

Représentations linéaires des groupes finis

Réf : Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann.

On considère un groupe fini G et des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie V, V_1, V_2 , etc. On note $\text{Hom}(V_1, V_2)$ l'espace vectoriel des applications \mathbb{C} -linéaires de V_1 dans V_2 et $\text{End}(V)$ la \mathbb{C} -algèbre $\text{Hom}(V, V)$.

1 Introduction

L'étude de la réduction d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel V est le tout premier pas de la *théorie des représentations*. L'étude classique de familles d'endomorphismes f_i qui commutent entre eux (codiagonalisabilité, cotrigonalisabilité) amène au second pas, qui est l'étude de familles quelconques.

Bien sûr, on gagne en structure et en souplesse en prenant pour objet d'étude la sous- k -algèbre A de $\text{End}(V)$ engendrée par les f_i . Le bon cadre abstrait pour faire cela est de considérer une k -algèbre abstraite A et d'étudier les morphismes $A \rightarrow \text{End}(V)$, appelés *représentations linéaires de A* .

Si les f_i sont inversibles, il est naturel de considérer, plutôt que A , le sous-groupe G de $\text{GL}(V)$ qu'ils engendrent. Le bon cadre abstrait pour faire cela est de considérer un groupe abstrait G et d'étudier les morphismes $G \rightarrow \text{GL}(V)$, appelés *représentations linéaires de G* .

2 Notions de base

Les notions de cette partie font sens pour un groupe G pas nécessairement fini, un corps de base k pas nécessairement isomorphe à \mathbb{C} , et des espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie.

2.1 Définitions. Soient G un groupe et V, V_1, V_2 des k -espaces vectoriels.

(1) Une *représentation* de G dans un k -espace vectoriel V est un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, c'est-à-dire une action de G sur V par automorphismes k -linéaires.

(2) Un *morphisme* de $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ dans $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ est une application linéaire $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $f \circ \rho_s^1 = \rho_s^2 \circ f$, pour tout $s \in G$.

(3) Une *sous-représentation* W de V est un sous-espace vectoriel qui est G -stable, c'est-à-dire tel que $\rho_s(W) \subset W$ pour tout $s \in G$. La *représentation quotient* de V par W est la représentation $\bar{\rho} : G \rightarrow \text{GL}(V/W)$ telle que $\bar{\rho}_s : V/W \rightarrow V/W$ est le morphisme induit de $\rho_s : V \rightarrow V$.

(4) Soit R un espace vectoriel de base $(e_t)_{t \in G}$, par exemple $R = k^G$ et e_t égal à l'indicatrice de $\{t\}$. La *représentation régulière* est la représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(R)$ définie par $\rho_s(e_t) = e_{st}$.

2.2 Remarque. On utilise souvent des notations et une terminologie simplifiées : une représentation est désignée par la seule lettre V , l'action ρ étant sous-entendue ; on note $s(v)$, $s.v$ ou sv au lieu de $\rho_s(v)$; un morphisme de représentations $f : V_1 \rightarrow V_2$ est souvent appelé G -morphisme de V_1 dans V_2 et on note $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble de ces morphismes.

2.3 Exemples. * Les définitions de base de la théorie comprennent d'autres notions importantes, mais que nous utiliserons moins ici (nous utilisons les notations simplifiées de 2.2) :

(1) La *représentation duale* d'une représentation V est la représentation d'espace vectoriel sous-jacent le dual V' définie par $s.\varphi = \varphi \circ s^{-1}$.

(2) Étant données deux représentations V_1 et V_2 , leur *somme directe* est la représentation d'espace sous-jacent $V_1 \oplus V_2$ définie par $s.(v_1 \oplus v_2) = s(v_1) \oplus s(v_2)$. La *représentation Hom* est la représentation d'espace sous-jacent l'espace des applications linéaires $\text{Hom}(V_1, V_2)$ définie par $s.\varphi = s \circ \varphi \circ s^{-1}$.

