Un peu de culture mathématique sur les groupes de Lie et l'exponentielle

Voici quelques commentaires sur l'importance de l'exponentielle dans la théorie des groupes de Lie. Un *groupe de Lie* est un groupe qui est muni d'une structure différentiable qu'on appelle une structure de *variété*. Son espace tangent en l'élément neutre $e \in G$ est un espace vectoriel, qui se trouve muni d'une application bilinéaire appelée *crochet* qui en fait une *algèbre de Lie*. Voyons comment présenter ces objets de la manière la plus simple possible.

1. La notion de variété avec les mains. Pour passer sous silence la définition précise de ce qu'est une variété, disons que l'idée grossière est que c'est un espace topologique M sur lequel on sait définir la notion d'espace tangent en chacun de ses points. Il semble clair que si $M \subset \mathbb{R}^n$ est un k-plan affine ($k \leq n$), alors l'espace tangent de M en chacun de ses points est M lui-même, donc M est une variété. Par exemple $\mathbb{R}^n$ (affine) ou n'importe quel ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une variété, et pour tout $x \in U$ on a $T_xU = \mathbb{R}^n$ (vectoriel). Plus généralement, une façon naturelle de définir des objets géométriques est de considérer une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ et de regarder l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \, , \, f(x) = 0\}$. Alors, si la différentielle en tout point $d_xf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est surjective, $M = Z(f)$ est une variété (une sous-variété de $\mathbb{R}^n$) ([1]). Cette condition imposée sur la différentielle de f provient du théorème des fonctions implicites ; illustrons tout de suite sa necessité. Dans le cas $n = 2$, $p = 1$, on sait qu'en un point $(a, b) \in Z(f)$, donc $f(a, b) = 0$, la tangente à la courbe $Z(f)$ est l'ensemble des $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(v-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(w-b) = 0 \; ,$$

sauf lorsque $(\partial f/\partial x)(a, b) = (\partial f/\partial y)(a, b) = 0$ où il y a un problème. Dans l'exemple de la fonction $f_1(x, y) = x^2+y^2-1$, en tout point $x_0 = (a, b) \in Z(f_1)$ on a $d_{x_0}f_1 = (\partial f_1/\partial x)(a, b) = (\partial f_1/\partial y)(a, b) \neq (0, 0)$ donc $M_1 = Z(f_1)$ est bien une variété. En revanche pour $f_2(x, y) = x^2 - y^2$, si $x = (a, b) \in Z(f_2)$ on a $d_xf_2 = (2a, -2b)$ donc pour $x_0 = (0, 0) \in Z(f_2)$ on a $d_{x_0}f_2 = 0$. Ainsi $M_2 = Z(f_2)$ n'est pas une variété et on dit que x_0 est un point *singulier* (mais $M_2 \setminus \{x_0\}$ est une variété).

2. L'espace tangent avec les mains. L'espace tangent en un point x d'une variété M est une approximation linéaire de M en x, de la même façon que la tangente à une courbe est une approximation de la courbe. Sans entrer dans une définition trop précise, disons qu'on peut définir l'espace tangent en

[1] Une telle f est appelée une *submersion*. À vrai dire, pour avoir une bonne notion de plans tangents il suffit de prendre f de classe C^1, et on obtient alors une notion de variété de classe C^1. Nous ne considérons que des variétés de classe C^∞ pour simplifier.

$x \in M$ comme étant l'ensemble des vecteurs tangents $\gamma'(0)$ aux courbes $t \mapsto \gamma(t)$ de classe C^1 tracées sur M et telles que $\gamma(0) = x$ (avec t dans un petit intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$). Il est noté T_xM et ses points sont des vecteurs. Prenons l'exemple de $M = \{x \in \mathbb{R}^n\ ,\ f(x) = 0\}$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une submersion, et $x_0 \in M$, alors on peut montrer que le plan tangent $T_{x_0}M$ est le plan de $\mathbb{R}^n$ d'équations $d_{x_0}f(v) = 0$. En d'autres termes, notant $f = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathrm{Jac}(f)$ la matrice des $(\partial f_i/\partial x_j)(x_0)$,

