

# Que veut dire être canonique ?

Alors que le mot « canonique » est très présent en mathématiques, on n'en trouve pas de définition précise. Ceci est assez surprenant dans une discipline qui s'enorgueillit avec raison d'avoir pour principe de base de commencer par définir les termes qu'elle emploie. L'absence d'une définition officielle est d'ailleurs l'occasion de discussions dans la communauté au sujet du concept de canonicité, que les uns utilisent abusivement comme fourre-tout, et sur lequel d'autres ont au contraire des idées personnelles très précises.

∴

Il y a un sens du mot canonique qui ne pose pas de problème. Dans certains énoncés de définitions ou de théorèmes, on définit explicitement un objet qui, souvent, vérifie telle ou telle propriété et on le *nomme* canonique. C'est le cas pour la *surjection canonique* d'un ensemble (resp. d'un groupe, d'un anneau) vers son quotient par une relation d'équivalence (resp. par un sous-groupe distingué, par un idéal), la *base canonique* du  $k$ -espace vectoriel  $k^n$ , l'*injection canonique* d'un anneau commutatif  $A$  dans l'anneau de polynômes  $A[X]$ , etc. Dans cette note, nous voulons parler de l'autre sens qu'a le mot « canonique », celui qui exprime le fait qu'un objet est unique, ou naturel ; il s'agit d'une qualité de l'objet, pas de son nom. Plus précisément, nous proposons de discuter et illustrer l'idée suivante : *on peut qualifier un objet de « canonique » si son existence ne dépend pas de divers choix*. Un point intéressant est que l'on peut discuter de la nature et du nombre de ces choix, comme nous allons le voir.

∴

Un bon exemple introductif est celui de l'isomorphisme de bidualité pour les espaces vectoriels de dimension finie fixée. Rappelons qu'il s'agit de l'isomorphisme  $\text{ev} : E \rightarrow E^{**}$  qui envoie un vecteur  $x$  sur l'application d'évaluation  $\text{ev}_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$ . On voit que la définition de  $\text{ev}$  ne dépend pas d'un choix de base pour  $E$ . De plus  $\text{ev} = \text{ev}_E$  ne dépend pas de l'espace vectoriel  $E$ , au sens où si  $u : E \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors l'isomorphisme

$$F \xrightarrow{u^{-1}} E \xrightarrow{\text{ev}_E} E^{**} \xrightarrow{u^{**}} F^{**}$$

obtenu en transformant  $\text{ev}_E$  à l'aide de  $u$ , est égal à  $\text{ev}_F$ . Ceci légitime le fait que l'on note  $\text{ev}$  au lieu de  $\text{ev}_E$ . Par ailleurs, pour tout scalaire non nul  $\lambda$  dans le corps de base, l'application  $\lambda \text{ev}$  vérifie les mêmes propriétés que  $\text{ev}$  ; mais le simple fait de nommer  $\lambda \text{ev}$  nécessite de choisir  $\lambda$ , alors que l'existence de  $\text{ev}$  est un fait indépendant de notre intervention, et qui ne dépend donc même pas du corps des scalaires, en un sens évident. On pourrait tout de même avancer l'argument que  $-\text{ev}$  est très naturel aussi, et il y aurait un contre-argument selon lequel introduire  $-1$  relève encore d'un petit choix. Cet exemple montre bien certains choix qu'on peut être amené à faire ou ne pas faire, et les discussions sur leur « naturalité » que cela amène.

∴

Nous allons entrer dans le vif du sujet en parlant des isomorphismes entre un espace vectoriel et son dual. Soient  $n \geq 1$  un entier et  $k$  un corps. Dans la suite, tous les espaces vectoriels sont des  $k$ -espaces vectoriels de dimension  $n$ .

**Définitions.** Un isomorphisme  $i : E \rightarrow E^*$  est *indépendant de la base* si pour tout  $u \in GL(E)$ , on a  $u^* \circ i \circ u = i$ . Une collection d'isomorphismes  $i_E : E \rightarrow E^*$ , pour  $E$  variable, est *indépendante de  $E$  à isomorphisme près* si pour tout isomorphisme  $u : E \rightarrow F$ , on a  $u^* \circ i_F \circ u = i_E$ .

Ces conditions s'expriment par la commutativité des diagrammes naturels

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^* \\ u \downarrow & & \uparrow u^* \\ F & \xrightarrow{i_F} & F^* \end{array}$$

avec  $F = E$  dans le cas d'un isomorphisme indépendant de la base. Il est clair que si  $\{i_E\}$  est une collection d'isomorphismes indépendante de  $E$  à isomorphisme près, alors chaque  $i_E$  est indépendant de la base. En guise de note culturelle, signalons que le langage adapté pour formuler la notion de « collection  $\{i_E\}$  indépendante de  $E$  à isomorphisme près » est celui des *catégories*; on parle alors d'isomorphismes  $i_E$  *fonctoriels* par rapport aux isomorphismes  $u : E \rightarrow F$ . Nous n'aurons pas besoin de ce langage.