2.4 Exercice. * On reprend les notations de 2.3. Si V est un espace vectoriel quelconque, on appelle *représentation triviale d'espace V* et on note V^{triv} la représentation de G sur V définie par $s.v = v$, pour

tout $s \in G$. Si W est une représentation de G , on note $W^G = \{v \in V, \forall s \in G, s.v = v\}$ l'espace vectoriel des points fixes. Montrez que :

(1) il existe une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_G(V^{\mathrm{triv}}, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W^G),$$

(2) on a $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G$.

2.5 Lemme. Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de représentations de G . Alors, le noyau $\ker(f)$ est une sous-représentation de V_1 , l'image $\mathrm{im}(f)$ est une sous-représentation de V_2 , et l'isomorphisme $V_1/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f)$ est un isomorphisme de représentations.

Preuve : C'est une vérification facile. \square

3 Semi-simplicité

À partir de maintenant, les hypothèses faites au début du texte deviennent véritablement importantes : G est fini, le corps de base est $k = \mathbb{C}$, et les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Dans toute la suite, on dira simplement *représentation* au lieu de « représentation linéaire de dimension finie ». La dimension d'une représentation est aussi appelée son *degré*.

3.1 Théorème. Soit V une représentation de G . Alors, toute sous-représentation $W \subset V$ admet un supplémentaire stable, c'est-à-dire un supplémentaire en tant que représentation.

Preuve : Rappelons la correspondance entre supplémentaires de W et projecteurs sur W , donnée ainsi : à W' on associe le projecteur sur W parallèlement à W' , et à p on associe son noyau.

Partons d'un projecteur $p : V \rightarrow V$ sur W . Définissons une nouvelle application linéaire par

$$p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} tpt^{-1}.$$

Comme $t(W) \subset W$ pour tout t , on voit que $p^0(V) \subset W$. De plus, si $x \in W$ on a

$$p^0(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t(p(\underbrace{t^{-1}x}_{\in W})) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t(t^{-1}x) = x$$

donc p^0 est un projecteur sur W . Enfin p^0 est un G -morphisme car

$$sp^0s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} stpt^{-1}s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} upu^{-1} = p^0.$$

Donc $W^0 = \ker(p^0)$ est un supplémentaire stable de W . \square

3.2 Définition. Une représentation V d'un groupe G est dite *irréductible* ou *simple* si elle est non nulle et si ses seules sous-représentations sont 0 et V . Une représentation est dite *semi-simple* si elle est somme directe de sous-représentations simples.

Bien sûr, il y a une analogie avec le concept de simplicité pour les groupes : on cherche à décomposer les représentations en morceaux plus petits. Par ailleurs, il y a un lien direct avec le concept d'endomorphisme semi-simple d'un espace vectoriel : il est équivalent de dire que $u \in \mathrm{End}(V)$ est semi-simple au sens habituel, ou que V est semi-simple comme représentation de l'algèbre $\mathbb{C}[u]$ des polynômes en u , ou encore, que V est semi-simple comme représentation du groupe (infini) $G = \mathbb{C}[u] \cap \mathrm{GL}(V)$.

3.3 Théorème. Toute représentation est semi-simple.

On prendra garde que ce résultat n'est plus vrai sur corps de caractéristique divisant l'ordre de G , ou si G n'est pas fini.

Preuve : Soit $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$, avec $s \leq \dim(V)$, une décomposition maximale (i.e. s maximal) en somme directe de sous-représentations non nulles. Par le théorème précédent, s'il existe un indice i et une sous-représentation stricte $W_i \subset V_i$, celle-ci possède un supplémentaire stable W'_i . On a alors $V_i = W_i \oplus W'_i$ en contradiction avec la maximalité de s . \square

Cette décomposition n'est pas unique : par exemple si V est triviale (voir 2.4), une décomposition en sous-représentations n'est rien d'autre qu'une décomposition en somme directe de droites et il y a une infinité de façons de faire cela. Mais on verra (théorème 6.4) que le nombre de sous-représentations isomorphes à une représentation irréductible donnée est, lui, unique.

4 Caractères et fonctions centrales

4.1 Définition. Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de G . Le caractère de V est la fonction $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\chi_\rho(s) = \text{tr}(\rho_s)$. On dit qu'un caractère est *irréductible* si la représentation l'est.

