un torseur $Y \rightarrow X$ sous l'un des trois groupes d'ordre p , c'est-à-dire $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, μ_p ou α_p . Cependant, si par exemple X_K et Y_K sont propres et qu'on insiste pour les étendre en des R -schémas propres, on ne peut en général étendre la structure de torseur qu'au voisinage des points génériques de la fibre spéciale. Une condition nécessaire, qu'il n'est pas toujours possible de réaliser, est de pouvoir trouver un R -morphisme $Y \rightarrow X$ plat.

Si l'on part d'un torseur $Y_K \rightarrow X_K$ dont la base et l'espace total sont des courbes lisses, on peut l'étendre en choisissant le modèle stable Y de Y_K et le quotient $X = Y/G$ (après extension finie éventuelle de la base). Ce morphisme n'est pas plat a priori, mais une observation cruciale due à D. Abramovich est que l'on peut modifier la courbe X en une *courbe tordue* $\mathcal{X} \rightarrow X$ d'une unique manière pour que $Y \rightarrow X$ se relève en un morphisme G -invariant et *plat*. (On renvoie à [AOV], section 2 pour la définition d'une courbe tordue ; disons simplement que c'est un champ d'Artin de dimension 1 avec stabilisateurs finis linéairement réductifs.) On montre alors que l'image schématique du morphisme $G_{\mathcal{X}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$ est un $\mathcal{X}$ -schéma en groupes $\mathcal{G}$ fini et plat de degré p , et que $Y \rightarrow \mathcal{X}$ est un torseur sous $\mathcal{G}$. De plus, on vérifie que le morphisme $\gamma : G_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{G}$ est un *générateur* au sens où les p sections $\gamma(i)$, $0 \leq i \leq p - 1$, forment un ensemble complet de sections de $\mathcal{G}$ (voir [KM] 1.8 et la section 6.1).

En incluant des points marqués, on est amené aux définitions suivantes. On fixe des entiers $g, h, n \geq 0$ tels que $2g - 2 + n > 0$. Sur un schéma de base S , on appelle *p-torseur stable n-marqué* un triplet composé de

- (i) une courbe tordue n -marquée $(\mathcal{X}, \{\Sigma_i\}_{1 \leq i \leq n})$ de genre h ,
- (ii) une courbe stable marquée par des diviseurs étales $(Y, \{P_i\}_{1 \leq i \leq n})$,
- (iii) un $\mathcal{X}$ -schéma en groupes $\mathcal{G}$ fini localement libre de degré p muni d'un générateur $\gamma : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{G}$,

tels que $Y \rightarrow \mathcal{X}$ est un $\mathcal{G}$ -torseur et $P_i = \Sigma_i \times_{\mathcal{X}} Y$ pour tout i . La catégorie des p -torseurs stables n -marqués (de genres g et h) forme un $\mathbb{Z}$ -champ que nous notons $ST_{p,g,h,n}$. Dans un p -torseur stable, les P_i sont de degré 1 ou p au-dessus de S . Ceux qui sont de degré 1 (i.e. des sections) correspondent à des points de ramification du morphisme $Y \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow X$ où $\mathcal{X} \rightarrow X$ est l'espace de modules grossier, et leur nombre m est déterminé par la formule de Riemann-Hurwitz qui affirme que $2g - 2 = p(2h - 2) + m(p - 1)$. Les autres correspondent à des points marqués, en nombre $n - m$. Dans l'article [9], en collaboration avec D. Abramovich, nous montrons le résultat suivant.

Théorème. *Le champ $ST_{p,g,h,n}$ des p -torseurs stables n -marqués est un champ de Deligne-Mumford propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.*

Les considérations introductives ont fourni une esquisse de preuve du critère valuatif de propreté pour $ST_{p,g,h,n}$, pour les K -points qui se factorisent par le lieu des p -torseurs lisses. Ceci ne suffit pas pour démontrer la propreté car ceux-ci ne sont a priori pas denses, et plus de travail est nécessaire dans l'article.