$$T_{x_0}M = \{v = (v_1, \dots, v_n) \text{ t.q. } \mathrm{Jac}(f)v = 0\}\ .$$

Une petite variation de x dans son espace tangent peut être pensée comme un élément de la forme $x+v$ où $v \in T_xM$ est un vecteur. Si $f : M \to N$ est une application différentiable entre deux variétés (ce que l'on n'a pas défini mais on fait comme si), avec $x \in M$ et $y = f(x)$, alors il y a une application linéaire induite qui est la différentielle $d_xf : T_xM \to T_yN$. Si $v \in T_xM$ et $w = d_xf(v)$ alors la petite variation $x + v$ s'envoie sur la petite variation $y + w$, en d'autres termes on retrouve une forme familière :

$$f(x + v) = f(x) + d_xf(v) + (\text{termes d'ordre supérieur en } v)\ .$$

Ces remarques sont pratiques pour faire des calculs simples, comme nous le ferons ci-dessous.

3. Groupes de Lie avec les mains. Un groupe de Lie est un ensemble G qui est muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété, les deux étant compatibles au sens où la multiplication $G \times G \to G$ et l'inversion $G \to G$ sont des application différentiables. Par exemple il est clair que le groupe des nombres complexes de module 1, identifié au cercle S^1, est un groupe de Lie. Voici d'autres exemples : $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ (ce sont des ouverts de certains $\mathbb{R}^n$), $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ (ici c'est moins évident que ce sont des variétés, il faut le démontrer en écrivant ces ensembles sous la forme $M = Z(f)$ et vérifier que f est à différentielles d_xf surjectives ; exercice : faites-le !).

4. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, avec les mains. Pour tout groupe de Lie G, on note $\mathfrak{g} = T_eG$ l'espace tangent en l'élément neutre $e \in G$. Cet espace vectoriel a une importante capitale car il se trouve qu'il existe une application bilinéaire $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, appelée le *crochet de Lie*, qui renferme presque toute la structure de G. Pour le trouver on considère l'application de conjugaison $c : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$, qui renferme de l'information sur la multiplication et sur l'inversion de G. Si on différentie c en l'élément (e, e) on obtient une application

$$d_{(e,e)}c : T_{(e,e)}(G \times G) \to T_eG\ .$$

Or on a un isomorphisme naturel $T_{(e,e)}(G \times G) \simeq T_eG \times T_eG$ (c'est facile à montrer ; croyez-moi) donc on a $d_{(e,e)}c : T_eG \times T_eG \to T_eG$. Malheureusement, comme toute différentielle, $d_{(e,e)}c$ est une application linéaire, or on veut une application bilinéaire. Il va falloir ruser un peu. Ce que l'on fait c'est que pour tout $g \in G$ on considère

$$c_g : G \to G \quad , \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

et sa différentielle $d_e(c_g) : T_eG \to T_eG$. Ceci est une application linéaire, autrement dit

$$d_e(c_g) \in \mathscr{L}(T_eG, T_eG)\ .$$

On a obtenu une application

$$\varphi : G \to \mathscr{L}(T_eG, T_eG) \quad , \quad g \mapsto \varphi(g) = d_e(c_g)\ .$$

Comme $\varphi(e) = \mathrm{Id}$, si on différentie de nouveau en e on trouve

$$d_e\varphi : T_eG \to T_{\mathrm{Id}}(\mathscr{L}(T_eG, T_eG)) \simeq \mathscr{L}(T_eG, T_eG)$$

puisque l'espace tangent d'un espace vectoriel en un point s'identifie à l'espace vectoriel lui-même. Ainsi on a obtenu l'application recherchée :

$$[\cdot, \cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$$

qui envoie (v,w) sur $[v,w] := [(d_e\varphi)(v)](w)$. Voici donc défini le crochet en général. On peut montrer qu'il satisfait une propriété très importante appelée *identité de Jacobi* : $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$.