L'intérêt des caractères vient du fait remarquable qu'ils déterminent les représentations à isomorphisme près, comme nous le verrons (corollaire 6.5).

Voyons maintenant quelques propriétés élémentaires des caractères. Dans la suite, on notera parfois s_V au lieu de ρ_s .

4.2 Proposition. Si $\dim(V) = n$ et $\chi = \chi_\rho$, alors :

- (1) $\chi(1) = n$,
- (2) $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$ où z^* est le complexe conjugué de z ,
- (3) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$.

Preuve : Le point (1) vient de ce que $\chi(1) = \text{tr}(\text{Id}) = n$. Le point (2) vient du fait que si l'on note $d = |G|$, on a $(s_V)^d = \text{Id}$. Ainsi s_V est diagonalisable à valeurs propres λ_i racines d -ièmes de l'unité, de sorte que $\lambda_i^{-1} = \lambda_i^*$. Alors $(s_V)^{-1}$ a pour valeurs propres les λ_i^* , donc

$$\chi(s^{-1}) = \text{tr}((s_V)^{-1}) = \sum \lambda_i^* = \left(\sum \lambda_i\right)^* = \text{tr}(s_V)^* = \chi(s)^*.$$

Enfin (3) est une propriété élémentaire de la trace. □

4.3 Proposition. Soient V_1, V_2 deux représentations de G de caractères χ_1, χ_2 . Soit $V = V_1 \oplus V_2$ la représentation somme directe, de caractère χ . Alors, on a $\chi = \chi_1 + \chi_2$.

Preuve : En effet, pour tout $s \in G$ on a $s_V = s_{V_1} \oplus s_{V_2}$. Matriciellement, après choix d'une base adaptée à la décomposition $V_1 \oplus V_2$, cet endomorphisme se représente par une matrice diagonale par blocs. On trouve alors $\chi(s) = \text{tr}(s_V) = \text{tr}(s_{V_1}) + \text{tr}(s_{V_2}) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$. □

On voit que l'ensemble des caractères est un sous-ensemble de l'espace vectoriel de fonctions $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ qui est stable par somme, mais n'est stable ni par passage à l'opposé, ni par multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ (à cause de la propriété $\chi(1) = n$ de 4.2). Mais il y a un candidat naturel à être un plus petit sous-espace vectoriel contenant les caractères, c'est l'espace des fonctions centrales :

4.4 Définition. Une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est *centrale* si elle vérifie $f(tst^{-1}) = f(s)$ pour tous $s, t \in G$, ou de manière équivalente, $f(uv) = f(vu)$ pour tous $u, v \in G$.

Ainsi, une fonction centrale est une fonction qui est constante sur les classes de conjugaison de G . Elle passe donc au quotient en une fonction sur G/\sim , où \sim désigne la conjugaison, et réciproquement. En conclusion, l'ensemble des fonctions centrales sur G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ isomorphe à $\mathcal{F}(G/\sim, \mathbb{C})$. En particulier, sa dimension est égale au cardinal de G/\sim , le nombre de classes de conjugaison de G .

Nous allons étudier les caractères et les fonctions centrales à l'aide de deux formes binaires naturelles : si φ, ψ sont des fonctions sur G , on définit

- (1) une forme bilinéaire symétrique par $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \varphi(t)\psi(t^{-1})$,
- (2) un produit scalaire hermitien par $(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \varphi(t)\psi(t)^*$.

Noter que $\langle -, - \rangle$ est bilinéaire alors que $(-, -)$ est linéaire en la première variable et semi-linéaire en la seconde variable. Par ailleurs, si χ est un caractère, alors on a $\langle \varphi, \chi \rangle = (\varphi, \chi)$.

5 Lemme de Schur

5.1 Lemme de Schur. Soient V_1, V_2 deux représentations irré-

ductibles de G . Alors :

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } V_1 \not\cong V_2, \\ \mathbb{C} & \text{si } V_1 \simeq V_2. \end{cases}$$

Preuve : Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de G -représentations. Si $f \neq 0$, alors $\ker(f) \neq V_1$ donc $\ker(f) = 0$ par irréductibilité de V_1 . Dans ce cas, $\mathrm{im}(f) \neq 0$ donc $\mathrm{im}(f) = V_2$ par irréductibilité de V_2 . Alors f induit un isomorphisme de V_1 sur V_2 . Par contraposée, ceci donne $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$ si $V_1 \not\cong V_2$.