8.3 Le problème de la réduction en p du champ de Hurwitz. Au-dessus de $\mathbb{Z}[1/p]$, comparons le champ $ST_{p,g,h,n} \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ avec les champs de Hurwitz de la section 7. Dans le cas du groupe $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la donnée de ramification se réduit à la donnée de l'entier m égal au nombre de points de ramification. Il n'est pas difficile de voir que le champ $ST_{p,g,h,n} \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ est isomorphe au champ de Hurwitz $\bar{\mathcal{H}}_{g,G,m,d}$ des courbes stables de genre g munies d'une action admissible de G ramifiée en m points, avec $d = n - m$ points marqués. Pour apporter une réponse à la question de la réduction en p des champs de Hurwitz $\bar{\mathcal{H}}_{g,G,m,d}$, il convient maintenant d'étudier plus en détail la fibre spéciale de $ST_{p,g,h,n}$. La théorie de déformations peut être découpée en étapes : d'abord déformer la courbe tordue $\mathcal{X}$ (ce problème est non obstrué), puis le schéma en groupes $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$, et enfin la courbe stable $Y \rightarrow \mathcal{X}$ comme toseur. Cela fera l'objet d'un prochain travail ; nous espérons par exemple identifier dans la fibre en p des composantes sympathiques, celles contenant les courbes lisses, etc.

8.4 Groupes de Galois d'ordre divisible par p^2 . Pour conclure, nous voulons signaler que le cas des revêtements cycliques d'ordre p est particulièrement simple du fait que le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne possède pas de sous-groupe non trivial. En ce qui concerne les revêtements de groupe $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ par exemple, les choses se compliquent significativement. Dans la situation de 8.2, il est plausible que l'image schématique du morphisme $G_{\mathcal{X}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{X}}(Y)$ soit encore un $\mathcal{X}$ -schéma en groupes $\mathcal{G}$ fini et plat de degré p^2 . En revanche, on dispose

de nombreux exemples qui montrent que $Y \rightarrow \mathcal{X}$ n'est pas un torseur sous $\mathcal{G}$ en général (nous en avons mentionné dans la section 5).

Par ailleurs, on pourrait espérer que sur la fibre spéciale, le groupe $\mathcal{G}_k$ est constant au moins sur des ouverts, comme c'est le cas en degré p . Plus précisément, on pourrait penser que pour tout point générique η de la fibre spéciale $\mathcal{X}_k$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_k \subset \mathcal{X}_k$ le contenant et un k -groupe fini G'_k tel que $\mathcal{G}|_{\mathcal{U}_k} \simeq G'_k \times_{\text{Spec}(k)} \mathcal{U}_k$. Le groupe G'_k n'est rien d'autre que (la fibre spéciale d') un modèle effectif de G tel que construit dans l'article [7], voir section 5. Les résultats de l'article [To1] de Tossici montrent que ce n'est pas le cas : nous donnons un contre-exemple ci-dessous. On a donc encore beaucoup à comprendre sur l'action de ces modèles, la variation des stabilisateurs, leur ramification...

8.5 Un exemple. Nous donnons un contre-exemple dans le cas local (il est facile ensuite de l'étendre à une courbe affine). Nous omettons certaines vérifications de calcul pour conserver au texte une taille raisonnable. On note $R = (R, K, k, \pi)$ un anneau de valuation discrète contenant une racine primitive p^2 -ième de l'unité ζ et $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. On note $X = \text{Spec}(A)$ le localisé de la droite affine sur R en l'origine de la fibre spéciale, c'est-à-dire $A = R[Z]_m$ où $m = (\pi, Z)$. On choisit des entiers $\gamma_1, \gamma_2 \geq 2$ tels que $v(p) > p\gamma_1 = p^2\gamma_2 > 0$, un élément $f \in A$ dont la réduction modulo π est un inversible non puissance p -ième, on pose $r = \pi^{\gamma_2-1}Z$ et $g = 1 + r^p f$. Enfin, pour tout $\gamma \leq v(p)/(p-1)$ on note $P_\gamma(T) = \pi^{-p\gamma}((1 + \pi^\gamma T)^p - 1) \in R[T]$ et on considère le morphisme fini $Y \rightarrow X$ décrit dans $\mathbb{A}_R^2 \times X = \text{Spec}(A[T_1, T_2])$ par les équations :

$$P_{\gamma_1}(T_1) = f \quad , \quad P_{\gamma_2}(T_2) = \frac{\frac{1+r^p f}{(1+rT_1)^p} (1 + \pi^{\gamma_1} T_1) - 1}{\pi^{p\gamma_2}}.$$