5. L'exemple des groupes de matrices. Il est assez facile de calculer le crochet de Lie pour tous les groupes de Lie qui sont des sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{C})$. Posons, disons, $G = GL_n(\mathbb{R})$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^2 = M_n(\mathbb{R})$, défini par la non-annulation du déterminant, donc c'est bien une variété. Les formules qui donnent la multiplication et l'inversion montrent que ces applications sont bien différentiables (exercice : vérifiez que c'est clair pour vous). Donc G est un groupe de Lie. De plus comme c'est un ouvert de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$, l'espace tangent en chacun de ses points s'identifie à $M_n(\mathbb{R})$. On va voir que le crochet de Lie de deux vecteurs, c'est-à-dire deux matrices $V, W \in M_n(\mathbb{R})$, est donné par la formule familière $[V,W] = VW - WV$, valable pour les algèbres de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ ou de tous leurs sous-groupes fermés.

Pour différentier en l'identité on considèrera des petites variations $M = \mathrm{Id} + V$, $N = \mathrm{Id} + W$ (voir ci-dessus). Ici $c_M : GL_n \to GL_n$ est l'application $N \mapsto MNM^{-1}$. (Exercice : tout à l'heure on a obervé que $d_{(e,e)}c$ est une application linéaire : calculez-la !). Comme

$$M(\mathrm{Id} + W)M^{-1} = \mathrm{Id} + MWM^{-1} + (\text{termes d'ordre supérieur en } W)$$

(en fait ici les termes d'ordre supérieur sont nuls), on trouve

$$d_{\mathrm{Id}}c_M : M_n \to M_n \quad , \quad W \mapsto MWM^{-1} \ .$$

D'où l'application

$$\varphi : GL_n \to \mathscr{L}(M_n, M_n) \quad , \quad M \mapsto d_{\mathrm{Id}}c_M \ .$$

Cette application envoie l'identité $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_n \in GL_n$ sur l'identité $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_{n^2} \in \mathscr{L}(M_n, M_n)$. On les notes toutes deux Id sans distinction. Il s'agit maintenant de calculer

$$d_{\mathrm{Id}}\varphi : T_{\mathrm{Id}}GL_n = M_n \to T_{\mathrm{Id}}\mathscr{L}(M_n, M_n) = \mathscr{L}(M_n, M_n)$$

Notons $\psi_V : M_n \to M_n$ l'endomorphisme $\psi_V(W) = VW - WV$, formule linéaire en V. On va montrer que

$$\varphi(\mathrm{Id} + V) = \mathrm{Id} + \psi_V + (\text{termes d'ordre supérieur en } V)$$

Notons $\varphi_{\mathrm{Id} + V}$ au lieu de $\varphi(\mathrm{Id} + V)$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{Id}+V}(W) &= (\mathrm{Id} + V)W(\mathrm{Id} + V)^{-1} = (\mathrm{Id} + V)W(\mathrm{Id} - V + (\text{t.o.s. en } V) \\ &= W + VW - WV + (\dots) = \mathrm{Id}(W) + \psi_V(W) + (\text{t.o.s.}) \end{aligned}$$

et on obtient bien $\varphi(\mathrm{Id} + V) = \mathrm{Id} + \psi_V + (\text{t.o.s.})$. En conclusion

$$[V,W] = [(d_{\mathrm{Id}}\varphi)(V)](W) = \psi_V(W) = VW - WV \ .$$

Voici fini ce calcul. (Exercice : montrez que ce crochet vérifie bien l'identité de Jacobi.)

6. L'algèbre de Lie et l'exponentielle. Soit G un groupe de Lie qui est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Nous allons voir que son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ est intimement liée à l'exponentielle via :

$$T_eG = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ , \ \exp(tA) \in G \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\} \ .$$

La propriété capitale pour voir ceci est le fait que $\exp\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est analytique (donc de classe C^∞) et $d(\exp)_0 = \mathrm{Id}$, donc elle réalise un difféomorphisme entre un voisinage Ω_0 de $0 \in \mathrm{M}_n(k)$ et un voisinage Ω_{Id} de $\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}_n(k)$. Notons $\log : \Omega_{\mathrm{Id}} \to \Omega_0$ son inverse. On va utiliser la définition de T_eG comme ensemble des vecteurs tangents $\gamma'(0)$ aux courbes $t \mapsto \gamma(t) \in G$, $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, de classe C^1 et telles que $\gamma(0) = \mathrm{Id}$.