Si $V_1 \simeq V_2 \simeq V$, alors $f : V \rightarrow V$ possède au moins une valeur propre λ . Le morphisme $f - \lambda \mathrm{Id} : V \rightarrow V$ est encore un G -morphisme ; son noyau est non nul par choix de λ , donc égal à V par irréductibilité. Ainsi $f = \lambda \mathrm{Id}$. \square

5.2 Corollaire. Soient V_1, V_2 deux représentations irréductibles de G et $h : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire quelconque. Posons $h^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} h t$. Alors :

- (1) $h^0 = 0$ si $V_1 \not\cong V_2$,
- (2) $h^0 = \frac{1}{n} \mathrm{tr}(h)$ si $V_1 = V_2 = V$, où $n = \dim(V)$.

Preuve : On a tout fait pour que h^0 soit un G -morphisme. Par le lemme de Schur, dans le cas (1) on a $h^0 = 0$. Dans le cas (2), il existe un λ tel que $h^0 = \lambda \mathrm{Id}$, et en prenant la trace on trouve $n\lambda = \mathrm{tr}(h^0) = \mathrm{tr}(h)$. \square

5.3 Corollaire. Soient V_1, V_2 deux représentations irréductibles de G données, après choix de bases sur V_1 et V_2 , par les matrices $\rho_t^1 = t_{V_1}$ et $\rho_t^2 = t_{V_2}$:

$$\rho_t^1 = (r_{i_1 j_1}(t)) \quad \text{et} \quad \rho_t^2 = (r_{i_2 j_2}(t))$$

où les $r_{i_1 j_1}, r_{i_2 j_2}$ sont des fonctions sur G . On a, pour tous i_1, j_1, i_2, j_2 :

- (1) $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $V_1 \not\cong V_2$,
- (2) $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}$ si $V_1 = V_2 = V$, où $n = \dim(V)$.

Preuve : Dans les bases (e_{i_1}) et (e_{i_2}) choisies sur V_1 et V_2 , une application linéaire $h : V_1 \rightarrow V_2$ est déterminée par $h(e_{i_1}) = \sum_{i_2} x_{i_2 i_1} e_{i_2}$. Sa matrice est alors $M_h = (x_{i_2 i_1})$. De même $M_{h^0} = (x_{i_2 i_1}^0)$ où

$$\begin{aligned} x_{i_2 i_1}^0 &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G, j_2, j_1} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j_2, j_1} \left(\sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) \right) x_{j_2 j_1}. \end{aligned}$$

Le corollaire 5.2 au lemme de Schur dit que si $V_1 \not\cong V_2$, on doit avoir $x_{i_2 i_1}^0 = 0$ identiquement en les $x_{j_2 j_1}$. Il s'ensuit que chaque terme de la somme ci-dessus doit s'annuler, c'est-à-dire

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = 0.$$

C'est le contenu du point (1). On déduit le point (2) du corollaire 5.2 de manière identique. \square

6 Orthogonalité des caractères

On rappelle (cf 4.1) qu'un caractère irréductible est le caractère d'une représentation irréductible.

6.1 Théorème. Les caractères irréductibles de G sont

- de norme 1 : $\langle \chi, \chi \rangle = 1$,
- orthogonaux : $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$ si $V_1 \not\cong V_2$.