On vérifie que Y est normal, plat sur R et à fibres intègres. Sur la fibre générique, $Y_K \rightarrow X_K$ est le G -torseur d'équation

$$T^{p^2} = (1 + \pi^{p\gamma_1} f) g^p$$

où $T = (1 + rT_1)(1 + \pi^{\gamma_2} T_2)$ et l'action $T \mapsto \zeta T$ de G s'étend à Y . Posons $H(T_1) = 1 + rT_1$. D'après le théorème 6.2.1 de [To1], si $p \geq 3$ le modèle effectif de G est contrôlé par les solutions $a \in R$ de l'équation, pour $m \geq \gamma_1$ variable :

$$(\Delta)_m : \quad aH(T_1) \equiv \pi^{m-\gamma_1} H'(T_1) \pmod{\pi^{\gamma_2}}.$$

Pour évaluer l'invariant κ de [To1] 6.1.3, faisons $m = \gamma_1$ i.e. regardons l'équation

$$a(1 + rT_1) \equiv r \pmod{\pi^{\gamma_2}}.$$

Si on reste au-dessus de l'anneau de valuation discrète $R_1 = R$, cette équation n'a pas de solution et il s'ensuit que l'invariant κ associé vérifie $\kappa_1 > \gamma_1$. Notons maintenant η le point générique de X_k . Au-dessus de l'anneau de valuation discrète $R_2 = \mathcal{O}_{X,\eta}$ d'uniformisante π , cette équation possède la solution $a = r \in R_2$. Il s'ensuit que $\kappa_2 = \gamma_1$. D'après [To1] 6.2.1 les modèles effectifs G'_1 et G'_2 sont donc distincts.

Références

- [AOV] D. ABRAMOVICH, M. OLSSON, A. VISTOLI, *Twisted stable maps to tame Artin stacks*, à paraître au J. Algebraic Geom.
- [ACV] D. ABRAMOVICH, A. CORTI, A. VISTOLI, *Twisted bundles and admissible covers*, Special issue in honor of Steven L. Kleiman. Comm. Algebra 31 (2003), no. 8, 3547–3618.
- [Ar] M. ARTIN, *Algebraization of formal moduli I*, Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira (1969), pp. 21–71, Univ. Tokyo Press.
- [Be] L. BÉGUER, *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mém. SMF (N.S.) 1980/81, no. 4.
- [BBM] P. BERTHELOT, L. BREEN, W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Mathematics 930, Springer-Verlag, 1982.
- [Br] C. BREUIL, *Groupes p -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 2, 489–549.
- [BW] L. H. BREWIS, S. WEWERS, *Artin characters, Hurwitz trees and the lifting problem*, Math. Ann. 345 (2009), no. 3, 711–730.
- [DeMu] P. DELIGNE, D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHÉS 36 (1969), 75–109.
- [EGA] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique II, III, IV*, Publ. Math. IHÉS 8 (1961), 17 (1963), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).
- [Ek] T. EKEDAH, *Boundary behaviour of Hurwitz schemes*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 173–198, Progr. Math. 129, Birkhäuser, 1995. <http://www.math.stanford.edu/~akshay/research/evicm.pdf>.
- [GDH] G. GONZÁLEZ DÍEZ, W. J. HARVEY, *Moduli of Riemann surfaces with symmetry*, Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991), 75–93, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 173, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [He] Y. HENRIO, *Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p -adiques formels*, arXiv:math/0011098v1.
- [Hu] A. HURWITZ, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann. 39 (1891), no. 1, 1–61.
- [Ki] M. KISIN, *Crystalline representations and F -crystals*, Algebraic geometry and number theory, 459–496, Progr. Math. 253, Birkhäuser (2006).
- [KM] N. KATZ AND B. MAZUR, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematical Studies 8, Princeton University Press, 1985.
- [Kn] D. KNUTSON, *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 203, Springer-Verlag, 1971.
- [Le] P. LEVY, *Involutions of reductive Lie algebras in positive characteristic*, Adv. Math. 210 (2007), no. 2, 505–559.
- [Mu] D. MUMFORD, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and geometry, Vol. II, 271–328, Progr. Math. 36, Birkhäuser, 1983.