On rappelle qu'il y a une correspondance entre isomorphismes  $i : E \rightarrow E^*$  et formes bilinéaires non dégénérées  $\langle -, - \rangle$  sur  $E$ , donnée par la formule  $i(x) = \langle x, - \rangle$ . Il sera plus agréable d'utiliser les définitions ci-dessus en termes de formes, comme suit.

**Définitions.** Une forme bilinéaire non dégénérée  $\langle -, - \rangle$  sur  $E$  est *indépendante de la base* si l'on a  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  pour tout  $u \in GL(E)$  et tous  $x, y \in E$ . Une collection de formes bilinéaires non dégénérées  $\langle -, - \rangle_E$  sur des  $E$  variables est *indépendante de  $E$  à isomorphisme près* si l'on a  $\langle u(x), u(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$  pour tout isomorphisme  $u : E \rightarrow F$  et tous  $x, y \in E$ .

**Exemples.** (1) Les deux seuls corps  $k$  dont tout élément  $\lambda \neq 0$  vérifie  $\lambda^2 = 1$  sont  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_3$ . Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur l'un de ces corps, on définit une application  $E \times E \rightarrow k$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  comme suit :

$$xy = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0, \\ 1 & \text{si } x, y \neq 0 \text{ et } x = y, \\ -1 & \text{si } x, y \neq 0 \text{ et } x \neq y. \end{cases}$$

On montre facilement que cette application est une forme bilinéaire en observant par exemple que si  $e$  est un vecteur de base de  $E$  et  $x = ae$ ,  $y = be$ , on a  $xy = ab$ . Si  $E = k$ , cette forme est simplement le produit du corps  $k$ .

(2) Si  $E$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension 2 sur le corps  $k = \mathbb{F}_2$ , l'espace des formes bilinéaires alternées est de dimension 1. Il possède donc un unique élément non nul : le déterminant dans une quelconque base, qui dans le contexte présent ne dépend pas de la base. Pour  $x, y \in E$ , nous noterons  $\det(x, y)$  la valeur correspondante de cette forme bilinéaire alternée.

**Théorème.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  sur un corps  $k$ . Il existe un isomorphisme  $i : E \rightarrow E^*$  indépendant de la base si et seulement si  $n = 1$  et  $k = \mathbb{F}_2$ , ou  $n = 1$  et  $k = \mathbb{F}_3$ , ou  $n = 2$  et  $k = \mathbb{F}_2$ . Lorsque c'est le cas, il existe même une collection d'isomorphismes  $i_E : E \rightarrow E^*$  indépendante de  $E$  à isomorphisme près. Les formes bilinéaires correspondantes sont les suivantes :

- (1)  $n = 1$  et  $k = \mathbb{F}_2$  : la forme symétrique  $\langle x, y \rangle_E = xy$ ,
- (2)  $n = 1$  et  $k = \mathbb{F}_3$  : l'une des formes symétriques  $\langle x, y \rangle_E = xy$  ou  $\langle x, y \rangle_E = -xy$ ,
- (3)  $n = 2$  et  $k = \mathbb{F}_2$  : la forme alternée  $\langle x, y \rangle_E = \det(x, y)$ .

Dans chacun de ces cas, le morphisme composé  $E \xrightarrow{i_E} E^* \xrightarrow{i_{E^*}} E^{**}$  est égal à l'isomorphisme de bidualité  $ev : E \rightarrow E^{**}$ .

**Commentaires.** (a) Le cas (1) n'est pas surprenant car on a en fait un résultat beaucoup plus fort : si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimension 1 sur  $\mathbb{F}_2$ , il existe un unique isomorphisme  $i_{E,F} : E \rightarrow F$ . Ainsi, non seulement  $E$  et son dual  $E^*$ , mais  $E$  et n'importe quel autre espace vectoriel  $F$  sont isomorphes canoniquement (ici au sens le plus fort possible).

(b) Dans le cas (2), pour chaque espace vectoriel  $E$  on a deux choix naturels opposés de forme bilinéaire. Le théorème affirme que chacune des deux formes s'étend en une collection indépendante de  $E$  à isomorphisme près (et donc est vraiment « canonique » au sens le plus fort). Ceci est remarquable car il aurait pu se passer qu'il n'y ait pas de possibilité de choisir entre une forme et son opposée de manière compatible pour tous les espaces vectoriels.

(c) Dans tous les cas exceptionnels, comme il existe des collections indépendantes de  $E$ , on note  $i$  au lieu de  $i_E$  et  $\langle x, y \rangle$  au lieu de  $\langle x, y \rangle_E$ . La dernière affirmation du théorème est donc que  $ev = i^2$ , c'est-à-dire que les isomorphismes de dualité canoniques exceptionnels fournissent une racine carrée de l'isomorphisme de bidualité (voire deux, si  $n = 1$  et  $k = \mathbb{F}_3$ ).