Preuve : On reprend les notations du corollaire 5.3. On a :

$$\begin{aligned} \langle \chi_1, \chi_2 \rangle &= \langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_1(t) \chi_2(t^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G, i_1, i_2} r_{i_1 i_1}(t) r_{i_1 i_2}(t^{-1}) = \sum_{i_1, i_2} \langle r_{i_1 i_1}, r_{i_2 i_2} \rangle. \end{aligned}$$

Si $V_1 \not\cong V_2$, ceci vaut 0. Si $V_1 = V_2 = V$, ceci vaut $\sum_{i_1, i_2} \delta_{i_1, i_2} = 1$. \square

6.2 Corollaire. *Le nombre de caractères irréductibles est fini, inférieur ou égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

Preuve : En effet, les caractères irréductibles distincts sont orthogonaux dont linéairement indépendants dans l'espace des fonctions centrales, qui est de dimension égale au nombre de classes de conjugaison de G . \square

6.3 Notation. Dans toute la suite, on note χ_1, \dots, χ_h les différents caractères irréductibles de G . Pour chaque i , on choisit une représentation W_i de caractère χ_i et on note $n_i = \dim(W_i)$.

6.4 Théorème. *Soit V une représentation de G , de caractère φ , et soit $V = w_1 \oplus \dots \oplus w_k$ une décomposition en somme directe de représentations irréductibles. Si W est une décomposition irréductible de G de caractère χ , le nombre des W_i isomorphes à W est égal au produit scalaire $(\varphi, \chi) = \langle \varphi, \chi \rangle$. En particulier, il est indépendant de la décomposition choisie ; on l'appelle la multiplicité de W dans V .*

Preuve : Soit χ_i le caractère de W_i . D'après la proposition 4.3, on a $\varphi = \chi_1 + \dots + \chi_k$. Ainsi $(\varphi, \chi) = (\chi_1, \chi) + \dots + (\chi_k, \chi)$. D'après le théorème précédent, le i -ième terme de cette somme vaut 0 si $W_i \not\simeq W$ et 1 si $W_i \simeq W$. Le résultat en découle. \square

6.5 Corollaire. *Deux représentations de même caractère sont isomorphes.*

Preuve : En effet, d'après le résultat précédent, elles contiennent le même nombre de fois toute représentation irréductible W donnée. \square

6.6 Théorème. *Si φ est le caractère d'une représentation, alors (φ, φ) est un entier positif, et $(\varphi, \varphi) = 1$ si et seulement si ce caractère est irréductible.*

Ceci donne un critère pratique d'irréductibilité.

Preuve : Soit V une représentation dont φ est le caractère, et soit $m_i = (\varphi, \chi_i)$ le nombre de fois (multiplicité) que W_i apparaît dans V . La représentation V est isomorphe à la somme directe des $m_i W_i$, où l'on note mW la somme directe de m fois une représentation W . D'après les relations d'orthogonalité des caractères, on a

$$(\varphi, \varphi) = \left(\sum_i m_i \chi_i, \sum_j m_j \chi_j \right) = \sum_i (m_i)^2.$$

Par ailleurs, ce nombre vaut 1 ssi l'un des m_i est égal à 1 et les autres sont nuls, ssi V est isomorphe à l'une des W_i . \square

7 Décomposition de la représentation régulière

Rappelons que la représentation régulière est la représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(R)$ dans l'espace vectoriel $R = \text{Vect}(e_t, t \in G)$ avec $\rho_s(e_t) = e_{st}$.

7.1 Proposition. *Le caractère $r = r_G$ de la représentation régulière est donné par*

$$\begin{aligned} r(1) &= |G| \\ r(s) &= 0 \quad \text{si } s \neq 1. \end{aligned}$$

Preuve : Si $s = 1$, on a $\rho_s = \text{Id}$ donc $r(1) = \dim(R) = |G|$. Si $s \neq 1$, on a $st \neq t$ pour tout t , donc les termes diagonaux de la matrice de ρ_s dans la base (e_t) sont tous nuls et $r(s) = \text{tr}(\rho_s) = 0$. \square

7.2 Corollaire. *Avec les notations de 6.3 pour les caractères irréductibles distincts de G , on a :*

- (1) *la multiplicité de W_i dans la représentation régulière est égale à n_i .*
- (2) *les dimensions n_i vérifient $(n_1)^2 + \dots + (n_h)^2 = |G|$.*
- (3) *pour tout $s \in G$ distinct de 1, on a $n_1 \chi_1(s) + \dots + n_h \chi_h(s) = 0$.*