- [Ngô] B. C. NGÔ, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. IHES No. 111 (2010), 1–169.
- [Ol] M. OLSSON, *On proper coverings of Artin stacks*, Adv. Math. 198 (2005), no. 1, 93–106.
- [R] M. RAYNAUD, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. 119, Springer-Verlag, 1970.
- [RG] M. RAYNAUD, L. GRUSON, *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d'un module*, Invent. Math. 13 (1971), 1–89.
- [Se] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Third revised edition, Hermann, 1978.
- [SeSu] T. SEKIGUCHI AND N. SUWA, *On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt Theory*, prépublication no. 111 du Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux, 1999.
- [SOS] T. SEKIGUCHI, F. OORT, N. SUWA, *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 (1989), no. 3, 345–375.
- [SpSt] T. A. SPRINGER, R. STEINBERG, *Conjugacy classes*, in Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, IAS, Princeton, 1968-1969 (ed. E. Borel et al.), pp. 167–266, Lecture Notes in Mathematics 131, Springer-Verlag, 1970.
- [TO] J. TATE, F. OORT, *Group schemes of prime order*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) no. 3 (1970), 1–21.
- [To1] D. TOSSICI, *Effective models and extension of torsors over a discrete valuation ring of unequal characteristic*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, Art. ID rnn111, 68 pp.
- [To2] D. TOSSICI, *Models of $\mu_{p^2, K}$ over a discrete valuation ring. With an appendix by Xavier Caruso*, J. Algebra 323 (2010), no. 7, 1908–1957.
- [TV] B. TOËN, G. VEZZOSI, *Homotopical algebraic geometry II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. 193 (2008), no. 902.

Liste de travaux

Ces textes sont disponibles à l'adresse

<http://www.math.jussieu.fr/~romagny/recherche>.

- [1] M. ROMAGNY, *The stack of Potts curves and its fibre at a prime of wild ramification*, J. Alg. 274 (2004), No 2, p. 772-803.
- [2] M. ROMAGNY, *Group actions on stacks and applications*, Michigan Math. J. 53 (2005), no. 1, 209-236.
- [3] M. ROMAGNY, S. WEWERS, *Hurwitz spaces*, Groupes de Galois arithmétiques et différentiels (Luminy 2004), D. Bertrand, P. Dèbes (Éd.) Séminaires et Congrès 13 (2006).
- [4] J. BERTIN, M. ROMAGNY, *Champs de Hurwitz*, accepté pour publication dans les Mémoires de la SMF.
- [5] M. ROMAGNY, *Models of curves*, accepté pour publication dans les comptes-rendus de la conférence *Arithmetic and Geometry around Galois Theory*, Istanbul 2008, P. Dèbes, M. Emsalem, M. Romagny, M. Uludağ (Éd.).
- [6] P.-E. CHAPUT, M. ROMAGNY, *On the adjoint quotient of Chevalley groups over arbitrary base schemes*, J. Inst. Math. Jussieu 9 (2010), no. 4, pp. 673-704.
- [7] M. ROMAGNY, *Effective models of group schemes*, accepté pour publication au Journal of Algebraic Geometry.
- [8] M. ROMAGNY, *Composantes connexes et irréductibles en familles*, Manuscripta Math. 136 (2011), no. 1, 1-32.
- [9] D. ABRAMOVICH, M. ROMAGNY, *Moduli of Galois p -covers in mixed characteristics*, accepté pour publication à Algebra and Number Theory.
- [10] A. MÉZARD, M. ROMAGNY, D. TOSSICI, *Sekiguchi-Suwa Theory revisited*, soumis.
- [11] A. MÉZARD, M. ROMAGNY, D. TOSSICI, *Models of group schemes of roots of unity*, soumis.