**Preuve.** Cas  $n \geq 3$ . Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Supposons qu'il existe un isomorphisme  $i : E \rightarrow E^*$  indépendant de la base. Soit  $\langle -, - \rangle$  la forme bilinéaire non dégénérée correspondante, invariante sous  $GL(E)$ . Choisissons  $x \in E$  non nul. Comme le noyau de la forme  $\langle x, - \rangle$  est de dimension au moins 2, il existe  $y \in E$  tel que  $\langle x, y \rangle = 0$  et  $\{x, y\}$  est une famille libre. Par ailleurs, comme  $x \neq 0$  il existe  $z \in E$  tel que  $\langle x, z \rangle \neq 0$ . Quitte à remplacer  $z$  par  $z + y$ , on peut supposer que  $\{x, z\}$  est une famille libre de  $E$ . Soit  $u \in GL(E)$  un automorphisme qui fixe  $x$  et qui envoie  $y$  sur  $z$ . On a alors  $0 = \langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, z \rangle \neq 0$ , une contradiction.

Cas  $n = 2$ . Dans une base fixée de  $E$ , on note  $B$  la matrice de la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle$  et  $M$  la matrice d'un automorphisme variable  $u \in GL(E)$ . Alors la propriété d'invariance  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  est équivalente à l'égalité matricielle  ${}^tMBM = B$ , pour toute matrice inversible  $M$  de transposée  ${}^tM$ . Notons  $B = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ . En prenant  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  puis  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on trouve  $r = u = s + t = 0$  donc  $B = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . En prenant maintenant  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  quelconque, l'égalité  ${}^tMBM = B$  est équivalente à l'égalité  $ad - bc = 1$ . Ceci a lieu pour tout  $M$  si et seulement si le seul élément non nul de  $k$  est 1, c'est-à-dire  $k = \mathbb{F}_2$ . On a alors  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  dont on vérifie que c'est la matrice de la forme  $(x, y) \mapsto \det(x, y)$  introduite dans l'exemple (2).

Cas  $n = 1$ . Dans ce cas, tout automorphisme  $u$  est une homothétie de rapport  $\lambda \neq 0$ . L'égalité d'invariance s'écrit  $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$ . Pour que cette égalité soit vérifiée pour tous  $\lambda, x, y$ , il faut et il suffit que  $\lambda^2 = 1$  pour tout scalaire  $\lambda$  non nul dans  $k$ . Ceci signifie

que  $k^* = \{\pm 1\}$ , c'est-à-dire  $k = \mathbb{F}_2$  ou  $k = \mathbb{F}_3$ . Dans ce cas, n'importe quelle forme bilinéaire non dégénérée  $\langle -, - \rangle$  est invariante. Dans une base fixée, une telle forme est déterminée par sa matrice composée d'un seul scalaire non nul. Si  $k = \mathbb{F}_2$  il y a une seule possibilité, et si  $k = \mathbb{F}_3$  il y a deux possibilités. Il est facile de vérifier que les formes en question sont la forme de l'exemple (1) et son opposée.

Le fait que les formes  $\pm \langle x, y \rangle$  et  $\det(x, y)$  soient définies en des termes qui ne font intervenir que la structure des espaces vectoriels en jeu montrent qu'elles sont invariantes par tout isomorphisme  $u : E \rightarrow F$ . Ceci montre que, dans chacun des cas exceptionnels, on définit ainsi une collection d'isomorphismes  $i_E : E \rightarrow E^*$  indépendante de  $E$  à isomorphisme près.

Il ne reste qu'à montrer que la composée  $i_{E^*} \circ i_E$  est égale à  $\text{ev}$ . Le plus simple est de le prouver matriciellement. On fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et on note  $\mathcal{B}^*, \mathcal{B}^{**}$  les bases correspondantes de  $E^*, E^{**}$ . Dans les cas (1) et (2), il existe  $\lambda \neq 0$  tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*}(i_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}^{**}}(i_{E^*}) = (\lambda) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^{**}}(\text{ev}) = (1).$$

Comme  $\lambda^2 = 1$ , on a bien  $i_{E^*} \circ i_E = \text{ev}$ . Dans le cas (3), on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*}(i_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}^{**}}(i_{E^*}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^{**}}(\text{ev}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici encore on trouve que  $i_{E^*} \circ i_E = \text{ev}$ . □

Pour revenir au thème de cette note, on peut conclure que dans le cas des isomorphismes entre un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et son dual, la situation intermédiaire où l'on aurait un isomorphisme  $i : E \rightarrow E^*$  qui est invariant par changement de base, mais pas par isomorphisme  $u : E \rightarrow F$ , ne se produit pas. C'est tout blanc ou tout noir et on conclut :

- si  $n = 1$  et  $\text{card}(k) \leq 3$ , ou si  $n = 2$  et  $k = \mathbb{F}_2$ , il existe un isomorphisme canonique entre un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et son dual ;
- dans tous les autres cas, il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et son dual ;

Il est intéressant de noter que lorsque  $n = 1$  et  $k = \mathbb{F}_3$ , on doit décider : la forme bilinéaire  $\langle x, y \rangle_E = -xy$  est-elle canonique ?