Preuve : D'après le théorème 6.4, la multiplicité de W_i dans R est égale à

$$\langle r, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} r(t^{-1}) \chi_i(t) = \chi_i(1) = n_i.$$

On en déduit que $r = n_1 \chi_1 + \dots + n_h \chi_h$. Compte tenu de la proposition 7.1, en évaluant en $s = 1$, on trouve $|G| = (n_1)^2 + \dots + (n_h)^2$. En évaluant en $s \neq 1$, on trouve $n_1 \chi_1(s) + \dots + n_h \chi_h(s) = 0$. \square

8 Nombre des représentations irréductibles

8.1 Proposition. *Soit f une fonction centrale sur G , et soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de G . Soit l'endomorphisme $\rho_f = \sum_{t \in G} f(t)t$ où $t = t_V$ désigne l'image de t dans $\text{GL}(V)$. Si V est irréductible, de dimension n et de caractère χ , l'endomorphisme ρ_f est une homothétie de rapport*

$$\lambda = \frac{|G|}{n} (f, \chi^*).$$

Preuve : Pour tout $s \in G$, on a

$$s \rho_f s^{-1} = \sum_{t \in G} f(t) s t s^{-1} = \sum_{u \in G} f(s^{-1} u s) u = \sum_{u \in G} f(u) u = \rho_f$$

donc ρ_f est un morphisme de représentations. D'après le lemme de Schur, ρ_f est une homothétie. Soit λ son rapport, de sorte que $\lambda \text{Id} = \rho_f = \sum_{t \in G} f(t)t$. En prenant les images par χ on trouve

$$\lambda n = \chi(\lambda \text{Id}) = \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = |G| (f, \chi^*),$$

comme annoncé. \square

8.2 Théorème. *Les caractères irréductibles χ_1, \dots, χ_h forment une base de l'espace des fonctions centrales sur G .*

Preuve : On sait déjà par le théorème 6.1 que les χ_i sont linéairement indépendants. Soit H l'espace qu'ils engendrent. Il suffit de montrer que $H^\perp = 0$, où l'orthogonal s'entend pour le produit scalaire hermitien $(-, -)$. Soit φ une fonction centrale orthogonale aux χ_i , et $f = \varphi^*$ qui est orthogonale aux χ_i^* . Pour une représentation ρ variable, posons $\rho_f = \sum_{t \in G} f(t)t$. La proposition 8.1 montre que $\rho_f = 0$ lorsque ρ est irréductible. Comme toute représentation est somme directe d'irréductibles, on conclut qu'on a toujours $\rho_f = 0$. En particulier, si ρ est la représentation régulière, on trouve

$$0 = \rho_f(e_1) = \sum_{t \in G} f(t)t(e_1) = \sum_{t \in G} f(t)e_t$$

donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in G$. Ainsi $f = 0$, donc $\varphi = 0$, cqfd. \square

8.3 Corollaire. *Le nombre des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G .* \square

Pour finir, nous allons donner de toute représentation V une décomposition moins fine qu'une décomposition en représentations irréductibles, mais qui a l'avantage d'être unique ; on l'appelle la *décomposition canonique*. Pour l'obtenir, on part d'une décomposition en irréductibles $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ et pour chaque $i = 1, \dots, h$ on appelle V_i la somme directe des U_j qui sont isomorphes à W_i .

8.4 Théorème. *La décomposition $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$ ne dépend pas de la décomposition initiale de V en somme de représentations irréductibles. Le projecteur sur V_i associé à cette décomposition est*

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* t.$$

Preuve : Il suffit de démontrer la deuxième assertion. Posons $q_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* t$. La proposition 8.1 montre que si $W \subset V$ est une sous-représentation irréductible de caractère χ et dimension n , la restriction $q_i|_W$ est une homothétie de rapport $\frac{n_i}{n} (\chi_i, \chi)$. C'est donc 0 si $\chi \neq \chi_i$ et 1 si $\chi_i = \chi$. En conséquence $q_i|_{V_j}$ est égale à 0 si $j \neq i$ et à Id_{V_i} si $j = i$, donc q_i est bien le projecteur p_i . \square