Il est clair que $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \exp(tA) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\} \subset T_eG$ car si $\exp(tA) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors la courbe $\gamma(t) = \exp(tA)$ vérifie $\gamma'(0) = A$ et donc $A \in T_eG$. Réciproquement soit $A = \gamma'(0)$ pour une certaine courbe $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to G$ centrée en A, et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout n assez grand on a :

- $t/n < \epsilon$ et $\gamma(t/n) = \mathrm{Id} + tA/n + O(1/n^2)$,
- $\gamma(t/n) \in \Omega_{\mathrm{Id}}$, de sorte que
- $\gamma(t/n) = \exp(\log(\gamma(t/n))) = \exp(\log(\mathrm{Id} + tA/n + O(1/n^2)))$.

On en déduit que la limite de $\gamma(t/n)^n$ est égale à $\exp(tA)$, or comme G est fermé, cette limite est dans G. Donc $T_eG \subset \{A \in M_n(\mathbb{R}), \exp(tA) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

7. Le dictionnaire groupes $\leftrightarrow$ algèbres. Il y a un analogue à l'exponentielle pour les groupes de Lie généraux, c'est un morphisme $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ que l'on appelle encore l'exponentielle. Ces concepts sont fondamentaux dans la théorie car on montre qu'on peut établir une sorte de dictionnaire entre les groupes de Lie et leurs algèbres de Lie. Voici quelques exemples :

- soit G un groupe de Lie connexe, alors il y a une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de Lie connexes $H \subset G$ et l'ensemble des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

- soient G_1, G_2 des groupes de Lie connexes, alors il y a une bijection entre l'ensemble des morphismes de groupes de Lie connexes $G_1 \to G_2$ et l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$ (en fait il faut faire une hypothèse supplémentaire qui est que G_1 est *simplement connexe*).

Ceci est magique, car on ramène dans une certaine mesure l'étude des groupes de Lie, des objets très compliqués (pleins de topologie et de géométrie différentielle) à celles de leurs algèbres, bien plus simple (c'est de l'algèbre linéaire). (Question : pourquoi s'est-on limité ci-dessus à des groupes *connexes* ?)

8. Exemples. On note les algèbres de Lie par des lettres gothiques. Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dispose de deux techniques pour calculer l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé $G \subset GL_n(k)$: soit comme espace tangent T_eG, soit comme $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \exp(tA) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

- $\mathfrak{gl}_n(k) = M_n(k)$ (clair ; exercice : dites pourquoi !).

- $\mathfrak{sl}_n(k)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. En effet faisons-le par la première méthode (espace tangent). $SL_n(k) = Z(f)$ où $f(M) = \det(M) - 1$, donc l'espace tangent est défini par l'équation $d_{\mathrm{Id}}f(V) = 0$. Or il est facile de voir que $\det(\mathrm{Id} + V) = 1 + \mathrm{tr}(V) + (\text{t.o.s. en } V)$ donc $d_{\mathrm{Id}}f(V) = \mathrm{tr}(V)$. On trouve donc l'équation $\mathrm{tr}(V) = 0$. (Exercice : vérifiez le calcul $\det(\mathrm{Id} + V) = 1 + \mathrm{tr}(V) + (\text{t.o.s. en } V)$ et plus généralement calculez la différentielle du déterminant en une matrice M.) Faisons-le maintenant par la deuxième méthode. Soit V telle que $\det(\exp(tV)) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\det(\exp(tV)) = \exp(\mathrm{tr}(tV)) = 1$ (car les valeurs propres de $\exp(tV)$ sont les exponentielles des valeurs propres de tV ; exercice : vérifiez-le et vérifiez la formule $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$). Il s'ensuit que la trace de tV est nulle (si $k = \mathbb{R}$) ou multiple de $2i\pi$ (si $k = \mathbb{C}$), et ceci pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc la trace est nulle.

- $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$. (Exercice.)

- $\mathfrak{su}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$. (Exercice ; dites au passage ce qu'est une matrice antihermitienne.)

- l'algèbre de Lie du groupe de Lie réel des quaternions de norme 1 est égale à l'ensemble des quaternions purs. (Exercice.)

- l'algèbre de Lie du groupe de Lie réel des nombres complexes non nuls est... l'algèbre de Lie du groupe de Lie réel des nombres complexes de module 1 est...

Bibliographie

Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann*
Rouvière, Petit guide de Calcul différentiel (...), *Cassini*